

Aufgabe 37:

Lösen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe einer Formelsammlung (z.B. *Bronstein*):

$$(a) \int_0^{1/2} dx x^2 \sqrt{1 - 4x^2}$$

$$(b) \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x}(4-x)}$$

[Hinweis: eventuell hilft dabei eine einfache Substitution wie z.B. $y = \alpha x$.]

Aufgabe 38:

Die sogenannte *Euler'sche Gammafunktion* ist definiert als

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^\infty dt e^{-t} t^{x-1} .$$

Zeigen Sie, dass:

$$(a) \Gamma(x) \text{ existiert für alle } x \in \mathbb{R}^+ .$$

$$(b) \Gamma(1) = 1$$

$$(c) \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

$$(d) \Gamma(n+1) = n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

[Bemerkung: $\Gamma(x+1)$ ist also die Verallgemeinerung der Fakultät $x!$ für $x \in \mathbb{R}^+.$]

Aufgabe 39:

Können Sie die folgenden uneigentlichen Integrale bestimmen?

$$(a) \int_{-\infty}^\infty dx x^n e^{-|x|} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad [\text{Ü38 hilft}]$$

$$(*) (b) \int_{-\infty}^\infty dx x^2 e^{-x^2}$$

$$(*) (c) \int_0^\infty dx x e^{-x^4}$$

[Hinweis: für (b,c) können Sie $\int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ und $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dx e^{-x^2} =: \text{erf}(z)$ benutzen.]

Aufgabe 40:

$$(a) \text{ Berechnen Sie die Momente } M_n := \int_{-\infty}^\infty dy y^n p(y)$$

$$\text{der Normalverteilung } p(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 .$$

$$(*) (b) \text{ Die Funktion } f(x) := \int_{-\infty}^\infty dy g(y) e^{yx} \text{ sei konvergent für alle } x \text{ nahe } 0 .$$

Schreiben Sie das n-te Moment $\int_{-\infty}^\infty dy y^n g(y)$ von $g(y)$ als Ableitung von $f(x)$.

[Dieses allgemeine Verfahren heisst *Integrieren durch Differenzieren*; vgl. auch **Ü29a**.]

$$(*) (c) \text{ Mit der Methode aus (b) könnten Sie nun auch (a) lösen.}$$

- Übungsraum-Änderung, nur für heute (Fr 25.9.):

U2-113 (DR) $\rightarrow$ D2-136

U2-147 (MR) $\rightarrow$ D2-152

- Raumänderung für die Vorlesung am Montag 28.9.: H6 $\rightarrow$ **H12**