| Übungen zum Vorkurs Physik | **Blatt Nr. 14** | 1.10.2009 |
|---|---|---|

**Aufgabe 53:** [Teile (b,c) sind (*)]

Zeigen Sie, dass für die Betragsfunktion (vgl. **Ü52**) gilt:

(a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecks-Ungleichung)

(b) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

(c) Falls $z \in \mathbb{R}$, dann $|z| = \begin{cases} z & \text{falls } z \geq 0 \\ -z & \text{falls } z < 0 \end{cases}$

**Aufgabe 54:**

Betrachten Sie das komplexe Polynom zweiten Grades $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto P(z) := a\,z^2 + b\,z + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass

(a) $z_\pm := \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{C}\,.$ [Hinweis: **Ü49**b3.]

(b) $z_\pm$ sind Nullstellen von $P(z)$

(c) $z_+\, z_- = \frac{c}{a}$ und $z_+ + z_- = -\frac{b}{a}$

(d) $P(z) = a(z - z_+)(z - z_-)$

**Aufgabe 55:**

Betrachten Sie das komplexe Polynom dritten Grades $P(z) = -\frac{1}{2}\,z^3 - 2\,z^2 + \frac{1}{2}\,z + 11\,.$

(a) Können Sie eine Nullstelle $z_1$ von $P(z)$ erraten?

(b) Begründen Sie (mit dem Fundamentalsatz der Algebra), dass es Zahlen $b, c \in \mathbb{C}$ gibt mit $P(z) = -\frac{1}{2}(z - z_1)(z^2 + b\,z + c)\,.$

(c) Bestimmen Sie $b$ und $c$ aus (b).

[Geht per Polynomdivision; oder durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich.]

(d) Berechnen Sie die restlichen Nullstellen $z_2, z_3\,.$

**Aufgabe 56:** [Teil (c) ist (*)]

(a) Sei $k \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-|x|}\, \exp(i\,k\,x)$

[Hinweis: $e^{-x}\, \exp(ikx) \overset{x\to\infty}{\to} 0$.]

(b) Die Funktion $\tilde{f}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\, \exp(-ikx)$ heisst *Fourier-Transformierte* von $f(x)$.

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ von $f(x) = e^{-|x|}\,.$

(c) Zeigen Sie:

$f(-x) = [f(x)]^*$ impliziert $[\tilde{f}(k)]^* = \tilde{f}(k)$ bzw. $\mathrm{Im}\,\tilde{f}(k) = 0$

$f(-x) = [-f(x)]^*$ impliziert $[\tilde{f}(k)]^* = -\tilde{f}(k)$ bzw. $\mathrm{Re}\,\tilde{f}(k) = 0$