

0. Einleitung

Orga: Vorlesung Englisch 9:15 - 10:50 ± ... (H6)
14.9. - 9.10. 2009

"Übungen Englisch 11:15 - 12:45
in 4 Gruppen; Details heute ca. 10:35

Dahne www.physik.uni-bielefeld.de/~wgothts/vk09
YS, E6-118, 0521-106 6211

eKW: Bitte registrieren → u.a. Email-Verteiler

Ziele: Auffrischen von Schul-Mathematik - Vorkenntnissen
→ gleiches Basisniveau bei Studienbeginn
Stressfreies Erwerben von "Uni-betrieb"
→ verschnuppern, Appetit anregen
"Mathe-Schock" zu Studienbeginn vorbeugen

Inhalt: Zahlen, Folgen, Reihen
Beweismethoden
Funktionen, Ableitungen, Taylor-Entwicklungen
Integration
komplexe Zahlen
Vektoren, Felder, $\mathbb{R}^n$

Literatur: K. Hoffe, Mathematische Vorleser ← (online; umsonst)
C. Long, N. Packer, Mathematische Notation in der Physik
etc... (s. webpage)
auch z.B. Branstern, Taschenbuch der Mathematik

1. Grundlagen

zur Vorbereitung auf Analysis
→ Grundbegriffe über Mengen, Abbildungen, wichtigste Zahlbereiche,
mathematisches Schließen, elementare Funktionen

1.1 Mengen

→ Begriffe, "Vokabeln", Sprech- und Schreibweisen der Mengenlehre

logische Beziehungen:

$A \Rightarrow B$: "Aussage A impliziert Aussage B"

bzw. "Aus A folgt B"

bzw. "Wenn A, dann B"

Bedeutung: wenn A wahr ist, ist auch B wahr.

man sagt auch: A ist eine hinreichende Bedingung
für B

bzw.: B ist eine notwendige Bedingung
für A

$A \Leftrightarrow B$: "A äquivalent B"

bzw. "A gilt genau dann, wenn B gilt"

bzw. "A gilt dann und nur dann, wenn B gilt"

Bedeutung: $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

A oder B : A ist wahr, oder B ist wahr,
oder A und B sind wahr

((vgl. mit "entweder A oder B" : A, B schließen sich
aus))

A und B ; nicht A : anschaulich klar

Mengen: Zusammenfassung M von wohlunterschiedenen Objekten

$x \in M \Leftrightarrow x$ ist ein Element von M

$y \notin M \Leftrightarrow y$ ist kein Element von M

man benutzt oft folgende Bezeichnungen:

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen (gemeins: s. unten)

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen $\{ \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen $\{ 0, 1, -1, 2, -2, \dots \}$

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen $\{ 1, 2, 3, \dots \}$

$\mathbb{N}_0$ Menge der Zahlen $\{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$

übliche Schreibweisen für Mengen:

Aufzählung aller Elemente, z.B. $M = \{ 2, 3, 5, 7 \}$

(Reihenfolge egal! Doppelte Aufzählung auch egal.)

per Bedingung: $M = \{ x \mid \dots \text{(Bedingung an } x) \dots \}$

z.B. $M = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist eine beliebige Primzahl} \}$

oder $M = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x = 0 \} = \{ 0, 4 \}$

Beziehungen zwischen zwei Mengen A, B :

$A \subset B \Leftrightarrow A$ ist Teilmenge von B

" A enthalten in B "

(schließt den Fall $A=B$ mit ein; manchmal $\subseteq$)

$\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$

kann auch $B \supset A$ schreiben

Bsp: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$ Durchschnitt 

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$ Vereinigung 

$A \setminus B = \{ a \in A \mid a \notin B \}$ Differenz 

A, B disjunkt $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$\hat{=}$ leere Menge

z.B. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0 \}$

$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$ kartesisches Produkt

Bsp: $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$; denke (a, b) als Punkte einer Ebene

$A \times B = \mathbb{R}^2$

einige Rechenregeln der Mengenlehre (folgen aus obigen Def's):

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Distributivgesetz

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ Assoziativgesetz

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ de Morgansche Regeln

$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

(Bem: die Differenz ist nicht assoziativ, denn:

sei $A = \{ a \}$, dann $A \setminus (A \setminus A) = A \setminus \emptyset = A$

aber $(A \setminus A) \setminus A = \emptyset \setminus A = \emptyset$)

1.2 Abbildungen

Seien M, N nichtleere Mengen.

eine Abbildung (oder Funktion) $f: M \rightarrow N$

ist eine Vorschrift $x \mapsto f(x)$, die jedem $x \in M$ genau

ein Element $f(x) \in N$ zuordnet.

(Bem: "Funktion" benutzt man eher für Zahlen;

"Abbildung" eher für geometrische Zusammenhänge;

im Prinzip beides möglich/sichtig.))

Bsp: $f: M \rightarrow M$ mit $x \mapsto x$

ist die Identität, oder identische Abbildung auf M , Id_M

Bsp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$

ist die Funktion



Man nennt $\{f(x) \mid x \in M\}$ den Wertebereich (bzw. die Bildmenge) der Abbildung $f: M \rightarrow N$.

Eine Abbildung (oder Fkt.) $f: M \rightarrow N$ heißt

- injektiv (bzw. eindeutig)

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$\text{bzw. } (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$ hat höchstens eine Lösung $x \in M$

- surjektiv

$$\Leftrightarrow N \text{ ist die Bildmenge von } f$$

d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$

hat mindestens eine Lösung $x \in M$

- bijektiv

$$\Leftrightarrow f \text{ ist injektiv und surjektiv}$$

d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$

hat genau eine Lösung $x \in M$

Bsp $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv (denn $f(1) = f(-1)$)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ ist surjektiv

$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ ist bijektiv

$\rightarrow$ mehr Bsp: s. Übung

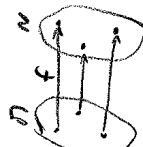
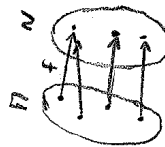
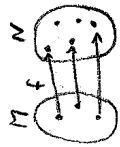
berechne dieses x mit $g(y)$; haben also Abbildung $g: N \rightarrow M$,

und es ist $f(g(y)) = y$ für alle $y \in N$

Somit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$

g nennt man deshalb Umkehrabbildung zu f

(Bezeichnung ist üblicherweise f^{-1} [nicht verwechseln mit $f^{-1}!$])



Diese Umkehrabbildung g ist auch bijektiv:

- g surjektiv, da $g(f(x)) = x$
- g injektiv, denn aus $g(y_1) = g(y_2)$ folgt $y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2$

"Beweisende"

Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ zwei Abbildungen.

Man nennt dann $g \circ f: A \rightarrow C$

mit $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ für $x \in A$

die Komposition von g mit f
(bzw. Hinterreihverknpfung)

liese $g \circ f$ als " g nach f "

Bsp

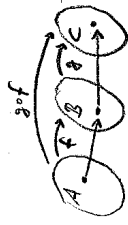
$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty], x \mapsto x^2$$

$$g: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$$

$\Rightarrow g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist die Identität auf $\mathbb{R}$: $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ entsprechend ist $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$

(Funktionss: s. später)



1.3 Zahlen

$\rightarrow$ brauchen wir z.B. zur Darstellung von Messwerten!

Bem: eine physikalische Größe besteht aus

Messwert und Maßeinheit (= Zahlenwert + Dimension)

$\uparrow$ Der Maßstab definiert

z.B. Meter ~ Lichtstrecke

Sekunde ~ Periodendauer CS-133

Zahlen! $\leftarrow$ Gegenstand der Mathematik

Abstraktion: "Gsterwessenschaft"

• logische Struktur, Vollaxiomatisierung

((für Messwerte hätte es genügt))

(Exkurs)

Zahlen (große)

1 Millionde; $\frac{10 \dots 0}{95000}$

Alter des Univers $13.7 \cdot 10^9$ Jahre

$\approx 10^{17}$ sec

$4.3 \cdot 10^{17}$ sec

Atome am Univers $\approx 10^{80}$ (10^{78-85} , Fülle 10 DN etc.)

Körper / Erde / Sonne / Milchstra
Unser Sonnensystem

10^{28} 50 57 68

vergeschaltete Zahl: $59! \approx 1.39 \cdot 10^{80}$

größte Zahl mit 3 Dez. Ziffern? $(99)^9 \approx 2 \cdot 10^{17}$

$99^9 = 9^{387420489}$ gigantisch!

Notiz: z.B. Fermat-Zahlen
1646

$F_n = 2^{(2^n)} + 1$; $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$,
 $F_5 = 4294967297$ durch 641
Euler 1732

$F_{2145351}$ da durch $3 \cdot 2^{2145353} + 1$ (5. größte Primzahl)
2003

L. aussagen: 2 Ziffern/cm $\rightarrow$ L²-Papier,
 $L = 10^{322009}$ Luftschiffe

Radium: per Hand / CAS

$\frac{x}{x} = 1$

$-20 = -20$

$16 - 36 = 25 - 45$

$+(9)^2 = + (9)^2$

$(4 - \frac{9}{2})^2 = (5 - \frac{9}{2})^2$

$4 = 5$ $\frac{9}{2}$

Lösungsweg: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

CAS: 1 = 1

Lsg-Prüf R 9

$(1 + 9 + \dots + 9^{10})(1 - 9) = 1 - 9$ vorstellen per Hand

$6 \cdot 7 = 42 \Rightarrow 66666 \cdot 66667 = 4444422222$ etc.

N: Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$

1. natürlichem Zahlen: # Teiler etc.

Zwei: innere Verknüpfungen, die $a, b \in \mathbb{N}$ ein $x \in \mathbb{N}$ zuordnen:

• Addition $a + b = x \in \mathbb{N}$

mit $a + b = b + a$ (Kommutativität)

und $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)

• Multiplikation $a \cdot b$ oder $ab = x \in \mathbb{N}$

mit $ab = ba$ (Kommut.)

und $a(bc) = (ab)c$ (Ass.)

Somit $1a = a$ (neutrales Element; Eins)

$\rightarrow$ sind verbunden durch $(a+b)c = ac + bc$ (Distributivgesetz)

(Bem.: oft sinnvoll, die Null 0 hinzunehmen, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$;
dann hat auch Addition ein eindeutig bestimmtes
neutrales Element: $0 + a = a$ (neutr. Element; Null))

die "elementaren" natürlichen Zahlen:

eine Primzahl $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ hat nur trivialen Teiler: 1 und p.

$\rightarrow$ "Fundamentale" der Zahlentheorie (ohne Beweis):

Jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ lässt sich bis auf die

Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Bedeutung der Primzahlen: z.B. Kryptographie (RSA-Verfahren)

$\mathbb{Z}$: Menge der ganzen Zahlen $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

Zusätzlich für Haken/Sell: Schließen...

$a+x=b$ hat nicht für alle $a, b \in \mathbb{N}$ Lsg $x \in \mathbb{N}$

z.B. $2+x=1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow$ Die Gleichung $a+x=b$ hat für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ genau

eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ (denn $x=b+(-a)$). "Inverses" zu a

Man sagt, $\mathbb{Z}$ sei abgeschlossen bezüglich der Addition.

$\rightarrow$ zentraler Begriff in der Mathematik:

z.B.

eine Gruppe ist eine Menge im Objekten

$\mathbb{Z}$

die abgeschlossen ist bzgl. einer inneren Verknüpfung,

" $\cdot$ "

für welche ein assoziatives Gesetz gilt,

$$a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot c$$

die genau ein neutrales Element besitzt,

"0"

und die zu jedem Element genau ein Inverses hat.

" $-a$ "

((Bem.: gilt auch ein kommutatives Gesetz, $a+b=b+a$ nennt man die Gruppe abelsch))

$\rightarrow$ Gruppen haben große Bedeutung in Physik: Symmetrien!

$\mathbb{Q}$: Menge der rationellen Zahlen $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

Zusätzlich beim Teilen

wollen auch Gleichung $a \cdot x = b$ innerhalb der Menge lösen

$\rightarrow$ damit gibt es auch ein inverses Element bzgl.

der Multiplikation, nämlich a^{-1} mit $a \cdot a^{-1} = 1$.

$\mathbb{Q}$ ist also (abelsche) Gruppe bzgl. Addition und Multiplikation.

((Bem.: wenn man das Distributivgesetz gilt,

nennt man dies einen Körper;

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper))

Bem.: streng genommen sind keine rationale Zahl immer

durch eine ganze Klasse von $\frac{p}{q}$ dargestellt,

z.B. $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \dots$; wir wählen jeweils

geborene Brüche als Darstellung wählen

Die Addition von $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ führt auf endliche oder (alternativ) periodische Dezimalzahlen ($\leftarrow$ Basis s. Übung 7)

Bsp.: $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{1}{11} = 0,090909\dots = 0,0\overline{9}$

Bem.: Physik $\rightarrow$ Messwerte mit Fehler

z.B. bedeutet $x = 2,472(12)$

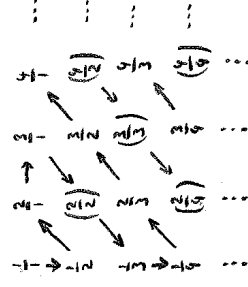
dass $x = 2,472 \pm 0,012$ ist

bzw. dass x mit 68% Wahrscheinlichkeit

im Intervall $2,460 \leq x \leq 2,484$ liegt.

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar (d.h. die rationalen Zahlen lassen sich durch nummerieren)

$\Rightarrow$ das heißt auch, dass $\mathbb{Q}$ nicht mehr Elemente als $\mathbb{N}$ hat.



$\leftarrow$ Schema zur Nummerierung von $\mathbb{Q}_{>0}$:

Pfeile folgen, doppelte (vergebene) Darstellungen übergehen

$\rightarrow r_1=1, r_2=\frac{1}{2}, r_3=\frac{2}{2}, r_4=\frac{1}{3}, r_5=\frac{2}{3}, \dots$

$\mathbb{Q}$ ist dann $\{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ ist ein angewandelter Körper, d.h. für jedes $x \in \mathbb{Q}$

gilt genau eine der Relationen $x > 0, x = 0, -x > 0$,

so dass $(x > 0, y > 0) \Rightarrow \begin{cases} x+y > 0 \\ x \cdot y > 0 \end{cases}$.

Rechen mit Relationen (Ungleichungen): (s. auch Übung 8)

$$\begin{aligned}
 x > y &\Leftrightarrow x - y > 0 & x > 0 &\Rightarrow x^{-1} > 0 \\
 x < 0 &\Leftrightarrow y > x & x < y \text{ und } y < z &\Rightarrow x < z \\
 x \leq y &\Leftrightarrow x < y \text{ oder } x = y & \text{(Ungleichungen dürfen addiert werden)} & \\
 x < y &\Leftrightarrow -x > -y & 0 < x < y &\Rightarrow x^{-1} > y^{-1}, \frac{1}{x} > \frac{1}{y}
 \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen $\mathbb{Q} \cup \{\text{unendliche Dezimalzahlen}\}$
 intuitiv: stopft die $\mathbb{Q}$ -Lücken auf Zahlengerade
 enthält π, e , Unrationale (d.h. kein von $x^2 = a$ etc.)

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein angeordneter Körper
 $\rightarrow$ es gelten alle bisherigen Rechenregeln wie für $\mathbb{Q}$.

Zahlen $x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}$ nennt man irrational

$\rightarrow$ warum reicht $\mathbb{Q}$ nicht aus?

gibt es zum Beispiel rationale Zahlen?

$\rightarrow$ Ja $\mathbb{Q}$ (sogar "viel mehr" als in $\mathbb{Q}$ sind, vgl. Übung 5)

Behauptung: für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $p \in \mathbb{N}$ Primzahl ist $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: (durch Widerspruch)

$$\begin{aligned}
 \text{Annahme: } \sqrt[n]{p} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} &\Leftrightarrow p b^n = a^n \\
 &\quad \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases} \\
 a \neq 0, a \neq 1 &\text{ denn } p \geq 2
 \end{aligned}$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.): $a, b > 0$

Fall 1 ($b \neq 1$): $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Fund.Satz: a, b haben eindeutige Primfaktorzerlegung

$p b^n, a^n$ haben identische Primfaktorzerlegung

$p b^n, a^n$ können aber nicht gleichberechtigt p enthalten.

$\rightarrow$ Widerspruch zur Annahme!

Fall 2 ($b=1$): $p = a^n$

Fund.Satz: beide Seiten haben identische Primfaktorzerlegung
 aber a^n hat mindestens 2 Faktoren $\Rightarrow$ Widerspruch!

$\rightarrow$ da also die Annahme $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{Q}$ zum Widerspruch führt,
 muss $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$ gelten

((Bem.: Der Widerspruchsbeweis ist eine sehr nützliche Methode; vgl. Ü5))

Bezeichnungen: Intervalle seien $a < b$ in $\mathbb{R}$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \text{ analog } [a, b[\text{ halboffenes Interv.}$$

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ offenes Interv.}$$

benutzen oft auch das Symbol ∞ (unendlich),

wobei ∞ "größer als jede Zahl" ist.

