Übungen zum Vorkurs Physik	**Blatt Nr. 03**	16.9.2009

Aufgabe 9:

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:
(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad \text{(geometrische Reihe)}$$

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad \text{(binomische Formel)}$$

Aufgabe 10:

(a) Schreiben Sie folgende Reihen in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$:

(a1) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \frac{8}{9} + \ldots$
(a2) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$
(a3) $\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(3) + \frac{1}{4}\ln(4) - \ldots$

(b) Bestimmen Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen:

(b1) $a_n = \frac{1}{n}$
(b2) $c_n = \frac{n-1}{n+1}$
(b3) $b_n = \frac{2n^3 - n^2 + 5}{5n^3 + 2n - 1}$

Aufgabe 11:

Zeigen Sie die Konvergenz der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen den in **Ü10**(b1) erwarteten Grenzwert, und zwar "streng formal" (d.h. per ε-N-Rechnung).

Aufgabe 12:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Laut Vorlesung existieren dann

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad , \quad b := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \quad , \quad c := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

als Grenzwerte der entsprechenden endlichen Reihen $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ etc.
Zeigen Sie, dass $a \cdot b = c$ ist.
[Hinweis: $a \cdot b$ naiv ausmultiplizieren, als ob die Summe endlich wäre. Dann alle Summations-Index-Paare als Punkte im ersten Quadranten veranschaulichen, und in anderer Reihenfolge (diagonal) aufsummieren.]