Übungen zum Vorkurs Physik	**Blatt Nr. 12**	29.9.2009

Aufgabe 45:

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Taylorreihen aus **Ü41**, also von:

(a) $f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$

(b) $f_2(x) = \exp(x) = \exp(x_0)\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}$

(c) $f_3(x) = \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(d) $f_4(x) = \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(x-1)^k$

(e) $f_5(x) = \operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$

Aufgabe 46:

(a) Geben Sie ein Polynom $p(x)$ an mit $|e^x - p(x)| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ für alle $|x| < 2.$

(b) Können Sie die Ungleichung $x - \frac{1}{2}\,x^2 < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$ beweisen?

Aufgabe 47:

Zeigen Sie, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\frac{d^n}{dx^n}\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}\,.$

Wieviele Terme der Taylorentwicklungen von $\frac{1+x}{1-x}$ und e^{2x} sind identisch?

(b) $\frac{d^n}{dx^n}\, f(x^2) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!}\,(2x)^{n-2k}\, f^{n-k}(x^2)$

[Für gerades n ist $[n/2] := n/2$; Für ungerades n ist $[n/2] := (n-1)/2$.]

Aufgabe 48: (*)

(a) Welchen Konvergenzradius hat $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n$?

(b) Für welche x konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\,(x-2)^n$?

(c) Wo konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n^n\, x^n$?