$\Rightarrow a < \infty$ bedeutet also, dass a endlich ist.

$$\begin{aligned}
 \text{z.B.: }]-\infty, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \text{ etc.} \\
]-\infty, \infty[&= \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{R}$ "vollständig", d.h. die reellen Zahlen stellen den Zahlenstrahl "lückenlos" dar.

((Bem.: mathematisch benötigt man das Supremaximum, um diese Lückenhaftigkeit zu zeigen; hier sind wir mit der Darstellung von $\mathbb{R}$ als Dezimalzahlen zufrieden.))

• diese Lückenhaftigkeit ermöglicht dann die Analysis: Differenzieren etc., s. später

• $\mathbb{Q}$ liegt "dünn" in $\mathbb{R}$, d.h. es geben (noch so kleine)

Intervalle $]a, b[$ gibt es unendlich viele rationale Zahlen!

Beweis: s. Übung 6

$\rightarrow$ die "Lücken" auf der Zahlengerade sind unendlich klein.

((Bem.: zwischen zwei rationalen Zahlen liegt eine (sogar unendlich viele) weitere, denn $p, q \in \mathbb{Q}, p < q \Rightarrow p < \frac{p+q}{2} < q$))

Warten oft vorkommende Bezeichnungen:

$$\bullet R^+ = \mathbb{R}_+ :=]0, \infty[; R^- = \mathbb{R}_- :=]-\infty, 0[$$

$$R_0^+ := [0, \infty[; R_0^- :=]-\infty, 0]$$

$$\bullet \text{ Betrag: } |a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

es gelten eine Reihe von Eigenschaften, wie z.B. die

Dreiecksungleichungen

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

(vgl. Übung 8)

$$\bullet \text{ Summenzeichen } \sum_{i=1}^n x_i := x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\bullet \text{ Produktzeichen } \prod_{i=1}^n x_i := x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

$$\text{Fakultät} \quad 0! := 1, \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$$

$$\bullet \text{ Binomialkoeffizient } \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Erinnerung: Rechenregeln für Potenzen

$$\text{schreibe } b^n := \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_n, \text{ n-mal } b, \text{ n-mal "Exponent"}$$

$$\Rightarrow b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

$$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\text{definiere } b^0 := 1, \quad b^{-n} := \frac{1}{b^n}$$

dann gelten diese Rechenregeln anschaulich für alle $n, m \in \mathbb{Z}$

(später: mit Abstraktion)

$$\text{Es gilt } \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad (\leftarrow \text{für Übung 96})$$

$$\left(\text{denn: } \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{k!} \frac{n!}{(n-k+1)!} + \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k! (n-k+1)!} \Leftrightarrow k + (n-k+1) = n+1$$

eine weitere wichtige (und nützliche) Beweismethode:

Vollständige Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und sei $A(n)$ eine Aussage, die für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ definiert ist.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ richtig, falls man beweisen kann, dass

(a) Induktionsanfang: $A(n_0)$ ist richtig

(b) Aus der Induktionsannahme, dass $A(n)$ für ein $n \geq n_0$ richtig ist, folgt die Induktionsbehauptung, dass $A(n+1)$ richtig ist

Bsp: Es gilt $n! > 2^n$ für alle $n \geq n_0 = 4$, denn

$$(a) 4! = 24 > 16 = 2^4 \quad \checkmark$$

$$(b) \text{ gelte } n! > 2^n$$

$$\Rightarrow (n+1)! = (n+1) n! > (n+1) 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Bsp (Bernoulli-Ungl.) $(1+h)^n \geq 1+n \cdot h$ für $h \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$(a) n=0: (1+h)^0 = 1 = 1+0 \quad \checkmark$$

$$(b) \text{ gelte } (1+h)^n \geq 1+n \cdot h$$

$$\Rightarrow (1+h)^{n+1} = (1+h)^n (1+h) \geq (1+n \cdot h)(1+h) = 1+n \cdot h + h + n \cdot h^2 \geq 1+(n+1)h$$

$$\text{Bsp (endliche geometrische Reihe)} \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Beweis in

$$\text{Bsp (binomische Formel)} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Übung 9

Bsp Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2 .

$$(a) n=1: 1 = 1^2 \quad \checkmark$$

$$(b) \text{ gelte } 1+3+\dots+(2n-1) = n^2$$

$$\Rightarrow 1+3+\dots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

1.4 Folgen und Reihen

≈ [Hofft, Kap. 3]

wichtig für Begriffe und Beweise der Grenzwerte

grundlegende Bedeutung in Physik

Folge: unendliche, durch numerierte Menge von Zahlen

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch ein Bildungsgesetz

- Bsp: (F1) $1, 2, 3, 4, \dots = (n)_{n \in \mathbb{N}}$: Folge der nat. Zahlen
 (F2) $1, -1, 1, -1, \dots = (-1)^n$: eine "alternierende" Folge
 (F3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots = (\frac{1}{2})^n$: Folge der reinen Fakultäten
 (F4) $9, 9^2, 9^3, 9^4, \dots = (9^n)$: die "geometrische" Folge
 (im Folgenden n weglassen) $\rightarrow$ z.B. Zinseszins

meist interessant aus drei Eigenschaften von Folgen:

Beschränktheit, Monotonie, Konvergenz!

nützliche logische Symbole:
 $\exists$ "es existiert ein"
 $\forall$ "es existiert genau ein"
 $\forall$ "für alle"

- (a_n) ist nach oben beschränkt $\Leftrightarrow \exists B: a_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (a_n) ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow \exists A: a_n \geq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 Bsp: (F1) $A=1$ (F2) $A=-1, B=1$ (F3) $A=0, B=1$
 (F4) A, B abhängig von $|q|$; z.B. $0 < q < 1: A=0, B=q$

(a_n) ist monoton steigend $\Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 streng mon. steigend $<$
 monoton fallend $>$
 streng mon. fallend $>$

- Bsp: (F1) streng monoton steigend (F2) nicht monoton
 (F3) streng monoton fallend (F4) alt. von 191

Nachfolgende haben Häufungspunkte: beliebig viele Folgenglieder a_n häufen sich um einen Wert a

Bsp: (F1) kein H.P. (F2) zwei H.P.: ± 1 (F3) ein H.P.: 0
 (Ist hier: jede nach oben und unten beschr. Folge hat mind. einen H.P.)
 Falls eine Folge nur einen H.P. a hat, kann deren Grenzwert sein:

(a_n) ist konvergent, d.h. $\exists a: \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \leftarrow$ oft auch:
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

N_ε bzw. $N(\varepsilon)$: kann je nach ε eine nat. Zahl N bestimmen

Bsp: (F3) ist konvergent, und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$

denn: sei $\varepsilon > 0$, dann ist $|a_n - 0| = \frac{1}{n!} < \varepsilon \quad \forall n > [\frac{1}{\varepsilon}]$
 ((haben hier $N_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}]$: größte ganze Zahl $\leq \frac{1}{\varepsilon}$; $\text{INT}(\frac{1}{\varepsilon})$)

Eine Folge heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.
 In der Physik sind unendliche Summen, sog. Reihen, wichtig,
 z.B. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\rightarrow$ die Teilsummen $S_m = \sum_{n=1}^m a_n, m \in \mathbb{N}$
 können wir als Folge $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ auffassen,
 um so Grenzwert bzw. Konvergenz zu behandeln.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = s < \infty$

Bsp: Die Reihe aus den Teilsummen von (F1) der Reihe
 $S_m = (\sum_{n=1}^m n)_{m \in \mathbb{N}} = 1, 3, 6, 10, 15, \dots$ ist divergent
 ("Grenzwert")

wichtige Reimen: Potenzreihen $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Bsp: geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$
 deren Teilreihen $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (Übung 9a)

so daß der Lm für $|x| < 1$ aufzufassen ist:
 die Reihe konvergiert also, und
 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$ (und divergiert für $|x| > 1$)

Bsp: harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$
 (eine Divergenz...)
 die Folge der Teilreihen ist unbeschränkt,
 denn $S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n})$
 $> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$
 also divergiert die Reihe.

Um zu entscheiden, ob eine gegebene Reihe konvergiert, hilft oft das
 Majorantenkriterium: wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so daß $\forall k \geq N$ $|a_k| \leq b_k$ gilt,
 und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent,
 dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Bsp: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$
 Beweis: wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 2|x|$.
 für $k \geq N$ gilt dann:
 $|\frac{x^k}{k!}| = |\frac{x^N}{N!} \cdot \frac{1}{N!} \dots \frac{1}{k!}| \leq \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-N} = \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^k$
 (k-N) Faktoren
 and die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert
 (= geometrische Reihe mit $x = \frac{1}{2}$)
 und wird oft als "Majorante gewählt"
 man nennt $e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ die Exponential-Reihe
 (und die Zahl e ist irrational & Unbegrenztbar: s. [Hofft 3.57])
 $e \approx 2,718 \dots$

2. Funktionen

sind Abbildungen, z.B. $f: A \rightarrow B$, $A, B \subset \mathbb{R}$ mit Vorschrift $x \mapsto f(x)$
 → untersuche z.B. experimentell die Abhängigkeit zweier
 physikalischer Größen: notiere eine Messgröße $f(x)$
 (z.B. Pendelschlag) in Abhängigkeit der Variable x
 (z.B. Zeit; skizze dann meist $f(t)$).

Die Menge aller Punkte $(x, f(x))$ der xy-Ebene heißt dem Graph von f
 → z.B. für Parabel: 

Somit gibt es alle (einfache / einfachen / bijektive) wie bei Abbildungen
 → anschaulich: jede Parabel der x-Achse
 schneidet Graph höchstens einmal

Von den Folgen (s. Kap. 1.4) übertragen wir Monotonie und Beschränktheit, z.B.
 $y = f(x)$ monoton steigend in $[a, b] \Leftrightarrow (x_1, x_2 \in [a, b]: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
 monoton fallend

Bsp $y(x) = ax + b$ ist für $a > 0$ monoton steigend
 → erstensblauweise kommt man in der Physik (= Natur ?!)
 mit sehr wenigen grundlegenden Funktionen aus.
 (Die wichtigsten wollen wir nun erschauen)

Polynome: $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m = \sum_{k=0}^m a_k x^k$
 "Grad" des Polynoms
 Konstante: $m=0$; Gerade: $m=1$; Parabel: $m=2$; ...

Rationale Funktionen: $y(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ mit Polynomen $P_m(x), Q_n(x)$
 Bsp: $q(x) = \frac{1}{x^2-1}$
 ! Vorsicht: kann Null werden!
 → siehe x aus Definitionsbereich ausschließen
 (Bem.: kann manchmal $\frac{P}{Q}$ durch Kürzen vereinfachen: Polynomdivision)

2.1 Exponentialfunktion (die wichtige Teil d. Physik)

definieren wir durch $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(dass die Reihe $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert, war im Kap. 1.4 gezeigt worden)

wichtige Eigenschaften:

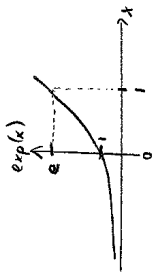
$$\exp(0) = 1 \quad (\text{klar aus Def.})$$

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y) \quad (\leftarrow \text{s. Übung 12})$$

$$\Rightarrow \exp(x) > 0$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

Funktionsgraph:



2.2 Stetigkeit

"die Natur macht keine Sprünge"

$\rightarrow$ der Graph einer "stetigen Funktion" macht keine Sprünge

($\leftarrow f(x)$ stetig bei x_0)

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

anschaulich: Punkte in der Nachbarschaft von x_0

werden auf Bildpunkte in der Nachbarschaft von $f(x_0)$ abgebildet.

Bsp: $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^+$ (und auf $\mathbb{R}^-$)

zeige Stetigkeit an der Stelle $x_0 > 0$:

$$\text{für } x \geq \frac{x_0}{2} \text{ gilt } \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{x \cdot x_0} \right| \leq \frac{2}{x_0^2} |x - x_0|$$

so dass $\forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta$ gilt: $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \frac{2}{x_0^2} \delta$

also ist mit $\delta_\varepsilon := \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2} \varepsilon\right)$ die obige Stetigkeitsbedingung erfüllt.

Bem.: Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}$, $\exp(x)$ ebenso.

(s. z.B. Übung 15 für Beweis)

- mit stetigen Funktionen kann man "rechnen":
Summe / Differenz / Produkt / Quotient stetiger Funktionen sind auch stetig
- insbesondere sind also rationale Funktionen auch stetig

Für stetige Funktionen gilt das

Zwischenwertsatz: (ohne Beweis; anschaulich klar)

Ist f stetig im Intervall I und sind $a, b \in I$, dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Gilt insbesondere $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$,

so hat f zwischen a und b eine (oder 3, 5, ...) Nullstelle.

Bsp: hat die Gleichung $\exp(x) = x+2$ eine Lösung $x_0 \in [0, 2]$?

$\rightarrow$ ja; für $f(x) := \exp(x) - x - 2$ gilt $f(0) = 1 - 0 - 2 = -1 < 0$

und $f(2) = \exp(2) - 4 > 0$ ($\exp(2) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e \cdot e \approx (2.71)^2$)

$\Rightarrow$ da $\exp$ und $x+2$ stetig, hat f zwischen 0 und 2 eine Nullstelle.

2.3 Symmetrien

wichtig in Naturwissenschaften: ein "symmetrisches" Problem hat meist eine symmetrische Lösung (z.B. Kristalle, ...)

Funktionen können auch Symmetrie-Eigenschaften haben, z.B.

Spiegelsymmetrie (an y-Achse):

$$f(x) \text{ gerade} \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \quad \text{Bsp: } x^2; |x|$$

$$f(x) \text{ ungerade} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad \text{Bsp: } x^3; \frac{1}{x}$$

Jede Funktion kann als $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ geschrieben werden, wobei f_g gerade/ungerade ist ($\leftarrow$ s. Übung 14b)

wie auch schon bei den Abbildungen, kann man für

injektive Funktionen die jeweilige Umkehrfunktion definieren:

- Abbildung der BG. $y = f(x)$ nach x gibt $x = f^{-1}(y) = g(y)$

((Bem: Definitionsbereich und Wertebereich tauschen die Rollen:

$$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A; f^{-1}(f(x)) = x \text{ wie z.B. Kap 1.2})$$

- nach Aufheben wird die unabhängige Variable y meist wieder x

genannt:

→ in Funktionsgraphen ergibt

sich die Umkehrfunktion f^{-1}

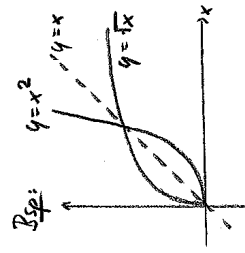
erfolgt durch Spiegelung

won f an der Geraden $y=x$.

$$((\text{klar: } (x, f(x)) \rightarrow (f(x), x)))$$

- erhalten durch Spiegelung / Umkehrung aller Einträge (injektiv)

Funktionen also viele weitere.



2.4 Logarithmus, allgemeine Potenzen

→ Exponentialfunktion hat eine so hohe Bedeutung, dass selbst variable Funktionen eigene Namen bekommen (hier: Log., Potenz; Übq: hyperbol.; später trig.).

$$(\text{vgl. Kap 2.1: } \exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+)$$

$$x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

streng monoton steigend $\Rightarrow$ injektiv

stetig

$$\exp(x \rightarrow -\infty) \rightarrow 0, \exp(x \rightarrow +\infty) \rightarrow \infty$$

$$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \Rightarrow \text{surjektiv (wegen Zwischenwertsatz)}$$

es existiert also eine Umkehrfkt. $\exp^{-1}(x)$

$$\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

"Logarithmus naturalis"

$$x \mapsto \ln(x) := \exp^{-1}(x)$$

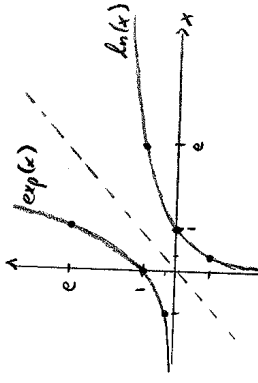
$$\text{also: } \exp(\ln(x)) = x, \ln(\exp(x)) = x$$

$$x \in \mathbb{R}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

$$(\text{denn: } \ln(x \cdot y) = \ln(\exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y))) = \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) = \ln(x) + \ln(y))$$

↳ Schreibweise: oft $\ln x$ statt $\ln(x)$



Funktionsgraph:

durch Spiegelung

an Umkehrfunktion

$$\exp(0) = 1 \Rightarrow \ln(1) = 0$$

$$\exp(1) = e \Rightarrow \ln(e) = 1$$

$$\exp(-1) = \frac{1}{\exp(1)} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

Man kann nun allgemeine Potenzen definieren (vgl. Kap 1.3: $b^n, n \in \mathbb{N}$)

Für $b \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$ sei $b^x := \exp(x \cdot \ln b)$ die x -te Potenz von b

↳ Exponent

Basis

Eigenschaften der Potenz: ($a, b \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$)

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y} = b^{x+y}$$

$$(\text{und } b^0 = 1 \text{ wegen } \exp(0) = 1)$$

$$(b^x)^y = b^{x \cdot y} = b^{x \cdot y}$$

$$(\text{Verschieb: } b^{(x^y)} \neq (b^x)^y)$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$b^{-x} = \frac{1}{b^x}$$

(folgen alle aus Def. und exp-Eigenschaften)

Bem. - für $x \in \mathbb{N}$ also alles konsistent mit b^n aus Kap. 1.3

- für $n \in \mathbb{N}$: $b^n = \prod_{k=1}^n b$, $b^0 = 1$, $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$\Rightarrow (b^{\frac{1}{n}})^n = b$, d.h. $\sqrt[n]{b} := b^{\frac{1}{n}}$ ist diejenige positive Zahl, die n -mal mit sich selbst multipliziert b ergibt

- beachte $b \in \mathbb{R}^+$ in Potenz-Def!

