Übungen zum Vorkurs Physik	**Blatt Nr. 02**	15.9.2009

Aufgabe 5:

Können Sie die folgenden zwei Aussagen für jede irrationale Zahl x (d.h. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) und jede rationale Zahl $y \in \mathbb{Q}$ beweisen?
(a) $x + y \notin \mathbb{Q}$
(b) $x \cdot y \notin \mathbb{Q}$ für $y \neq 0$
[Hinweis: am einfachsten ist ein Widerspruchsbeweis.]
$\Rightarrow$ es gibt also "viel mehr" irrationale Zahlen als rationale Zahlen.

Aufgabe 6:

Zeigen Sie, dass es zu jeder irrationalen Zahl x eine rationale Zahl y gibt, die beliebig nahe an x liegt.
[Beweisidee: Stelle x als Dezimalzahl dar. Finde zu beliebigem (aber festem) $n \in \mathbb{N}$ eine rationale Zahl y, deren Unterschied zu x weniger als $\frac{1}{10^n}$ beträgt.]
$\Rightarrow$ die rationalen Zahlen liegen also "dicht" in $\mathbb{R}$: zwar fehlen in $\mathbb{Q}$ viel mehr Zahlen als $\mathbb{Q}$ selbst enthält, aber die "Lücken" sind alle "unendlich klein".

Aufgabe 7:

Beweisen Sie, dass jede ultimativ periodische Dezimalzahl x rational ist.
[Hinweis: Stelle x als $x = z_0\,,\, z_1\, z_2 \ldots z_n\, z_{n+1} \ldots z_{n+k}\, z_{n+1} \ldots z_{n+k} \ldots$ dar, wobei die Zahl links vom Komma $z_0 \in \mathbb{Z}$ ist, und alle Nachkommastellen $z_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ sind. Die Periode ist dann $k \in \mathbb{N}$. Betrachte nun $y = x \cdot 10^k - x$.]
$\Rightarrow$ es gibt also "viel mehr" nicht-periodische als periodische Dezimalzahlen.

Aufgabe 8:

Die Betragsfunktion sei definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann Folgendes gilt:
(a) $|x| \geq 0$
(b) $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$
(c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$
(e) $|x - y| \geq ||x| - |y||$
(f) $|x - y| \leq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$, für $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$