Potenzgesetze für $b > 0$ nicht gültig, z.B. $[(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1 \neq (-1)^{\frac{1}{2}} = -1$

- während $b^{\frac{1}{n}}$ immer eindeutig definiert ist, kann die Gg. $b = x^n$ mehrere Lsn. haben

Bsp: $4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$

- b^x wird oft Exponentialfunktion zur Basis b genannt

Enige Folgerungen: ($x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^+$)

$e^x = \exp(x)$ Bemerkung: $e^x = \exp(x \cdot \frac{1}{1} e) = \exp(x)$

$[\exp(x)]^y = \exp(xy)$ Bemerkung: $[\exp(x)]^y = (e^x)^y = e^{xy} = \exp(xy)$

$\ln(x^x) = x \ln(x)$ Bemerkung: $\ln(x^x) = \ln(\exp(x \ln(x))) = x \cdot \ln(x)$

Für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sei $\log_b: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \log_b(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

der Logarithmus zur Basis b

Speziellfälle: $\log_2(x) := \log_{10}(x)$ "Logarithmus decimale"
 $\log_b(x) := \log_2(x)$ "Logarithmus dualis" ($b \in \{2, \text{binär}\}$)
 $\ln(x) := \log_e(x)$ "Logarithmus naturalis" s.o.

(Bem.: In der Literatur wird $\log(x)$ manchmal für $\ln(x)$, manchmal aber auch für $\log_2(x)$ benutzt))

Bsp $\log_7(49) = \log_7(7^2) = \frac{\ln(7^2)}{\ln(7)} = \frac{2 \cdot \ln(7)}{\ln(7)} = 2$

Bsp $\log_{143}(143) = \frac{\ln(143)}{\ln(143)} = 1$

$\rightarrow$ (s. auch Übung 17, 18, 19)

3. Differentialrechnung (in $\mathbb{R}$)

$\approx$ Elementare Physik: 17. Jh., Leibniz + Newton

erste Formulierung der Gesetze, die dm beobachteten

physikalischen Phänomenen zugrunde liegen

z.B. Mechanik $\Leftrightarrow$ Newton-Gleichungen

Elektrodynamik $\Leftrightarrow$ Maxwell-Gleichungen

Quantenmechanik $\Leftrightarrow$ Schrödinger-Gleichung

Gravitation $\Leftrightarrow$ Einsteins Gleichungen

Lösung solcher Gln.: brauchen Analysis, insbesondere

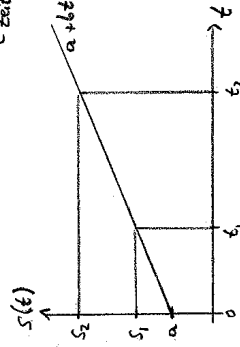
Differential- und Integralrechnung!

$\Rightarrow$ "Werkzeugkasten" des Physikers!

3.1 Die Ableitung

Bsp gleichförmige Bewegung eines Partikels auf einer Geraden:

Zurückgelegter Weg $s(t) = a + b \cdot t$
 Zeit



Position zum Zeitpunkt $t=0$ ist $s(0) = a$

wollen Geschwindigkeit wissen: $v = \frac{\text{Wegänderung}}{\text{Zeitintervall}} = \frac{s(t) - a}{t} = b$

brauchen also Steigung des Funktionsgraphen

haben auf ein und dasselbe Zeitintervall nehmen können, z.B. $t_2 - t_1$:

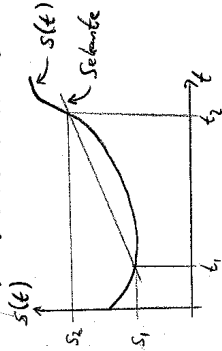
$v = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = b$ (gleiches Ergebnis, da Gerade)

allgemein: $v = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$

(zur $t \rightarrow x$) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ heißt Differenzquotient

Bsp allgemeine glockige Bewegung

mit zeitlich variabler Geschwindigkeit: beliebiges $s(t)$



Differenzquotient gibt hier

Steigung der Sekante

durch $(t_1, s(t_1))$ und $(t_2, s(t_2))$ an

bestimmen hier die Durchschnittsgeschwindigkeit während des Zeitintervalls $\Delta t = t_2 - t_1$: $v_{\text{mittel}} = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$

→ Physikalisch am wichtigsten ist oft die momentangeschwindigkeit.

Dies ergibt sich in Grenzwertung $t_1 \rightarrow t_2$,

bei einer stetigen Funktion geht dann aus $s(t_1) \rightarrow s(t_2)$, und die Sekante → Tangente

$$v(t_2) = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t_2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

→ diesen Grenzwert eines Quotienten nennt

$$\text{Differentialquotient} \quad \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

verschiedene Schreibweisen:

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0} = f'(t_0) = \left(\frac{d}{dt} f(t) \right) \Big|_{t_0} = \left(\frac{df}{dt} \right)_{t_0} = \frac{df(t_0)}{dt} = \frac{d}{dt} f(t_0)$$

eine Physiker-Eigenschaft:

$$\text{falls unabh. Variable Zeit ist: } \dot{f}(t_0) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0}$$

Der Differentialquotient als Grenzwert existiert natürlich nicht bei allen Funktionen an allen Stellen; dies sollte man wissen:

$f(x)$ heißt differenzierbar bei x_0

⇔ der Grenzwert des Differenzialquotienten existiert

→ dazu müssen die Grenzwerte "von oben" und "von unten" existieren und übereinstimmen

mathematisch präzise:

eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt differenzierbar an Ort $x_0 \in A$

⇔ $\exists$ eine Zahl $\frac{df}{dx}(x_0) \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ so dass}$$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{df}{dx}(x_0) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta$$

↑ "Ablesung" von f am Ort x_0

((anschaulich: Funktionsgraph hat keine "Ecken und Kanten"))

Bsp $f(x) = |x|$ (Beweis sm.)

ist überall stetig, aber bei $x=0$ nicht differenzierbar,

$$\text{weil } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = +1, \text{ und } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1 \text{ ist.}$$

Bem: Die Funktion heißt differenzierbar auf $C \subset A$, falls sie an jedem Ort $x_0 \in C$ differenzierbar ist.

Die Funktion heißt stetig differenzierbar auf C , falls die Ableitung $\frac{df}{dx}(x_0)$ an jedem Ort $x_0 \in C$ stetig ist.

Nicht alle Ableitungen sind rekursiv definiert:

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) := \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}(x) \right) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x)$$

alternative Schreibweisen

$$\text{Bsp } \frac{d^2 f}{dx^2}(x) := \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx}(x) \right) \quad \text{bzw. } f''(x) \quad \text{bzw. } \ddot{f}(x)$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3}(x) := \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 f}{dx^2}(x) \right) \quad \text{bzw. } f'''(x) \quad \text{bzw. } \dddot{f}(x)$$

$$\vdots \quad \text{(n-te Ableitung)} \quad \text{bzw. } f^{(n)}(x) \quad \text{bzw. } f^{(n)}(x)$$

* Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, $\forall x \in I$ $\delta := \varepsilon$. $\Rightarrow \forall x$ mit $|x| < \delta$:

(Stetigkeit bei $x_0 = 0$)

$$|f(x) - f(x_0)| = |x| < \varepsilon$$

Bsp Gerade $a+bx$ ist diff'bar auf $\mathbb{R}$,
mit erster Ableitung $= f'(x) = b = \text{"Steigung"}$

Also: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := a+bx$
 $\subset \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ (beliebig oder fest)

Stetigkeit war in Übung 15 gezeigt worden.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := 1$. $\Rightarrow \forall x$ mit $0 < |x-x_0| < 1$:

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{a+b(x-x_0)}{x-x_0} - b \right| = \left| \frac{b(x-x_0)}{x-x_0} - b \right| = 0 < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, ist $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ diff'bar.

Bem Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

(klar aus Def.: falls $|x-x_0| \rightarrow 0$, dann auch

$$|f(x)-f(x_0)| = \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot |x-x_0| \right| \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0)$$

also: Stetigkeit $\nRightarrow$ Diff'barkeit (z.Bsp $|x|$ oben)

Die Ableitung (Steigung) an Extrema der Fkt. ist Null:

Sei $f: A \rightarrow B$ diff'bar am Ort $x_0 \in A$

und x_0 sei ein (lokales oder globales) Maximum oder Minimum von f .

Dann gilt $f'(x_0) = 0$

Widerspruchsbeweis: Angenommen, $f'(x_0) \neq 0$.

Wähle $\varepsilon := \frac{|f'(x_0)|}{2} (> 0)$. da f diff'bar bei x_0 , $\exists \delta > 0$

mit $\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \quad \forall x$ mit $0 < |x-x_0| < \delta$.

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < f'(x_0) + \varepsilon = f'(x_0) + \frac{|f'(x_0)|}{2} \quad (*)$$

$$\text{und} \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > f'(x_0) - \varepsilon = f'(x_0) - \frac{|f'(x_0)|}{2} \quad (**)$$

Falls x_0 Min, dann $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ für $x > x_0 \Rightarrow f'(x_0) > 0$
 ≤ 0 für $x < x_0 \Rightarrow f'(x_0) < 0$

Falls x_0 Max analog; Also ist Annahme $f'(x_0) \neq 0$ falsch!

3.2 Ableiten als Handwerksk

$\hookrightarrow$ aus der Def. der Ableitung kann man allgemeine Regeln herleiten; am besten alle ableiten, und in Tabelle sammeln...

Als erprobte Beispiele kann man sich die

Ableitungen komplexer Funktionen systematisch berechnen:

Die Funktionen f, g seien beide am Ort $x \in \mathbb{R}$ diff'bar.

$\Rightarrow$ Dann sind auch $f+g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0$) am Ort x diff'bar, und es gilt:

$$\text{Summenregel} \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$\text{Produktregel} \quad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\text{Quotientenregel} \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Die Funktion g sei am Ort x und die Funktion f am Ort $g(x)$ diff'bar $\Rightarrow$ Dann ist auch $f \circ g$ am Ort x diff'bar, und es gilt:

$$\text{Kettenregel} \quad [f \circ g](x)' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(vgl. Ü 23)

$$(\text{Bem.} \quad \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{dg(x)}{dx} \cdot \frac{d}{dg(x)} f(g(x)) = g'(x) \cdot f'(g(x)) \quad \forall)$$

$$\text{Bsp 1:} \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (x \neq 0 \text{ falls } n < 0)$$

Beweis: • für $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion (Induktionsanfang, S. 26)

Ind. Anfang: für $n=1$: $(x^1)' = x' = 1 = 1 \cdot x^0$ ✓

Ind. Schritt: $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1}$
(Produktregel) $= (n+1) x^n$ ✓

• für $n=0$: $(x^0)' = 1' = 0$ ✓ (Ableitung)

• für $n < 0$: $(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}} \right)' = \frac{0 \cdot x^{-n} - 1 \cdot (x^{-n})'}{x^{-2n}} = \frac{-(-n) x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n x^{n-1}$ ✓

Bsp 2: Polynom $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ diff'bar,

und es gilt $P_n'(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$

Beweis: Summen- + Produktregel, und Bsp 1

Bsp 3: rationale Fkt. $R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$ (P, Q Polynome)

ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich (also!) diff'bar,

und es gilt $R'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}$

Beweis: Quotientenregel, und Bsp 2

(Bem: $\Rightarrow P(x)$ und $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sind auf ihrem gesamten Def.-bereich stetig (dies nur in Kap. 2.2, S. 19, dann, nur behauptet wurde), und beliebig oft (stetig) diff'bar.))

Für Potenzreihen, d.h. "unendliche Polynome" gilt:

Sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ und $|x| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \cdot b_{k+1}}{b_k}$ mit $|a_k| \leq b_k$.

(d.h. die Potenzreihe konvergiert)

$\Rightarrow$ Dann ist $f(x)$ am Ort x (beliebig oft stetig) diff'bar,

und zwar gliedweise, d.h.

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{1}{m!} (x^m)' = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{m}{m!} x^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{x^k}{k!} \quad \left(=: \sum_{k=0}^{\infty} a_k' \frac{x^k}{k!} \right)$$

$k := m-1$, $\Leftrightarrow m = k+1$

Insbesondere ist die Potenzreihe $f'(x)$ wieder konvergent.

(Beweis: in Analysis-Vorlesung ... hier: plausibel?!))

Bsp $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, d.h. $a_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow \exp'(x) = \exp(x)$

$\exp'(cx) = \exp(cx) \cdot c$

d.h. $f(x) = f(x) \cdot e^{cx}$

genügt der G.G. $f' = c \cdot f$ (Bsp für "Differentialgleich.")

(war schon in Ü 24 bewiesen)

eine weitere nützliche Ableitungsregel:

Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f: A \rightarrow B$ bijektiv (d.h. f^{-1} existiert)

und diff'bar am Ort $y \in A$ mit $f'(y) \neq 0$

$\Rightarrow$ Dann ist $f^{-1}: B \rightarrow A$ am Ort $x := f(y) \in B$ diff'bar

$$\text{mit } [f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beweis: die G.G. $f(f^{-1}(x)) = x$ nach x ableiten:

$$[f(f^{-1}(x))] = f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = x' = 1$$

da nach Voraussetzung $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, folgt Behauptung.

$$\text{Bsp } \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Bsp } \operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \left[\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}, \tanh' = \frac{\sinh' \cosh - \sinh \cosh'}{\cosh^2} = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \right] \\ \sinh = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \sinh' = \cosh \\ \cosh = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \cosh' = \sinh \end{aligned}$$

$\rightarrow$ analog zum Zwiischensatz für stetige Funktionen (vgl. Kap. 2.2)

haben auch differenzierbare Funktionen entsprechende Eigenschaften:

3.3 Mittelwertsatz und Regel von de l'Hospital

Seien zwei Funktionen $f, g: A \rightarrow B$ auf einem Intervall $[a, b] \subset A$ diff'bar.

$\Rightarrow$ Dann $\exists$ (mind. ein) $\xi \in]a, b[$, so dass

$$[f(b) - f(a)] g'(\xi) = [g(b) - g(a)] f'(\xi)$$

allgemeine Mittelwertsatz

Beweis: wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) := [f(x) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

und müssen zeigen: $h'(x) = 0$ irgendwo zwischen a, b

es gilt (Summenregel): h diff'bar in $[a, b]$

$$\text{und } h(a) = [f(a) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(a)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) = h(a)$$

$\Rightarrow$ also ist explizit $h(x)$ konstant auf $[a, b]$

und somit $h'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$

oder $h(x)$ besitzt (mind. ein) Extremum, z.B. bei $x_0 \in]a, b[$

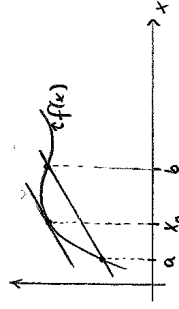
und somit $h'(x_0) = 0$

Setzt man $g(x) = x$ in den allg. Mittelwertsatz ein, folgt aber

Mittelwertsatz: Sei $f: A \rightarrow B$ auf $[a, b] \subset A$ diff'bar.

$\Rightarrow$ Dann $\exists$ (mind. ein) $x_0 \in]a, b[$, so dass $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$

anschaulich:



(die Steigung der
Sektante wird zur
Tangente und angenommen
auf (a, b) und angenommen)

enge Folgerungen: (Sei $f, g: A \rightarrow B$ diff'bar auf $[a, b] \subset A$)

• falls $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ ist monoton wachsend auf $[a, b]$

$>$ streng mon. $\nearrow$
 $\leq$ monoton fallend
 $<$ streng monoton $\searrow$
 $=$ $f(x) = \text{const.}$
 $= g'(x)$ $f(x) = g(x) + \text{const.}$

(Bew.: " $>$ ": Sei $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$.

dann existiert laut Mittelwertsatz ein $\xi \in]x_1, x_2[$

$$\text{mit } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0 \quad \text{g.d.}$$

" $>$, $<$ ": genauso

" $=$ ": folgt aus " $>$ " und " $<$ "

" $=$ ": $[f(x) - g(x)]' = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = \text{const.}$

Anwendung des Mittelwertsatzes: Grenzwerte wie $\frac{0}{0}$, " $\frac{\infty}{\infty}$ " ausrechnen

Sei $f, g: A \rightarrow B$ auf $[a, b] \subset A$ diff'bar

und $f(a) = 0, g(a) = 0, g'(x) \neq 0$ auf $]a, b[$.

$\Rightarrow$ Dann gilt $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ Regel von de l'Hospital

(Bem.: Wenn der Grenzwert existiert, beide Limes "von oben";
Grenzwerte $\frac{\infty}{\infty}$ genauso: nehme $\frac{1/f(x)}{1/g(x)}$)

Bew.: laut allg. Mittelwertsatz $\exists$ zu jedem $x \in]a, b[$ ein $x_0 \in]a, x[$

so dass $[f(x) - f(a)]g'(x_0) = [g(x) - g(a)]f'(x_0)$

wegen $f(a) = g(a) = 0 \Leftrightarrow f(x)g'(x_0) = g(x)f'(x_0)$

wegen $g'(x) \neq 0$ auf $]a, b[$ muss $g(x)$ streng mon. wachsend oder fallend

sein (da $g(a) = 0$) ist $g(x) \neq 0$ auf $]a, b[$

$\Rightarrow$ dürfen dividieren: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

da $x_0 \rightarrow a$ für $x \rightarrow a$ folgt die Behauptung qed

Bsp $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

(daraus folgt $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^1 = e$)

$\Leftrightarrow$ die Folge $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen e (1))

Auch Grenzwerte wie " $\frac{\infty}{\infty}$ " oder " $0 \cdot \infty$ " etc. per de l'Hospital:

$$\text{Sei } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{((dann: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \stackrel{(\text{de l'Hop.})}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\frac{1}{g})'}{(\frac{1}{f})'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\frac{1}{g^2} g'}{-\frac{1}{f^2} f'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^2}{g^2} \cdot \frac{f'}{g'} \cdot \frac{g}{f} \quad))$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f'}{g'} \cdot \frac{g}{f} \quad))$$

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Bsp} \quad (a > 0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^a \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^{-a}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{-a x^{-a-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^a}{a} = 0$$

$$0^\circ \quad \text{Bsp} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^+ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln(x)} \stackrel{\text{de l'Hop.}}{=} e^0 = 1$$

Auch das " ∞ " in der Regel von de l'Hospital auf ∞ sem:

$$\text{Sei entweder } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

$$\text{oder } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow \infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \text{dann gilt wieder } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(de l'Hop. + Kettenregel)

$$\text{((dann: setze } y := \frac{1}{x}, \text{ dann } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} \stackrel{(\text{de l'Hop.})}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{y}) \cdot (-\frac{1}{y^2})}{g'(\frac{1}{y}) \cdot (-\frac{1}{y^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad))$$

Bsp in den Übungen (4286) wurde gezeigt, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^a} \rightarrow \infty \text{ für alle } a > 0$$

$$\text{((z.B. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} \rightarrow \infty \quad))$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^a} \rightarrow 0 \text{ für alle } a > 0$$

$$\text{((z.B. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0 \quad))$$

4. Integralrechnung in $\mathbb{R}$ [s. Skript S.6.1]

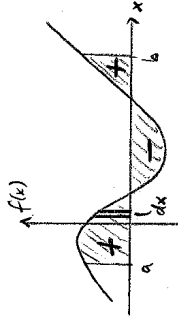
↳ Für alle zentralen Begriffe (Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit) gibt es jeweils eine "strenge" (ε-δ-) Definition

sonne eine geometrische Veranschaulichung;

bis (4.5.2) beides gemacht;

bis (I) nur geometrisch-veranschaulicht

4.1 Das bestimmte Integral



die so gezählte Fläche

zwischen Funktionsgraph und

$[a, b]$ auf x-Achse heißt

(bestimmtes) Integral

$$\left(\text{Fläche} \right)_{\text{zw. } a, b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k) =: \int_a^b f(x) dx$$

Bem.: x ist hier wieder ein "Laufindex", wie bei Summe $(\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{m=1}^n x_m = \dots)$

$$\text{also } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b dy f(y) = \int_a^b d\xi f(\xi) = \dots$$

Bem.: für welche Funktionen ist eine sinnvolle Definition solcher Flächen möglich?

((siehe mit für z.B. (Dirichlet-Fkt) $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, dann Graph lässt sich nicht zeichnen; $\rightarrow$ Fläche ??))

$\rightarrow$ sicher nur für stetige Funktionen

((siehe "Stückweise stetige", wie z.B.))

(höchstens endlich viele Punkte unstetig, aber beschränkt)

$\rightarrow$ ab jetzt nur noch solche $f(x)$ betrachten!

(Vergl. in Analysis-Vorl.: Riemann-, Lebesgue-Integral)

⇒ Kennt man zu $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$,
d.h. eine Lösung der (Differential-) Gleichung $F'(x) = f(x)$,
dann ist also $\frac{d}{dx} \left(\int_a^b f(x) \right) = \frac{d}{dx} F(b)$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x) = F(b) + C \leftarrow \text{Konstante}$$

$$b \rightarrow a: 0 = F(a) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)} \\ =: \left[F(x) \right]_a^b = F(x) \Big|_a^b \quad (\text{andere Schreibweise})$$

Der Hauptsatz: falls $f(x)$ am Ort x_0 stetig ist,

dann ist $F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$ am Ort x_0 diff'bar, mit $F'(x) = f(x)$

Bem.: • $F(x)$ Stammfkt. $\Rightarrow F(x) + \text{const.}$ auch.

Die Menge aller Stammfkt. heisst $\int dx f(x)$ (unbestimmtes Integral)

- Hauptsatz hilft nur, falls man $f = \frac{d}{dx} F$ lösen kann
($f = \sin(x^2)$, $F = ???$)

- "basso": $\int_a^b \frac{F(x)}{dx} = F - \text{Zunahme ab } F(a)$

- Anwendungswerte: $\int_a^b dx \frac{d}{dx} [??] = \int_a^b \frac{d}{dx} [??] = [??]_a^b = [??]_{x=b} - [??]_{x=a}$

- Wunder-Tabelle $\frac{1}{1-x^2} = \frac{d}{dx} \operatorname{artanh}(x)$ etc.

man jedoch (s. Branstern etc.) " $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh}(x)$ "

dann lese dies als Tabelle (nicht als Gltg: $C = ?!$)

- F in Tabelle gefunden

→ Zitiern, z.B. [Branstern, Nr. 157]

→ Probe, also $\frac{d}{dx}$ (rhs) bilden ("right hand side")

- $\int_a^\infty f(x) := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)$ nennt man wesentliches Integral

wenn endlich, dann: "es existiert"

Im Gegensatz zum Ableiten gibt es für das Integrieren kein "allgemeines Rezept" (s. jedoch § 4.3).

Daher verfährt man beim Anwenden des Hauptsatzes meist so:

$$\frac{\text{Bsp}}{(1111)} \quad \int_a^b dx \operatorname{artanh}(x) = \int_a^b dx \frac{d}{dx} [??]$$

geeignete Kombination-Funktion für $[??]$? "Stammfunktion"

$$\frac{d}{dx} x \cdot \operatorname{artanh}(x) = \operatorname{artanh}(x) + x \cdot \frac{1}{1-x^2} \quad (\text{nach Produktregel}) \\ = \frac{d}{dx} (??)$$

$$\frac{d}{dx} \ln(1-x^2) = \frac{-2x}{1-x^2} \quad (\text{nach Kettenregel})$$

$$\Rightarrow [??] = x \cdot \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C \quad (\text{eigene Konstante}) \\ = b \cdot \operatorname{artanh}(b) + \frac{1}{2} \ln(1-b^2) + C - (0 + 0 + C)$$

$$\frac{\text{Bsp}}{(n \in \mathbb{N})} \quad \int dx x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ \text{dann } \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) = (n+1) \frac{x^{(n+1)-1}}{n+1} = x^n$$

$$\frac{\text{Bsp}}{(x \in \mathbb{R})} \quad \int dx x^\alpha = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \text{für } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\text{dann } \begin{cases} x > 0: \ln'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \\ x < 0: \ln'(-x) = \frac{-1}{-x} = x^{-1} \end{cases}$$

$$\frac{\text{Bsp}}{(x \neq 0)} \quad \int dx e^{ax} = \int dx \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} e^{ax} + C \right] \\ \text{dann } \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' = e^{ax}$$

$$\frac{\text{Bsp}}{} \quad \int dx \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{x^k}{k!}, \text{ wobei } a_{k+1} := C' \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

(Ann. $|x| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{b_k}$ mit $|a_k| \leq b_k$, so dass Reihe konvergiert)

$$\text{dann } \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$$

insbesondere: ist die Reihe (der Stammfkt.) wieder konvergiert

4.3 Integrations-Verfahren

↳ gibt keine allg. Regel;

eher: Erfahrung / Intuition / Ratem / diskutieren... "Kunst"

→ Die meisten der (für die Physik) relevanten Integrale

kann man in Integrations-Tabellen nachschlagen, z.B.

Brookhouse (gibt meist; s. z.B. online-link auf website)

Gradshchyn / Ryzhik (sehr umfangreich; s. z.B. Bibliothek)

→ "Differenzieren immer machen; Integrieren nur in einigen Glücksfällen"

Namens "bambos" aussprechen $f(x)$ besitzen zwei Stammfkt'n,

diese lassen sich aber nicht durch "elementare" Funktionen

(d.h. $x^n, e^x, \ln(x), \dots$) darstellen,

Bsp $\int dx e^{-x^2} = ?$ ($f(x) = e^{-x^2}$ stetig $\Rightarrow f(x)$ existiert!)

→ Einige besonders wichtige seltene Stammfunktionen haben
des (all eigene Namen bekommen (sog. "spezielle Funktionen")

Bsp $\text{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy e^{-y^2}$ "error function"

↳ ist also tiefenige Fkt, deren Ableitung $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ gilt

(Gaußverteilung)

Zum Umformen/Vereinfachen von Integralen werden oft

einige der folgenden Verfahren angewandt:

Man "erkennt", dass es Sinn macht, den Integranden $f(x)$ zu lesen...

... als Partialbruch

$$\text{Bsp } f = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \right)$$

... als $g' \cdot g^{n/(n-1)}$

$$f(x) = g'(x) \cdot g^n(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n+1} g^{n+1}(x) \right) \quad (\text{Kettenregel "rückwärts"})$$

$$\text{Bsp } \int_a^b dx \frac{1}{x} \cdot \ln^n(x) = \int_a^b dx \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n+1} \ln^{n+1}(x) \right) = \left[\frac{\ln^{n+1}(x)}{n+1} \right]_a^b$$

... als $g' \cdot g'$

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx} (\ln |g(x)|) \quad (\text{Kettenregel "rückwärts"})$$

$$\text{Bsp } \int_a^b dx \frac{3x^2}{1+x^3} = \int_a^b dx \frac{d}{dx} (\ln |1+x^3|) = [\ln |1+x^3|]_a^b$$

$$g(x) = 1+x^3, g'(x) = 3x^2$$

$$\text{Bsp } \int_a^b dx \frac{1}{x \cdot \ln(x)} = \int_a^b dx \frac{d}{dx} (\ln |\ln(x)|) = [\ln |\ln(x)|]_a^b$$

$$g(x) = \ln(x), g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Bsp } \int_a^b dx \tanh(x) = \int_a^b dx \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = [\ln(\cosh(x))]_a^b$$

$$g(x) = \cosh(x), g'(x) = \sinh(x)$$

... als $u \cdot v$ (partielle Integration, pI)

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) = \frac{d}{dx} (u(x) \cdot v(x)) - u(x) \cdot v'(x)$$

$$\text{Bsp } \int_a^b dx \frac{2x \cdot \ln(x)}{x^2} = \int_a^b dx \frac{d}{dx} \left(x^2 \cdot \ln(x) \right) - \int_a^b dx x^2 \cdot \frac{1}{x} = 0 - 0 - \frac{1}{2} + 0$$

$$u = x^2, v' = \frac{1}{x}$$

$$\text{Bsp } \int_a^b dx x \cdot e^{-x} = [-x e^{-x}]_a^b - \int_a^b dx 1 \cdot (-e^{-x}) = 0 - 0 - 0 + 1$$

$$v(x) = e^{-x}, u' = -e^{-x}$$

$$\text{Bsp } \int_a^b dx \frac{x^2 \cdot \sinh(x)}{x^2} = \int_a^b dx \frac{d}{dx} \left(x^2 \cdot \cosh(x) \right) - \int_a^b dx \frac{2x \cdot \cosh(x)}{x^2}$$

$$v(x) = \cosh(x), u' = 2x$$

$$\text{Bsp } \int_a^b dx \cosh^2(x) = \int_a^b dx \frac{d}{dx} \left(x \cdot \sinh(x) - 2x \cdot \cosh(x) \right) + \int_a^b dx 2 \sinh(x)$$

$$= [x^2 \cosh(x) - 2x \cdot \sinh(x) + 2 \cdot \cosh(x)]_a^b$$

$$= [x^2 \cosh(x) - 2x \cdot \sinh(x) + 2 \cdot \cosh(x)]_a^b$$

$$\text{Bsp } \int_a^b dx \cosh^2(x) = [\sinh(x) \cosh(x)]_a^b - \int_a^b dx \sinh^2(x)$$

$$u' = \cosh, v = \cosh$$

$$u = \sinh, v' = \cosh$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx \cosh^2(x) = \left[\frac{\sinh(x) \cosh(x) + x}{2} \right]_a^b \quad \text{auf dies bringen!}$$

als $f(x(t))$ (Substitution)

$x = x(t)$ sei diff'bar und bijektiv ($\Rightarrow$ dann ex. Umkehrfkt $t = t(x)$)
also $x(t(x)) = x$ etc.

$$\int_a^b dx f(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \frac{dx}{dt} f(x(t))$$

(Beweis: $\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)$, mit $F'(x) = f(x)$)

$$\begin{aligned} &= F(x(t(b))) - F(x(t(a))) \\ &= [F(x(t))]_{t(a)}^{t(b)} \quad (\text{Kettenregel}) \\ &= \int_{t(a)}^{t(b)} dt \frac{d}{dt} F(x(t)) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dF}{dx} \quad \text{good!} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ "Substitution ist Umkehrung der Kettenregel"

Bsp $\int_a^b dx \frac{1}{1+x^2}$? Substitution: $x(t) = \sinh(t)$
Umkehrung $\Leftrightarrow t(x) = \sinh^{-1}(x) = \operatorname{arsinh}(x)$

$$\begin{aligned} &\left(\text{benutze } \cosh^2 - \sinh^2 = 1 \right) \rightarrow \int_a^b dx \frac{1}{1+x^2} = \int_{\operatorname{arsinh}(a)}^{\operatorname{arsinh}(b)} dt \frac{\cosh(t)}{1+\sinh^2(t)} \\ &= \int_{\operatorname{arsinh}(a)}^{\operatorname{arsinh}(b)} dt \cdot 1 = \operatorname{arsinh}(b) - \operatorname{arsinh}(a) \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow \operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ als Nebenresultat})$$

(Check: $\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = x$ und x ableiten)

$$\Rightarrow \sinh'(\operatorname{arsinh}(x)) \cdot \operatorname{arsinh}'(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))} = \sqrt{1+x^2} \quad \text{good!}$$

Bsp $\int_a^b dx 2x \ln(x) = ?$ Subst. $x = e^t$
(vgl. PI, S.39) $\Leftrightarrow t = \ln(x)$
$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^0 dt e^t 2e^t t = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 dt 2 \left(-\frac{t}{2}\right) e^{-t} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 dt t e^{-t} \\ &= -\frac{1}{2} \quad \text{via PI, z.Bsp S.39} \end{aligned}$$

Bsp $\int_0^\infty dx \frac{e^{-x}}{1+x} = \int_0^\infty dt \left(-\frac{1}{2}\right) t = \int_0^\infty dt = 1$
 $\frac{1}{1+t}, x = -\ln(t)$

als $\frac{d}{d\alpha}$ von ... (Differentialfunktion nach Parameter)

Bsp $\int_0^\infty dx x^n e^{-x} = (-\frac{d}{d\alpha})^n \int_0^\infty dx e^{-\alpha x} \Big|_{\alpha=1}$
($n \in \mathbb{N}$) $\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty dx e^{-x} = \frac{1}{\alpha}$

$$\left[\left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^n \frac{1}{\alpha} = +\frac{1}{\alpha^2}; \left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^n \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^3}; \dots; \left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^n \frac{1}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \right]_{\alpha=1} = n!$$

als Parameter-abhängig

Bsp $-\beta \frac{d}{d\beta} \ln \left(\int_0^\infty dx \frac{x}{e^{\beta x} + 1} \right) \xrightarrow{x \rightarrow x/2} -\beta \frac{d}{d\beta} \ln \left(\frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x + 1} \right)$
 $= -\beta \frac{d}{d\beta} \left[-2 \ln(\beta) + \ln(\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x + 1}) \right]$
 $= -\beta \left[-2 \frac{1}{\beta} + 0 \right] = 2$

$\rightarrow$ Was tun, wenn gar nichts hilft?

- Integral "analytisch" auswerten: Fläche aussagen + wiegen

- weitere Integraltechniken wägen (z.B. Birkhoff), z.B.

Absondere/Stegung (enthält auch viele spezielle Funktionen)

Göhrner/Hofreiter (gibt nicht nur Ergebnisse, sondern auch Lösungsweg)

- per Computer auswerten

$\rightarrow$ analytisch (Mathematik: Integrale $[f(x), x]$; Maple; ...)

$\rightarrow$ numerisch (z.B. N Integrale $[f(x), \{x_1, x_2\}]$; ...)

- Integral näherungsweise auswerten

$\rightarrow$ finde integrierbare Fkt'n $f_+(x)$ mit $f_+(x) \geq f(x) \geq f_-(x)$

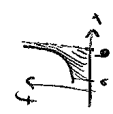
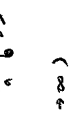
$\Rightarrow \int dx f_+(x) \geq \int dx f(x) \geq \int dx f_-(x) \quad (a \leq b)$

(s. auch Riemann-/Taylor-Entwicklung, später in Kap. 5)

- das Integral als neue spezielle Funktion (mit Namen?) definieren ...

4.4 Unendliche Integrale

→ haben (sicher auf $[a, b]$ stetige $f(x)$ betrachtet
 → kann man Def. von $\int_a^b f(x)$ sinnvoll erweitern auf Fälle, wo

- $f(x)$ für $x \rightarrow b$ divergiert? 
- (d.h. bei $x=b$ nicht def. ist)
- $b \rightarrow \infty$ geht? 

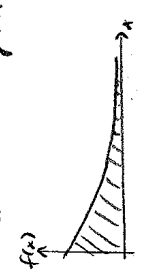
Ja: Falls $f(x) \forall \beta \in [a, b]$ auf $[a, \beta]$ integrierbar ist
 und $\int_a^\beta f(x)$ für $\beta \rightarrow b$ konvergiert, dann heißt

$$\int_a^b f(x) := \lim_{\beta \rightarrow b} \int_a^\beta f(x) \quad \text{uneigentliches Integral (von } f \text{ auf } [a, b])$$

Bem. $b \in \mathbb{R}$ oder $b = +\infty$ oder
 analog für $a \rightarrow -\infty$; oder beide gleichzeitig

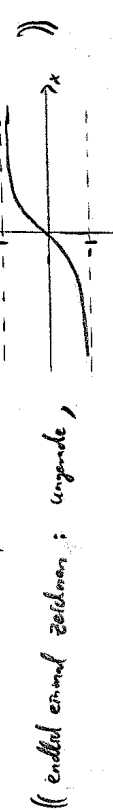
Bsp $\int_0^1 dx \frac{1}{1-x} = \int_0^1 dx \frac{d}{dx} [-2 \sqrt{1-x}]$
 denn $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x}$
 $= -2 \sqrt{1-x} + 2 \sqrt{1-x}$

harmonisch für $\beta \in]0, 1[$; logf. für $\beta \rightarrow 1$
 $\Rightarrow \int_0^1 dx \frac{1}{1-x} = 2$, obwohl $f(x)$ bei $x=1$ nicht definiert ist!



Bsp $\int_0^\beta dx e^{-x} = \int_0^\beta dx \frac{d}{dx} [-e^{-x}]$
 denn $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-x}$
 $= -e^{-\beta} + e^0 = 1 - e^{-\beta}$, oder für $\beta \in]0, \infty[$, logf. für $\beta \rightarrow \infty$
 $\Rightarrow \int_0^\infty dx e^{-x} = 1$

Bsp $\arctan(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi dy e^{-y^2}$ oder $\forall x > 0$; logf. für $x \rightarrow \infty$ (gegen 1)
 (Beweis: Analysis I)
 $\Rightarrow \arctan(\infty) = 1$, $\arctan(-\infty) = -1$



Bsp $\int_0^\beta dx \sqrt{x} = \int_0^\beta dx \frac{d}{dx} [\frac{2}{3} x^{3/2}] = \frac{2}{3} \beta^{3/2} - 0$
 oder für $\beta \in]0, \infty[$
 oder für $\beta \rightarrow \infty$ divergiert "gegen $+\infty$ "
 Schreibweise: $\int_0^\infty dx \sqrt{x} = \infty$

4.5 Vorbereitung auf Taylor

Falls $f(t)$ für alle t zwischen x_0 und x $(n+1)$ -mal stetig diff'bar,
 gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \int_{x_0}^x dt \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n$$

Beweis: durch vollständige Induktion

Ind.-Anfang: $n=0$: $\sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \int_{x_0}^x dt \frac{f^{(1)}(t)}{0!} (x-t)^0$
 $= \frac{f(x_0)}{0!} \cdot 1 + [f(t)]_{x_0}^x = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x)$

Ind.-Annahme: Formel stimmt bis $n-1$

Zu zeigen: Formel stimmt für n

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \int_{x_0}^x dt \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n$$

$$\stackrel{\text{PI}}{=} \left[f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x dt f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= f^{(n)}(x) \frac{0^n}{n!} - f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \int_{x_0}^x dt f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \int_{x_0}^x dt \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1}$$

$$= f(x) \quad \text{laut Annahme} \quad \text{qed}$$

5. Potenzreihen - Entwicklungen

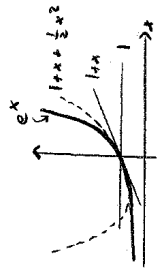
$\rightarrow \infty \Rightarrow$ Potenzreihe

Koeffizienten: Polynome $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ sind einfach
(kann berechnen! Differenzieren! integrieren!)

$\rightarrow$ Approximation einer "beliebigen" Fkt. durch

Polynome möglich?

[Antwort: JA, das geht sehr oft]

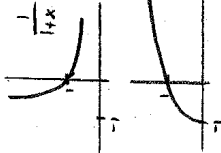


$\rightarrow$ können schon am Bsp:

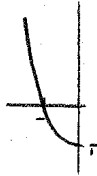
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

$\rightarrow$ geht das auch für andere Fkt'n? $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

sicher auch bei $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$



oder $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$



Wenn $f = \sum$, dann: "hebe $f(x)$ um $x=0$ entwickelt"

• funktioniert das immer? $\rightarrow$ fast; bei physikalischen Funktionen ✓

aber oft nur für $|x| <$ Konvergenzradius

• wann nicht? $\rightarrow$ an "pathologischen" Stellen (Sprünge, Kerne, etc.)
entwickelt nicht $|x|, \frac{1}{x}, e^{-\frac{1}{x^2}}$ um $x=0$

• wozu? $\rightarrow$ können x^n gut differenzieren und integrieren

$\rightarrow$ kann Grenzfälle anschauen, Punktwerte diskutieren...

$\rightarrow$ kann f nicht, habe nur Gl'n für f

setze $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ an
und bestimme $c_0, c_1, c_2, \dots$ aus den Gl'n.

Bsp $f = 1 + x + x^2$ "Differentialgleichung nullter Ordnung"

hat die Lsg $f = \frac{1}{1-x}$ und führt zur Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} \quad \text{setze } m = n-1$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$\Rightarrow$ Lsg: $c_0 = 1$ und $c_n = c_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$ alle $c_n = 1$

$$\text{also } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{geometrische Reihe, } |x| < 1$$

(Wiederholtheit; vgl. Kap. 1.4)

$\rightarrow$ wie bekommt man die Koeffizienten c_n systematisch?

Umgebung mit Potenzreihen-Entwicklungen ("Trickliste", Verfahrenswissen)

• Ableitungen (hier: Bsp v. oben nochmal; Annahme: $\frac{1}{1-x}$ ist willk. Fkt.)

$$\text{Bsp } \frac{1}{1-x} = 1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = 1 + x \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$= 1 + x \cdot \left[1 + x \cdot \frac{1}{1-x}\right]$$

$$= 1 + x + x^2 + \dots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} \quad (\text{vgl. U9a})$$

• algebraische Umformung

$$\text{Bsp } \sqrt{1+x} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$\Leftrightarrow 1+x = 1 + 2c_1 x + (c_1^2 + 2c_2)x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

• aus Ableitung ("inf. eine Reihe")

$$\text{Bsp } \frac{d}{dx} \left[-\ln(1-x) \right] = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$\Leftrightarrow -\ln(1-x) = C + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$x=0: -\ln(1) = C \Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

- aus Stammfunktion ("Diff. einer Reihe")

Bsp $\frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx} [2\sqrt{1+x}] = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$

- Addition von Reihen

Bsp $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = [e^x] \text{ gerader Anteil}$
 $= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Bsp $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = [e^x] \text{ ungerader Anteil}$
 $= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ (oder aus Stammfkt: $\sinh = \frac{d}{dx} [\cosh] = \dots$)

Bsp $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) = [\ln(1+x)] \text{ ungerader Anteil}$
 $= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

- aus (Differential-) Gleichungen

Bsp Reihe von $f(x) = 3e^{2x}$ aus $f'(x) = 2f(x)$, $f(0) = 3$:
 $(3 + c_1x + c_2x^2 + \dots)' = 2(3 + c_1x + c_2x^2 + \dots)$

$$c_1 + 2c_2x + \dots = 6 + 2c_1x + \dots \Rightarrow c_1 = 6, c_2 = c_1$$

$$\Rightarrow 3e^{2x} = 3 + 6x + 6x^2 + \dots$$

- aus Multiplikation / Division von Reihen

Bsp $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots)$
 $\Leftrightarrow$ (Reihe-Reihe) = $(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \cdot (\cosh\text{-Reihe})$
 ausmultiplizieren $\Rightarrow c_1, c_2, \dots$

- aus $f(f'(x)) = x$

- Taylor-Reihe

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

$$f'(x) = c_1; f'(0) = c_1; f''(0) = 2c_2; f'''(0) = 2 \cdot 3c_3; \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

- Bem: Warum nicht gleich Taylor? $\rightarrow$ oft unbrauchbar!

Bsp $f = \frac{\ln(1+\sinh(x))}{\cosh(x) + x^2} \rightarrow f'' \sim$ halbes Seite ...
 oder: $\frac{\ln(1+x+0.5x^2+\dots)}{1+0.5x+\dots+x^2} = \frac{x+0.5x^2+\dots-\frac{1}{2}(x+0.5x^2+\dots)^2+\dots}{1+0.5x+\dots} = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$

Bsp $f = (1+x)^\lambda$, $f' = \lambda(1+x)^{\lambda-1}$, $f'' = \lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2}$, ...
 $\Rightarrow (1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} x^2 + \dots$ (vgl. 6.43a)
 oft getrennt

- Bem: kann $f(x)$ auch "um $x=x_0$ entwickeln" (bisher: $x_0=0$)

$$g(x) := f(x+x_0)$$

falls $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$$\Rightarrow f(x) = g(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$$(\text{"} g^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0), g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+x_0), \dots, g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+x_0) \text{"})$$

Konvergenz der Potenzreihen / Taylorreihen?

$\rightarrow$ oft nützlich: geom. Reihe als "Normalform" (vgl. Kap. 1.4, S. 16)

$$\Rightarrow \sum_k a_k \text{ ist konvergent, falls } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{"Quotientenkriterium"}$$

$$\text{divergent} \quad \geq 1$$

(denn: falls $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right|, \dots \leq q \Rightarrow |a_{n+k}| \leq q |a_n| \leq q^k |a_n|$,
 daher ist die geom. Reihe $\sum q^n$ (kgt. für $|q| < 1$) eine Majorante)

$$\rightarrow \text{konvergiert } \sum c_n x^n? \Rightarrow \text{untersuche ob } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \text{"Konvergenzradius"}$$

$$\rightarrow \text{konvergiert } \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n? \Rightarrow \text{untersuche ob } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(0) x^{n+1}}{f^{(n)}(0) x^n} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)} \right| = \text{"Konvergenzradius"}$$

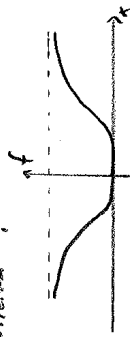
Für $|x| < \text{"Konvergenzradius } R"$ ist die Konvergenz also gesichert.

Für andere x ($x = \pm R$) kann die Reihe auch konvergieren; muss man zeigen.

Wegen konvergenz diese Potenzreihen / Taylorreihen?

Bsp (als Warnung)

$$f(x) = e^{-1/x^2}$$



$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (-\dots) e^{-1/x^2}, \quad f''(0) = 0; \dots; f^{(n)}(0) = 0$$

$$\text{Taylor} = 0 + 0 + 0 + \dots \neq f(x)$$

Grund: $x=0$ ist "pathologische" Stelle
("unübliche Singularität")

→ bei solchen (sehr exotischen) Ansätzen ist in der Regel sofort klar, dass Potenzreihe stark von $f(x)$ abweicht.

→ meist: falls Taylorreihe existiert

(d.h. f beliebig oft diffbar und Reihe konvergiert)
dann ist sie gleich $f(x)$

Wie schnell konvergieren die Reihen gegen $f(x)$?

Wende zum jedes $f = \text{Polynom} + \text{Rest}_n$ schreiben, wobei Rest "klein" ist
$$= \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + O(x^{m+1})$$

! "Ordnung": vorgegebene Terme
haben niedrigste mit Faktoren x

Bsp zur Notation: $(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + O(x^2)$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

$$(1 + \lambda x + O(x^2)) \cdot (1 + x + O(x^2)) = 1 + (\lambda+1)x + O(x^2)$$

Wie groß ist aber der "Fehler" in $f \approx \text{Polynom}_n$?

→ müssen die Größe des "Restglieds" $\text{Rest}_n = f - \text{Polynom}_n$ abschätzen.
dazu dient der

Satz von Taylor

Sei $f(t)$ für alle t zwischen x_0 und x ($m+1$) und stetig diffbar.

Dann gibt es ein η zwischen x_0 und x mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \frac{f^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!} (x-x_0)^{m+1}$$

$$\underbrace{=: f_m(x)}_{\text{Taylor-Polynom}} = f(x) - f_m(x) =: R_m(x) \quad \text{Restglied}$$

$$\text{Bem.: } n=0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{Mittelwertsatz! (vgl. Kap. 3.3)} \quad \text{S. 30}$$

$\Rightarrow$ Taylor-Entwicklung ist Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes

(Beweis: wism aus Kap. 4.5, dass die Behauptung wahr ist für

$$R_m(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt \quad (\text{via vollst. Induktion})$$

Falls $x \geq x_0$: Sei $t_{\max}$ das Maximum von $f^{(m+1)}(t)$ auf $[x_0, x]$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt \leq \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(t_{\max})$$

$$= \left[-\frac{1}{m!} \frac{(x-t)^{m+1}}{m+1} \right]_{x_0}^x = \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \geq R_m(x)$$

analog zeigt man: $\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(t_{\min}) \leq R_m(x)$

$\Rightarrow$ (Zwischensatz): da $f^{(m+1)}$ stetig, existiert

ein $\eta \in [x_0, x]$ mit $\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(\eta) = R_m(x)$

Falls $x < x_0$: analog

gilt

Bsp

$$\begin{aligned} f(x) &= x e^x \\ f'(x) &= x e^x + e^x \\ f''(x) &= x e^x + 2e^x \\ &\vdots \text{ (allf. bod.)} \\ f^{(n)}(x) &= x e^x + n e^x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = n, \quad f^{(n)}(-1) = -\frac{1}{e} + \frac{n}{e}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n \\ &= 0 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + O(x^4) \\ &= -\frac{1}{e} + 0 \cdot (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2e} + \frac{(x+1)^3}{3e} + O((x+1)^4) \end{aligned}$$

→ Reihenentwicklung: Manipulationen [...] zeigt Güte oder Näherung

Bsp

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x), \quad x \in \mathbb{R}^+ \\ f'(x) &= x^{-1} \\ f''(x) &= (-1) x^{-2} \\ f'''(x) &= (-1)(-2) x^{-3} \\ &\vdots \text{ (allf. bod.)} \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Entwicklung um } x_0 = 1: f^{(0)}(x_0) = \ln(1) = 0$$

$$f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad \text{for } n \geq 1$$

$$h_1(x) = h_1(1+(x-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

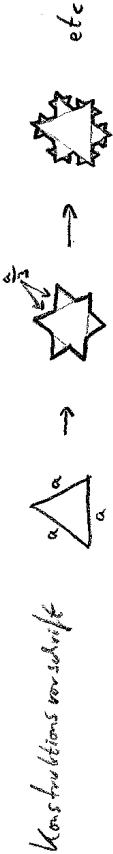
$$\Leftrightarrow h_1(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5)$$

$$\text{Restglied } R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} x^{m+1} = \frac{(-1)^m m!}{(m+1)!} \frac{x^{m+1}}{y^{m+1}} = \frac{(-1)^m}{m+1} \frac{x^{m+1}}{(1+\theta x)^{m+1}}$$

$$\text{Konvergenz? } |x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{n!} \right| = 1$$

→ aber z.B. $h_1(2) = -\ln(2^{-1}) = -\ln(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \dots$
 $\int_{0.5}^{1.05} \int_{0.625}^{0.675} \int_{0.675}^{0.682} \dots$

Bsp (geom. Reihe) Koch'sche Schneeflocke



Frage: Flächeninhalt = ?

$$F(n) = \frac{9}{2} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{9}{2} \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{9}{2} \sqrt{a^2 \frac{3}{4}} = a^2 \frac{13}{4}$$

$$F_0 = F(a)$$

$$F_1 = F_0 + 3 \cdot F\left(\frac{a}{3}\right)$$

$$F_2 = F_1 + 3 \cdot 4 \cdot F\left(\frac{a}{3^2}\right)$$

$$F_3 = F_2 + 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot F\left(\frac{a}{3^3}\right)$$

$$F_n = F_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right)$$

$$\begin{aligned} F_{\infty} &= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4^{n-1} \cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right) \\ &= a^2 \frac{13}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{4} \cdot 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{a^2}{3^{2n}} \\ &= a^2 \frac{13}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \right) \end{aligned}$$

$$\text{geom. Reihe! (S.42)} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1 \right] - 1 = \frac{4}{3} \\ &= a^2 \frac{13}{4} \cdot \frac{4}{3} = a^2 \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Frage: Umfang = ?

$$U_0 = 3a$$

$$U_1 = \frac{4}{3} U_0$$

$$U_2 = \frac{4}{3} U_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 U_0$$

$$U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n U_0 \Rightarrow U_{\infty} = \infty!$$

6. Komplexe Zahlen

Wurden? $\rightarrow \mathbb{R}$ abgeschlossen bzgl. $+$, $-$, $\cdot$, $:$

aber nicht bzgl. Wurzelziehen aus neg. Zahlen.

$$x^2 = -1 \text{ f\"ur } x \in \mathbb{R} \text{ nicht l\"osbar (} x \cdot x \geq 0 \text{ in } \mathbb{R})$$

$$\text{also } \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

bzw. Polynom $P(x) = x^2 + 1$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$

allgemein: $\bullet b^4 \notin \mathbb{R}$ falls $b < 0$, $\forall \neq \mathbb{Z}$

$\bullet$ nicht jedes Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ hat NS in $\mathbb{R}$

$\rightarrow$ komplexe Zahlen beheben beide "Defizite"

$\rightarrow$ vereinfachen viele Rechnungen

$\rightarrow$ machen viele Zusammenh\"ange klar

6.1 Grundlagen

Def. $i := \sqrt{-1}$ imagin\"are Einheit (s.o. und $i \notin \mathbb{R}$)

Def. $\mathbb{C} := \{a+ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ komplexe Zahlen

$\rightarrow$ jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ l\"asst sich als $z = a+ib$ schreiben,

mit eindeutigen $a, b \in \mathbb{R}$

(d.h. falls $z_1 = z_2$, $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$)

$\rightarrow$ Bezeichnung: "Realteil von z " : $a = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ } $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$
 "Imagin\"aranteil von z " : $b = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ }

$\rightarrow$ Rechnen in $\mathbb{C}$ per Rechenregeln in $\mathbb{R}$; und $i^2 = -1$ setzen

Bsp $z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

Bsp $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 i b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$
 $= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Bsp Sei $z = a+ib \neq 0$ (d.h. $a \neq 0$ und/oder $b \neq 0$, also $a^2 + b^2 \neq 0$)

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2 - (ib)^2} = \frac{a-ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

$$((\text{Test: } z^{-1} \cdot z = \frac{a-ib}{a^2 + b^2} \cdot (a+ib) = \frac{a^2 - (ib)^2}{a^2 + b^2} = 1 \quad \checkmark))$$

Bsp $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \dots \Rightarrow i^{n+4} = i^n$

$$i^{-1} = -i, i^{-2} = -1, i^{-3} = i, i^{-4} = 1, \dots$$

$\rightarrow$ da alle Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$, gilt z.B. auch

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{binomische Formel})$$

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \sum_{k=0}^n z^k \quad \forall z \neq 1, n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{geom. Reihe})$$

etc.

$$\Rightarrow (\text{also } \mathbb{R} \subset \mathbb{C})$$

$\rightarrow$ Bezeichnung: $\operatorname{Im}(z) = 0 \Rightarrow z = a + i \cdot 0 \in \mathbb{R}$ heißt "reine reelle Zahl"

$$\operatorname{Re}(z) = 0 \Rightarrow z = 0 + ib \quad \text{het "reine imagin\"are Zahl"}$$

Def. $z^* := a - ib$ heißt die zu $z = a + ib$ (komplex) konjugierte Zahl

($\uparrow$ umkehrt und als $\bar{z}$ geschrieben)

$$z + z^* = a + ib + a - ib = 2a = 2 \operatorname{Re}(z) \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}$$

$$z - z^* = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i \operatorname{Im}(z) \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i}$$

$$z \cdot z^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow z^{-1} = \frac{z^*}{z \cdot z^*}$$

Bem.: Die "Ordnungsstruktur" von $\mathbb{R}$ (d.h. f\"ur $a, b \in \mathbb{R}$

gilt immer entweder $a < b$, oder $a > b$, oder $a = b$)

tr\"agt auf $\mathbb{C}$ keinen Sinn mehr

$\rightarrow$ definiere daher Betragsfunktion auf $\mathbb{C}$ als

$$||: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, z \mapsto |z| := \sqrt{z z^*} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

$\Rightarrow$ Eigenschaften wie in $\mathbb{R}$, s. Ü52, Ü53

6.2 Fundamentalsatz der Algebra

Für jedes komplexe Polynom $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$

(mit $n \in \mathbb{N}_0$, Koeff's $a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$; $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$)

gibt es Zahlen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ mit $P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$

(Beweis: für $n=0,1$ trivial; $n=2$: Ü54; $n \geq 3$: Analysis-Vorlesung)

(Fundamentalthese)

Bem.: • die z_k sind also die (komplexen) NS von $P_n(z)$: $P_n(z_k) = 0$;

Polynom-NS möglich, z.B. $P_2(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$

$\Rightarrow$ jedes Polynom vom Grade $n \geq 1$ hat mind. eine NS in $\mathbb{C}$

• $P_n(z)$ ist somit durch die (mit) Zahlen $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$

als auch durch $\{z_1, \dots, z_n, a_n\}$ vollständig festgelegt.

• analog zum Fund.-Satz der Zahlen Theorie (vgl. Kap. 1.3.57)

(Primfaktorzerlegung): Faktorisierung von $P(z)$ viel

schwieriger als "Ausmultiplizieren".

$\rightarrow$ Folgerung: Für "reelle Polynome" (d.h. $a_k \in \mathbb{R}$) gilt

$$[P_n(z)]^* = \left(\sum_{k=0}^n a_k z^k \right)^* = \sum_{k=0}^n a_k^* (z^k)^* = \sum_{k=0}^n a_k (z^*)^k = P_n(z^*)$$

$$\Rightarrow P_n(z_k^*) = [P_n(z_k)]^* = 0^* = 0$$

$\Rightarrow$ falls $z_k = a + ib$ NS, dann auch $z_k^* = a - ib$!

(d.h. NS sind komplex-konjugierte Paare oder rein reell.)

kann (wegen $(z - z_k)(z - z_k^*) = z^2 - (z_k + z_k^*)z + z_k z_k^*$) schreiben:

$$P_n(z) = a_n (z^2 + A_1 z + B_1) \dots (z^2 + A_m z + B_m) (z - C_1) \dots (z - C_{n-2m})$$

komplex konj. NS

reelle NS

mit $a_n, A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}$ und $A_i^2 < 4B_i$ (vgl. Ü54)

$\rightarrow$ wie bestimmt man die NS z_k ?

- $n=1$: trivial
- $n=2$: "pq-Formel" für quadratische Gln. (vgl. Ü54)
- $n=3$: es gibt komplizierte/unpraktische Lösungsformeln für kubische Gln.
- $n \geq 3$: in der Praxis müssen NS erraten werden

(bzw. Näherungsweise / numerisch / ... bestimmt)

(man kann sogar beweisen, dass es keine allgemeine Formel gibt)

Bsp $P(z) = 2iz^3 + (2-6i)z^2 + (-6+4i)z + 4$

raten: $P(0) = 4$; $P(1) = 2i + 2 - 6i - 6 + 4i + 4 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$

$P(z) = (z-1)(2z^2 - 4iz - 2 + 4i) = 0 \Rightarrow z_2 = 2$

stellt weiterzerlegen: laut Fund.-Satz $P(z) = 2i(z-1)(z-2)(z-z_3)$

$z=0: 4 = 2i(-1)(-2)(-z_3) = -4iz_3$

$\Rightarrow z_3 = i$

nach unbekannt

$\rightarrow$ weitere Bsp in Übung

6.3 Komplexe Funktionen

(bzw. das Wichtigste; (viel) mehr: Analysis / Funktionentheorie)

$\rightarrow$ überzeuge alle Def's für Folgen, Reihen, Konvergenz von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$; z.B.:

Eine komplexe Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{z^k}{k!}$ ($c_k, z \in \mathbb{C}$)

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert aus $\mathbb{C}$,

wenn $|z| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \cdot |c_k|}{|c_{k+1}|}$ wobei $|c_k| \geq |c_{k+1}|$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ n+1 & \text{für } z=1 \end{cases}$$

hier ist $c_k = k!$,
 also folgt mit $\tilde{c}_k := c_k$: $\frac{k! c_{k-1}}{\tilde{c}_k} = \frac{k! (k-1)!}{k!} = 1$,
 also $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ falls $|z| < 1$

Für komplexe Funktionen (d.h. Abb. $f: A \rightarrow B$ mit $A, B \subset \mathbb{C}$; $z \mapsto f(z)$)
 können ebenfalls die (z.S.-) Def's von Stetigkeit, Ableitung
 aus der reellen Theorie übernommen werden;

→ insbesondere gelten weiterhin alle Ableitungsregeln

→ geometrisch Veranschaulichung der Def's oft nicht mehr möglich/sinnvoll

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{konvergiert } \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \quad \text{gilt } \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad (\text{Beweis genau wie in } \underline{5.12})$$

→ die "hyperbolicischen" Funktionen erfüllen auch alles wie in $\mathbb{R}$:

$$\cosh(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

→ Für Potenzreihen mit reellen Koeff's, d.h. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{z^k}{k!}$, $c_k \in \mathbb{R}$
 folgt wieder $[f(z)]^* = f(z^*)$ ((vgl. reelle Polynome, 5.54))

$$\underline{\text{Bsp}} \quad [\exp(z)]^* = \exp(z^*) \quad \text{etc.}$$

→ konvergente komplexe Potenzreihen sind beliebig oft (stetig) diff'bar,
 und zum gleichem Grade: $f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n} \frac{z^k}{k!}$

$$\underline{\text{Bsp}} \quad \frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z); \quad \frac{d}{dz} \cosh(z) = \sinh(z) \quad \text{etc.}$$

wichtigster Unterschied zu reellen Funktionen:

((alle Beweise → Analysis-Vorlesung, Funktionenreihe))

• $f(z)$ diff'bar $\Rightarrow$ sogar beliebig oft diff'bar

• Eigenschaften, welche Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ ($<, >$) brauchen, sind nicht übertragbar.

z.B. Monotonie, Extrema, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz

• Def von Integration muss abgeändert werden:

haben in $\mathbb{C}$ kein "oben"/"unten", also keine "Fläche unter dem Graphen"

wichtig für die Physik sind komplexwertige Fkt'n mit reellen Argument,

$$\text{d.h. } f: A \rightarrow B, \quad A \subset \mathbb{R}, \quad B \subset \mathbb{C} \\ x \mapsto f(x)$$

$$\text{also ist } f \text{ von der Form } f(x) = u(x) + i v(x),$$

$$u: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad v: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto u(x), \quad x \mapsto v(x)$$

und $u(x) = \operatorname{Re}(f(x))$, $v(x) = \operatorname{Im}(f(x))$ sind zwei ganz normale reelle Fkt'n.

→ geometrisch Veranschaulichung, Kurvenabschätzen, Zwischenwertsatz,

Mittelwertsatz und insbesondere Integration aus Leibniz:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b dx \, u(x) + i \int_a^b dx \, v(x) = \left[\frac{u(x)}{1} + i \frac{v(x)}{1} \right]_a^b$$

können also rechnen wie gewohnt, außer gilt Hauptsatz

$$\int_a^b dx \, f(x) = F(b) - F(a), \quad \text{falls } f(x) \text{ stetig und } F'(x) = f(x)$$

(($\Leftrightarrow$) $u(x), v(x)$ stetig und $F(x) = u(x) + i v(x)$ mit $u'(x) = u(x)$, $v'(x) = v(x)$)

$$\underline{\text{Bsp}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \, i \exp(ix) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{d}{dx} [\exp(ix)] = [\exp(ix)]_{-\infty}^{\infty} = \exp(i\infty) - \exp(-i\infty) = 2 \sin(i\infty)$$

$$\underline{\text{Bsp}} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!}, \quad c_k = a_k + i b_k \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx \, f(x) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \right]_a^b + i \left[\sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!} \right]_a^b$$

$$\underline{\text{Bsp}} \quad \left[\int_a^b dx \, f(x) \right]^* = \int_a^b dx \, u(x) - i \int_a^b dx \, v(x) = \int_a^b dx \, f^*(x)$$

6.4 Trigonometrische Funktionen

(Aussagen...)

für beliebige komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ machen wir die

$$\text{Def } \cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad \sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

$$\Rightarrow \cos(z) + i \sin(z) = \exp(iz) \quad \text{"Euler'sche Formel"}$$

Bem.: vgl. mit Def von $\cosh, \sinh$

$$\Rightarrow \cos(z) = \cosh(iz), \quad \sin(z) = \frac{\sinh(iz)}{i}$$

Potenzreihen direkt aus exp-Reihe (oder $\cos/\sin$ Reihen),

$$\left(\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \left[\exp(z) \right]_{\text{gerade}} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right]_{\text{gerade}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right)$$

$$\cos(z) = \cosh(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}}{1} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(z) = \frac{\sinh(iz)}{i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}{i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Eigenschaften (folgen direkt aus Def, oder v.m. $\cosh/\sinh$)

- $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$ (gerade Funktion) (ungerade Funktion)
- $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$
- $\frac{d}{dz} \cos(z) = -\sin(z)$, $\frac{d}{dz} \sin(z) = \cos(z)$

• Sämtliche "Additionstheoreme" folgen aus Def

$$\text{z.B. } \sin(z_1) \cos(z_2) + \cos(z_1) \sin(z_2) = \sin(z_1 + z_2)$$

$$\cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2) = \cos(z_1 + z_2)$$

(Spezialfall: $z_1 = z, z_2 = -z$ gerade/ungerade)

$$\Rightarrow \cos(z) \cos(-z) - \sin(z) \sin(-z) = \cos^2(z) + \sin^2(z) = \cos(0) = 1$$

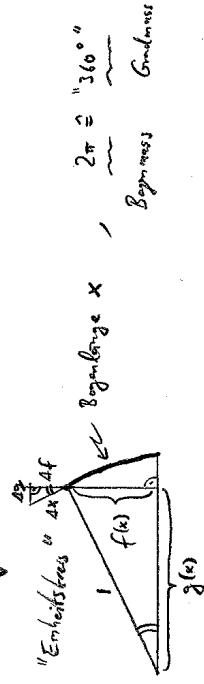
• für $z = a+ib, a, b \in \mathbb{R}$ gilt z.B. ("Euklidetrische Pythagoras")

$$\sin(a+ib) = \sin(a) \cosh(b) + i \cos(a) \sinh(b)$$

$$\cos(a+ib) = \cos(a) \cosh(b) - i \sin(a) \sinh(b)$$

$$\exp(a+ib) = \exp(a) [\cos(b) + i \sin(b)]$$

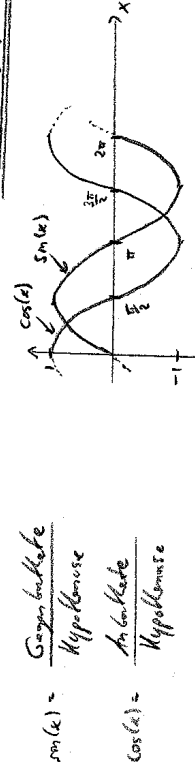
Nachholbedarf: müssen noch $\cos(x), \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ "kennenlernen":



$$\text{es gilt } \frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} \quad (\text{wegen Ähnlichkeit der Dreiecke})$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{g(x+dx) - g(x)}{dx} \xrightarrow{dx \rightarrow 0} -f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = g(x), \quad g'(x) = -f(x) \quad \left. \begin{array}{l} \text{genau die Eigenschaften von } \sin \\ f(0) = 0, \quad g(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \cos(x)}}$$



aus obiger $\triangle$ -Steige: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \dots$

aus Funktions-Steige: $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x), \quad \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

$$\Rightarrow \cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

aus $\exp(i\pi/6) = \exp(i\pi) [\cos(1) + i \sin(1)]$ (S.58) folgt

$$\underline{\underline{\exp(i\pi) = -1, \quad \exp(2\pi i) = 1}}$$

und wegen $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$ ist

$$\underline{\underline{\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)}}, \quad \text{"exp ist } 2\pi\text{-periodisch in imaginärem Rkt."}$$

also: $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nicht injektiv

$\Rightarrow \exists$ keine Umkehrabbildung
(erst nach Einschränkungen)

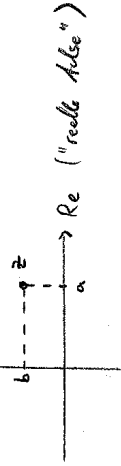
(auch nicht surjektiv: $\exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$)

6.5 Gauss'sche Zahlenebene (komplexe Ebene)

"Reise" eine komplexe Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}$ als

Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene

② $\uparrow \text{Im}$ ("imaginäre Achse")



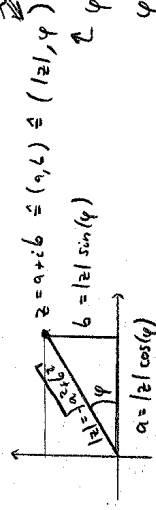
→ Rechenoperationen geometrisch veranschaulichen:

z.B. $z^* = a - ib \hat{=}$ Spiegelung an Re-Achse

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \hat{=}$ Abstand zum Ursprung (§7: Vektoralgebra)

Addition: $\uparrow \text{Im}$ ② $z_1 + z_2$ ($\hat{=}$ Vektordaddition, vgl. §7)

→ alternative Koordinatenwahl in $\mathbb{R}^2$: Polarkoordinaten



$\uparrow \varphi \in [0, 2\pi[$ im Bogenmaß!

$\varphi := \arg(z)$ "Argument von z"

$\arg(0) := 0$ ("damit $\arg$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Bem.: • die Fkt $\arg: \mathbb{C} \rightarrow [0, 2\pi[$ ist unstetig

(springt um 2π) entlang der positiven reellen Achse

• manchmal andere Konventionen, z.B. $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$

• in "U58": $\frac{b}{a} = \tan(\varphi) \Rightarrow \arg(z) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right) + n(\frac{b}{a}) \cdot \pi$
 $\uparrow \in \{0, 1, 2\}$

→ $z = a + ib = |z| \cos(\varphi) + i|z| \sin(\varphi) = |z| \exp(i\varphi) = |z| \exp\{i \arg(z)\}$

→ $z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| \exp\{i[\arg(z_1) + \arg(z_2)]\}$

oder auch $= |z_1 \cdot z_2| \exp\{i \arg(z_1 \cdot z_2)\}$

⇒ $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi \cdot n$

(fast wie $\arg$) ($\uparrow \in \{0, 1\}$ so dass $\arg \in [0, 2\pi[$)

Multi. $\hat{=}$ Drehstreckung

②



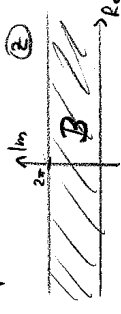
6.6 Logarithmus und Potenzen

wieder als Umkehrfunktion von $\exp$ definieren?!

Vgl. 6.4, 5.59: $\exp$ ist 2π -periodisch auf Im-Achse

→ beschreiben uns auf Streifen

$B := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \in [0, 2\pi[\}$



Def $\ln: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow B$

$z \mapsto \ln(z) := \ln|z| + i \arg(z)$

$\uparrow$ "reeller $\ln$, $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, vgl. Kap. 2.4, 5.21

→ es folgt $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1 \cdot z_2| + i \arg(z_1 \cdot z_2)$

$= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i[\arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi n]$
 $= \ln(z_1) + \ln(z_2) - 2\pi i n$

($\uparrow \in \{0, 1\}$ so dass $[\dots] \in [0, 2\pi[$)

Bem.: • falls $z \in \mathbb{R}^+$: $|z| = z$, $\arg(z) = 0 \Rightarrow$ reeller Log aus Kap. 2.4

• $\exp(\ln(z)) = \exp(\ln|z| + i \arg(z)) = \exp(\ln|z|) \exp(i \arg(z))$
 $= |z| \exp(i \arg(z)) = z \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

also ist die "eingeschränkte Exponentialfkt" $\exp: B \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

umkehrbar (in Bogenmaß zu $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$)

$\ln(\exp(z)) = z \quad \forall z \in B$

• es gibt verschiedene Def's; hier nur eine davon
gesetzt; kann $\ln(z)$ auch als mehrwertige Fkt
betrachtet ("Multi.")

algebraische (komplexe) Potenzen werden nun analog zu Kap. 2.4 (S.21) in exp definiert:

Def für $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}$

$$b^z := \exp(z \log(b))$$

$$\text{sonst } 0^z := \lim_{b \rightarrow 0} b^z = 0 \quad \text{für } z \neq 0$$

$$\text{und } 0^0 := 1$$

Schreibweise: $\sqrt[n]{b} := b^{1/n}$

→ die Def von b^x in Kap 2.4 ist Spezialfall ($|b|=b$, $\arg(b)=0$)

→ die Potenzgesetze folgen wieder aus Def (mit exp-Eigenschaften):

$$b^{z_1} \cdot b^{z_2} = b^{z_1+z_2} \quad (\Rightarrow b^{-z} = \frac{1}{b^z} \quad \text{für } z_1=z, z_2=-z)$$

$$(b^z)^{z_2} = b^{z \cdot z_2} = \exp(z \cdot z_2 \log b) \quad \text{so, dass } \operatorname{Im}(z_2 \log b) + 2\pi n \in [0, 2\pi[$$

$$a^z b^z = (ab)^z = \exp(z \log(ab)) \quad \text{so, dass } \arg(ab) + \arg(b) - 2\pi n \in [0, 2\pi[$$

$$b^{z_1 z_2} = z_2 b^{z_1} + 2\pi i n \quad \text{so, dass } \operatorname{Im}(z_2 \log(b_1)) + 2\pi n \in [0, 2\pi[$$

→ wegen $b_1(e) = 1$ folgt

$$e^z = \exp(z \cdot b_1(e)) = \exp(z)$$

$$\Rightarrow (\exp(z_1))^{z_2} = \exp(z_2 \log(\exp(z_1))) \quad \text{so, dass } \operatorname{Im}(z_2) + 2\pi n \in [0, 2\pi[$$

$$\rightarrow \text{wegen } \exp(i\pi) = \frac{1}{2} \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 \quad \Rightarrow e^{\pi i} + 1 = 0$$

$$\exp(2\pi i) = \exp(i\pi) \cdot \exp(i\pi) = 1 \quad \Rightarrow e^{2\pi i} = 1$$

(Überwind erhalte Verkettung von $e, \pi, 1, 0, i$)

7. Vektoren und Felder

bisher: Funktionen von reellen Variablen + deren Eigenschaften, Rechnungen, ...

komplexe Zahlen ($\rightarrow$ Ebene $\mathbb{R}^2$)

jetzt: 3-dimensionaler Raum, $\mathbb{R}^3$, "Physik spielt sich hier ab"

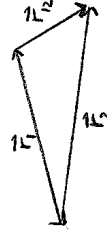
→ Beschreibung durch Richtungsangaben, Pfeile!

Bezugspunkt vereinbaren: Ursprung

Ortvektor $\vec{r}$: Pfeil Ursprung $\rightarrow$ Physik

Verschiebungsvektor:

Pfeil Punkt $\rightarrow$ Punkt



(Einheiten? Bsp: $\vec{v}$ in $\frac{m}{s}$? $\Leftrightarrow$ Überwindungsweg (cm of $\rho_{pm} \approx \frac{m}{s}$)))

Betrag: Länge des Pfeils, z.B. $|\vec{r}|=r$, $|\vec{v}|=v$, $|\vec{F}|=F$

→ Pfeil hat Richtung, Betrag, Anfangspunkt

Bsp Ball hat Los $\Rightarrow$ die Geschwindigkeit $\vec{v}$

Bsp Wasser-Strömung $\vec{v}(\vec{r})$



Bsp Erd-Gravitationsfeld $\vec{F}(\vec{r})$



$\Rightarrow$ anschauliche (Physiker-) Def:

Vektoren sind Pfeile best. Betr. und Richtung, die mit einer Zahl $\in \mathbb{R}$ multipliziert werden und die zu anderen physikalisch sinnvoll ist.

- Bem:
- $\bullet \neq$ Diskontinuierlicher Vektor (s. unten: bilden Vektor-Raum)
 - $\bullet$ Physik-Pfeil ist real (Vektoren aus Berechnungen)

1. Def-Zeile: Vektor $\hat{=}$ Gesamtheit der Pfeile mit ...
 $\rightarrow$ kann Repräsentanten wählen

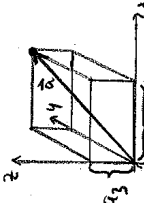
2. Def-Zeile: $1, 7 \rightarrow = \rightarrow$; $(-1) \cdot \rightarrow = \leftarrow$ etc. anschaulich klar
 $\rightarrow$ Einheitsvektor $\frac{1}{a} \cdot \vec{a} = \vec{e}$, $|\vec{e}|=1$; $\vec{a} = a\vec{e}$

3. Def-Zeile: (vgl. Bild oben) $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \vec{e}_3$
 funktioniert mit Vektoren gleicher Dimension (Übersetzungs-Regel)
 Reihenfolge egal: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
 $\rightarrow$ Nullvektor $\vec{0} := \vec{a} + (-\vec{a})$

"physikalisch sinnvoll"? $\rightarrow$ (an bsp verstehen):
 Bsp Geschwindigkeiten: Null? Add.? $\rightarrow$ Fluss:
 $\vec{v} = \vec{a} + \vec{v}$ 

Bsp Kräfte: $\rightarrow$ Federbrunne 
 $\Rightarrow$ Ja, sind Vektoren.

Bsp Drehungen: (rechte-Hand-Regel: Daumen $\hat{=}$ Drehachse, Finger $\hat{=}$ Drehrichtung, Betrag $\hat{=}$ Winkel)
 Test: $\uparrow + \leftarrow \neq \leftarrow + \uparrow$
 $\Rightarrow$ Nein, sind keine Vektoren

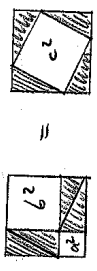
7.1 Komponentendarstellung, Eigenschaften, Vektorraum
 $\rightarrow$ bisher: Vektor $\hat{=}$ Pfeil; Addition $\hat{=}$ aneinanderbauen
 Veranschaulichung?! Vektor $\hat{=}$ gegeben; wähle Repräsentant ab Ursprung.

 messe Höhe der Spitze $\rightarrow a_3$, etc.
 Komponenten $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ (oder $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$)

Bem.: Systemhaft: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$
 $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (x, y, z) \leftarrow$ anschaulich
 • alle Komponenten haben gleiche Dimension, $[a_1] = [a_2] = [a_3] = [a] = [z]$
 Bsp $[v_3] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} = \frac{m}{s}$, $[y] = \text{Länge} = m$
 $\vec{v} = (1 \frac{m}{s}, 0, 2 \frac{m}{s}) = (1, 0, 2) \frac{m}{s}$
 • hier meist $\mathbb{R}^3$; Vekt. auf $\mathbb{R}^n$ einfach: $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$\rightarrow$ die oben eingeführten Pfeil-Eigenschaften in Komponenten-Sprache (gleich für $\mathbb{R}^n$)

Betrag: $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$
 (n=3: wegen Pythagoras: $a^2 = a_3^2 + b^2$, $b^2 = a_1^2 + a_2^2$)


Null: $c \cdot \vec{a} = (c a_1, c a_2, \dots, c a_n)$
 (anschaulisch klar: z.B. $c=2 \Rightarrow$ Strecken-Verdopplung)
 Add: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
 (anschaulisch klar: für 2-Komponente gilt z.B. $z = a_3 + b_3$)

Bem.: Pythagoras ist einfach, geometrischer Beweis


Vollständigkeit: mathematisch überprüfbar haben unsere Vektoren (des $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$) die Struktur eines Vektorraumes

Def Vektorraum: heisst ein Tripel $(V, +, \cdot)$, besteht aus
 (i) einer Menge V (mit Elementen $\vec{v}_1, \dots$, genannt "Vektoren")
 (ii) einer Abbildung $+$: $V \times V \rightarrow V$
 "Addition" $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$
 (iii) einer Abbildung $\cdot$: $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$
 "skalare Multiplikation" $(x, \vec{v}) \mapsto x \cdot \vec{v} \equiv x \cdot \vec{v}$ $\leftarrow$ Punkt egal
 mit den folgenden Eigenschaften ("Vektorraum-Axiome"):

((hier $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$; $x, y \in \mathbb{R}$))

- (1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ Kommutativgesetz
- (2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ Assoziativgesetz
- (3) $\exists \vec{0} \in V$ mit $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ Nullvektor
- (4) $\exists (-\vec{v}) \in V$ mit $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ inverser Vektor

- (5) $x(y\vec{v}) = (xy)\vec{v}$ Assoziativgesetz
- (6) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ neutrales Element
- (7) $x(\vec{u} + \vec{v}) = x\vec{u} + x\vec{v}$ Distributivgesetz
- (8) $(x+y)\vec{v} = x\vec{v} + y\vec{v}$

- Bem:
- die Elemente aus $\mathbb{R}$ heißen Skalare, die aus V heißen Vektoren; Bezeichnung... $\vec{v}, \vec{w} \in V, u, v = v, w = |v\rangle, |u\rangle$
 - haben oben einen Vektorraum (VR) über $\mathbb{R}$ definiert; können z.B. auch über $\mathbb{C}$ arbeiten, dann Skalare $\in \mathbb{C}$
 - unsere ursprüngliche Def. war der Spezialfall des sogenannten Euklid'schen (Vektor-)Raums, $V = \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ St\ddot{u}cke}} = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_i \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$
 - benutzen klassische Spielerei für Add. und Mult. in V und $\mathbb{R}$; a priori sind dies aber völlig verschiedene Dinge!
 - es gilt in Physik/Mechanik viele weitere (ausser $\mathbb{R}^n$) wichtige VR's. z.B. Polynome (vgl. Ü62), Hilbert-Raum (QH), ...

- Def Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_d \in V$ heißen eine Basis des VR's, wenn jedes $\vec{v} \in V$ als $\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_d \vec{e}_d = \sum_{i=1}^d x_i \vec{e}_i$ mit eindeutigen Zahlen $x_i \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. (Bsp. Ü62)
- Bem:
- d heißt dann Dimension von V ; $d \in \mathbb{N}$, aber auch $d = \infty$ mögl.
 - unser klassisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ kann hätte als Basis $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$; $d = n = 3$

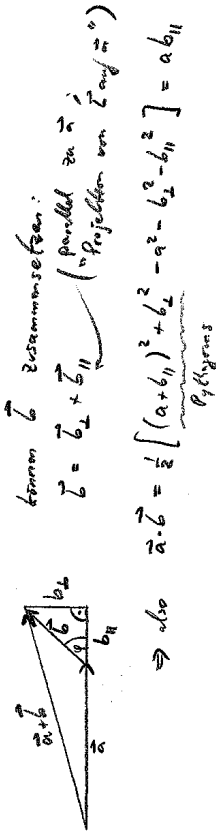
Bsp für Vektorräume in Physik [z. B. Einsteins, §15]

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: Ebene + Raum
Geschwindigkeit, Impuls, elektrische Feldstärke, ...
- $\mathbb{R}^1$: Raum-Zeit, spezielle Relativitätstheorie
(siehe Lillieschen c=1 $\Rightarrow$ kann Zeit in Längeneinheiten messen)
 $\{(x, y, z); z \in \mathbb{R}\} \rightarrow (x_0, x_1, x_2, x_3)$ mit $x_0 := ct$
- $\mathbb{R}^1$: "Phasenraum" der klassischen Elektrodynamik:
Teilchen-Beschreibung durch $\{\text{Ort}; \text{Impuls}\} \rightarrow (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$
- $\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^{12}$: Beschreibung von zwei Teilchen
Orte aller Konfigurationsraum $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ "Konfigurationsraum"
 $\rightarrow$ Phasenraum zugehörig $\mathbb{R}^{12}$
- $\mathbb{R}^{3N}, \mathbb{R}^{6N}$: Statistische Physik, Beschreibung sehr vieler ($N \sim 10^{23}$) Teilchen; z.B. Gasmoleküle
- komplexe VR's: Quantenmechanik (QM) beschreibt physikalische Systeme durch "Zustandsvektoren" oder "Wellenfunktionen" aus einem komplexen VR ("Hilbert-Raum")
- Lösungsmengen linearer Probleme sind VR's
Bsp $f(x) = Ax + Bx^{-1}$ (mit $A, B, x \in \mathbb{R}$)
erfüllt die (homogene, lineare, Differential-) Gleichung $f''(x) = f(x)$.
 $\rightarrow$ die Summe zweier verschiedener Lin. von $f'' = f$ ist auch wieder Lsg.; ebenso jedes Vielfache einer Lsg.; also sind "+" und "." für alle VR-Elemente (Lin.) def.
 $\rightarrow$ die Menge der reellen Lin. von $f'' = f$ ist also ein VR, in dem Falle des $\mathbb{R}^2$ (Lsg. durch (A, B) eindeutig festgelegt)

7.2 Skalarprodukt

(weder erst Nützlichkeit entstehen, anschließend im $\mathbb{R}^n$, dann mathematisch-axiomatische Verallgemeinerung)

Notation $\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 0$ (Pythagoras)
 $\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 2 \text{ Rest} =: 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$



Def $\vec{a} \cdot \vec{b} := a_{||} b = ab \cos(\varphi)$ heißt Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit $\vec{b}$
 $\uparrow$ definiert Cosinus; vgl. Kap. 6.4
 Gleichbedeutung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Bem: "Cosinus-Satz" $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varphi)$
 folgt aus Vektorrechnung: $(\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
 • Winkel dimensionslos messen! (vgl. Kap. 6.4)
 $\varphi = \frac{s}{R} = \frac{\text{Länge}}{\text{Länge}}$
 rechter Winkel = $\frac{\pi}{2}$ (nachrechnen: $\frac{\pi}{2} \approx 3,14159 \dots =: \pi$)

Eigenschaften des Skalarprodukts: (alle nachweisbar)

- $\vec{a}^2 := \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$; $|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a}^2}$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ab$
- $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ab$; $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ab$ (Scharfsche Ungleichung)
- $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $r_2 = r_3 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}$

- Bem:
- Schreibweise oft $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$
 - brauche oft Klammern: $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$!
 - nie durch ein Vektor teilen, " $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ " nicht def.
 - in Gleichungen aufpassen: Zahl = Zahl; Vektor = Vektor

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ in Komponenten schreiben:

mit kanonischen Einheitsvektoren $\vec{e}_i = (1, 0, 0), \dots$ als Basis:
 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$
 $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3)$
 $= a_1 b_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 b_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 b_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3$
 $= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Verallgemeinerung mathematisch abstrahiert lautet diese Struktur

Def Skalarprodukt (oder inneres Produkt) ist Abbildung

- $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$
- mit den Eigenschaften ("Skalarprodukt-Axiome")
- (1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ (Symmetrie)
- (2) $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$; $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (Positivität)
- (3) $(\lambda \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{w})$
- (4) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{w} = \vec{a} \cdot \vec{w} + \vec{b} \cdot \vec{w}$ (Linearität)

- Bem:
- ein Vektorraum mit einer so def. Skalarprodukt heißt "Prä-Hilbertraum"
 - unsere anschauliche Def war Spezialfall $V = \mathbb{R}^3$
 $\rightarrow$ kann für $V = \mathbb{R}^n$ $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$ nehmen (s. 6.63)
 - gibt andere Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ möglich; vgl. z.B. 6.64
 (z.B. $\vec{v} \cdot \vec{w} \Leftrightarrow \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$)

Def Die Norm (oder Länge, oder (Modul-)Betrag)

eines Vektors $\vec{v} \in V$ ist $|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Bem: • Schwarz (vgl. oben) $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{|\vec{v}|^2} = |\vec{v}|$

• aus den Schwarz-Ungleichungen (1)-(4) folgen

die Eigenschaften des Betrags, so wie auf S. 67 unten,

die "Norm-Eigenschaften": (a) $|\vec{v}| \geq 0$; $|\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

"Norm-Axiome"

(b) $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}|$

Dreiecksungl.

(c) $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$

Schwarzsche Ungl.

(d) $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}| |\vec{w}|$

folgen

(e) $|\vec{v} - \vec{w}| \geq ||\vec{v}| - |\vec{w}||$

Abstand zw. $\vec{v}, \vec{w}$

• für $V = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ist Norm eindeutige geometrische Länge

des Vektorpfeils

• für $V = \mathbb{R}^{n \geq 4}$ keine geom. Veranschaulichung mehr möglich

• für $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist $\vec{e}_v := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ Einheitsvektor in Richtung von $\vec{v}$

• falls $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ (und $\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{w} \neq \vec{0}$) sagt man, die

Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ stehen zueinander orthogonal (oder senkrecht; rechtenwinklig)

• für $V = \mathbb{R}^n$ gilt: $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } j=k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$

6-te Stelle

d.h. die kanonischen Basisvektoren sind alle

normiert und orthogonal zueinander $\Rightarrow$ sog. Orthonormalbasis

• der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in V \setminus \{\vec{0}\}$

ist allg. (und eindeutig) def. durch

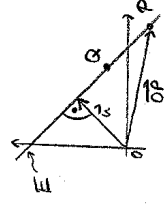
$\cos(\varphi) := \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|}, \varphi \in [0, \pi]$

$\in [-1, 1]$

$\rightarrow$ für $V = \mathbb{R}^n$ wieder geometrisch klar, s. oben.

Bsp $V = \mathbb{R}^n$; Gg für $\begin{cases} \text{Gerade } n=2 \\ \text{Ebene } n=3 \\ \text{Hyperebene } n \geq 4 \end{cases}$ durch $E =$

Punkt $P = (p_1 | p_2 | \dots | p_n)$, die senkrecht auf Vektor $\vec{a}$ steht?



$\Rightarrow$ Menge aller Punkte Q, für die $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{a}$

$\Rightarrow E = \{ Q \mid \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} = 0 \}$

$\Rightarrow E = \{ Q \mid \overrightarrow{OQ} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{a} (= \text{const.}) \}$

7.3 Kreuzprodukt

oder auch: "Vektorprodukt", oder "äußeres Produkt" für ...
Besonderheit des $\mathbb{R}^3$: (Vektg. auf $\mathbb{R}^n$ möglich, aber umständlich)
(hier: erst Def., dann geometrische Veranschaulichung)

Def Kreuzprodukt heisst die Abbildg $\times: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

mit $(\vec{v} := (v_1, v_2, v_3), \vec{w} := (w_1, w_2, w_3)) \mapsto \vec{v} \times \vec{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$

Bem: • andere Bezeichnungen: $[\vec{v}, \vec{w}]$, $[\vec{v}, \vec{w}]$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$, ...

stammt aus Def. folgen die Eigenschaften: (hier $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$)

Antisymmetrie

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Linearität

(b) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$

(c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$

(e) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$

(f) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ (sog. Spatprodukt)

Bem: • Beweis: S. 467

• Vorsicht: im allg. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (nicht assoziativ!)

7.4 Felder

↳ bisher: Funktionen $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

"Feld" := etwas $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ z.B. etwas $(\vec{r}, t)$

Physik-bsp: Temperatur $T(\vec{r}, t) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ "Skalarfeld"

Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ "Vektorfeld"

Def Ein Skalarfeld ist Abb. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Bsp $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) := e^{-x_1} + x_1^3 x_2^2 x_3$

((z.B. könnte $f(\vec{x})$ die Temperatur des Raumpunktes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ sein))

→ wählt man $x_2, x_3, \dots, x_n$ beliebig ab, so fest, wird

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine "ganz normale Funktion" von x_1 ; insbesondere heißt dann

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} := \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x_2, x_3, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x - x_1}$$

die partielle Ableitung von $f(\vec{x})$ nach x_1

((d.h. das ∂ steht d. heißt: $x_2 \dots x_n$ beim x_1 -Ableiten festhalten))

⇒ können also alle "normalen" Ableitungsregeln (vgl. Vor.)

sogar übertragen (indem wir $x_2, \dots, x_n$ einfach "vergessen"):

Bsp (wie oben) $f(\vec{x}) = e^{-x_1} + x_1^3 x_2^2 x_3$

x_2, x_3 behält

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \stackrel{!}{=} -e^{-x_1} + 3x_1^2 x_2^2 x_3$$

höhere Ableitungen wie gewohnt:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} = +e^{-x_1} + 6x_1 x_2^2 x_3$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} = -e^{-x_1} + 6x_2^2 x_3$$

$$\text{analog für } x_2, x_3: \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 2x_1^3 x_2 x_3; \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\text{Schreibweisen: } \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{x}) \stackrel{!}{=} \partial_{x_1} f(\vec{x}) \stackrel{!}{=} \partial_1 f(\vec{x}) \stackrel{!}{=} \dots$$

gemischte Ableitungen: (gleiches bsp wie oben) ((s. auch 4.69))

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} [2x_1^3 x_2 x_3] = 6x_1^2 x_2 x_3$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \right] = \frac{\partial}{\partial x_2} [-e^{-x_1} + 3x_1^2 x_2^2 x_3] = 6x_1^2 x_2 x_3$$

→ allgemein gilt über Sätze von Schwarz: (o.B.)

$$\text{Für } f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{R} \text{ gilt } \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_i}$$

für beliebige $j, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, falls beide Ableitungen bei $\vec{x} \in A$ stetig.

Def ein Vektorfeld ist Abb. $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^m$ ($n, m \in \mathbb{N}$)

$$\text{mit } \vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

→ jede Komponente ist ein Skalarfeld, können also wie gewohnt rechnen!

Bsp $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(\vec{x}) := (\sin(x_1) + x_2 x_3, e^{-x_3}, x_2^3)$

((z.B. könnte $\vec{F}(\vec{x})$ eine Strömungsgeschwindigkeit am Punkt $\vec{x}$ sein))

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{F}(\vec{x})}{\partial x_1} = (\cos(x_1), 0, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{F}(\vec{x})}{\partial x_2} = (x_3, 0, 3x_2^2)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{F}(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = (1, 0, 0)$$

Bsp $\vec{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{r}(t) := \left(\frac{1}{1+t^2}, e^{-t^2}, \cosh(2t) \right)$

((z.B. könnte $\vec{r}(t)$ der Ort eines Teilchens zum Zeitpunkt t sein))

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) := \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, -2te^{-t^2}, 2\sinh(2t) \right)$$

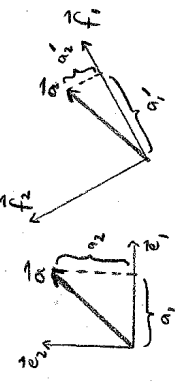
((z.B. Geschwindigkeit des Teilchens zu Zeit t))

8. Matrizen

8.1 Drehungen (hier anschaulich: $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$)

→ Physikalische Gesetze müssen unabhängig von der Betrachtungsweise sein.
 Das ist das, was man hier haben → was passiert mit Vektoren?

→ Koordinatensystem-Drehung
 Pfeile (= Vektoren) bleiben stehen
 Koordinaten ändern sich:
 "a'" := (a'_1, a'_2, a'_3) mit "neu" Basis $\vec{F}$ (Einheitsvektoren, wie $\vec{e}$)
 (hier: Vektoren variabel aufschreiben vom Vektor!)



$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \cdot \vec{a}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{a}_2 + \vec{F}_3 \cdot \vec{a}_3 \\ \vec{F}_2 \cdot \vec{a}_1 + \dots \\ \vec{F}_3 \cdot \vec{a}_1 + \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{F}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{F}_3 \cdot \vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{F}_2 \cdot \vec{a}_2 & \vec{F}_3 \cdot \vec{a}_2 \\ \vec{F}_3 \cdot \vec{a}_1 & \vec{F}_3 \cdot \vec{a}_2 & \vec{F}_3 \cdot \vec{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

hier: $a_k = (\vec{F}_1 \cdot \vec{a}_1, \vec{F}_2 \cdot \vec{a}_2, \vec{F}_3 \cdot \vec{a}_3) \cdot \vec{a}$

d.h. hier $D\vec{a}$ als (jedes Zeile) $\cdot \vec{a}$

allgemein: $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Operator: Element = neues Element

basis: $\vec{a}' = D\vec{a}$, $D = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \cdot \vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 \cdot \vec{a}_1 \\ \vec{F}_3 \cdot \vec{a}_1 \end{pmatrix}$ D-Zeilen: $\vec{F}_i$ im alten System
 D-Spalten: $\vec{e}_i$ im neuen

(schl) hier: $a'_j = \sum_{k=1}^3 D_{jk} a_k$

, $D_{jk} = \vec{F}_j \cdot \vec{a}_k$ (d.h. alles nur reelle Zahlen)

also $D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}$, und (z.B.) $D_{23} = \vec{F}_2 \cdot \vec{a}_3$

→ enge Beziehung für Matrizen sind anschaulich klar:

• $(D\vec{a})_j = \sum_{k=1}^3 D_{jk} a_k = \sum_{k=1}^3 (\vec{F}_j \cdot \vec{a}_k) a_k = \lambda (D\vec{a})_j$

allg.: $\lambda \cdot \vec{F}_j \cdot \vec{a}_k = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

• $(D(\vec{a}, \vec{b}))_j = \sum_{k=1}^3 D_{jk} (a_k + b_k) = D\vec{a} + D\vec{b}$

(⇒ Matrix-Multiplikation ist "lineare Operation")

in $\mathbb{R}^3$: 3 elementare Drehungen

$c := \cos(\varphi)$ $s := \sin(\varphi)$

$$D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



• Drehung um Winkel φ um z-Achse

$$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$$



Zwei Drehungen nacheinander

$\vec{F}'_1 \xrightarrow{(2)} \vec{F}'_2 \xrightarrow{(1)} \vec{F}'_3$

$\vec{a}'' = D^{(2)} \vec{a}'$, $\vec{a}' = D^{(1)} \vec{a}$

$\vec{a}'' = D^{(2)} (D^{(1)} \vec{a}) = \sum_{k=1}^3 D^{(2)}_{jk} D^{(1)}_{kl} a_l = \sum_{k=1}^3 D^{(2)}_{jk} a_k$

$\Rightarrow D^{(2)}_{jk} = \sum_{l=1}^3 D^{(2)}_{jk} D^{(1)}_{kl} = \sum_{l=1}^3 D^{(2)}_{jk} a_l$

$\Rightarrow D^{(2)}_{jk} = \sum_{l=1}^3 D^{(2)}_{jk} D^{(1)}_{kl} = \sum_{l=1}^3 D^{(2)}_{jk} a_l$

allgemein: $\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$(AB)_{jk} = \sum_{l=1}^3 A_{jl} B_{lk}$; Reihenfolge wichtig: $AB \neq BA$!

Zum Umgang mit Matrizen (und Indizes)

- $(A\vec{a})_j = A_{j1}a_1 + A_{j2}a_2 + A_{j3}a_3 = \sum_{k=1}^3 A_{jk}a_k$
- $(AB)_{jk} = \sum_{l=1}^3 A_{jl}B_{lk}$
- $(\lambda A)_{jk} = \lambda A_{jk}$
- $(A+B)_{jk} = A_{jk} + B_{jk}$
- "Spur": $\text{Sp}(A) := A_{11} + A_{22} + A_{33} = \sum_{i=1}^3 A_{ii}$
- wegen $\sum_{j=1}^3 (AB)_{jj} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{jk}B_{kj} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 B_{kj}A_{jk} = \sum_{k=1}^3 (BA)_{kk}$
- gilt: $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$
- und daher auch $\text{Sp}(AB \dots C) = \text{Sp}(B \dots CA)$

"transponierte Matrix": $(A^T)_{jk} := A_{kj}$

Bezeichnung: $A^T = A \Leftrightarrow$ "A ist symmetrisch"

$A^T = -A \Leftrightarrow$ "A ist antisymmetrisch"

(vgl. Funktionen: gerade/ungerade)

$$\begin{aligned} \text{Bsp } \vec{a} \cdot \vec{b} &= (D\vec{a}) \cdot (D\vec{b}) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 D_{j1}a_1 \sum_{l=1}^3 D_{jk}b_k \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_l (D^T)_{lj} D_{jk} b_k = \vec{a} \cdot (D^T D \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{mit } D^T D = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ s.a.} \end{aligned}$$

"Skalarprodukt ist invariant unter Drehungen"

insbesondere: $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ ist invariant!

"inverse Matrix": $A^{-1} :=$ die $A^{-1}A = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ erfüllende Matrix

Drehung und Drehwinkel

$$\text{es gilt: } DD^T = \begin{pmatrix} -\vec{f}_1 \\ -\vec{f}_2 \\ -\vec{f}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$D^T D = \begin{pmatrix} -\vec{e}_1' \\ -\vec{e}_2' \\ -\vec{e}_3' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' & \vec{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

(wegen Orthogonalität der jeweiligen Basisvektoren $\vec{f}_i, \vec{e}_i$)

$\rightarrow$ Drehung? (Idee: jeder auf der Drehung liegende Vektor wandert auf einer Kreisbahn um die Drehachse)

$$D\vec{b} = \vec{b}, \quad \text{Def. Drehung ist } \vec{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$\rightarrow$ Drehwinkel? (Idee: ob die Drehung um 90° oder 180° betrachtet)

$$\text{Sp}(D) = 1 + 2 \cos(\varphi)$$

Behauptung: die allg. Drehung um eine Achse $\vec{e} = (u, v, w)$ ist

$$D_{\vec{e}, \varphi} = \begin{pmatrix} c + (1-c)u^2 & (1-c)uv + sw & (1-c)uw - sv \\ (1-c)vu - sw & c + (1-c)v^2 & (1-c)vw + su \\ (1-c)wu + sv & (1-c)vw - su & c + (1-c)w^2 \end{pmatrix}$$

$c := \cos(\varphi)$
 $s := \sin(\varphi)$

$$\text{Test 1: } \text{Sp}(D_{\vec{e}, \varphi}) = 3c + (1-c)(u^2 + v^2 + w^2) = 2c + 1 \quad \text{mit } \vec{e}^2 = 1$$

$$\text{Test 2: } \vec{e} = (0, 0, 1) \Rightarrow D_{\vec{e}, \varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D_{z, \varphi} \quad \text{mit } \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bem.: Drehungen erhalten metrisches Skalarprodukt: $D = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix}, \vec{f}_i \cdot (\vec{f}_j + \vec{f}_k) = 1$

oft tritt die folgende Frage auf: $D \rightarrow$ Achse?

dazu muss die Gg. $D\vec{b} = \vec{b} \Leftrightarrow (D - \mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}$ gelöst werden.

$\rightarrow$ Gg. liegt $|\vec{b}|$ nicht fest, also folgt zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

eine der drei Gg. $(D - \mathbb{1})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus den beiden anderen.

(ist "linear abhängig")

$\rightarrow (D - \mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}$ ist Spezialfall des sog. "Eigenwertproblems",

d.h. der Frage, welche Elemente sind bei Operator-Anwendung reproduziert:

$$(\text{linear Operator}) (\text{Element}) = \text{Faktor} (\text{Element})$$

$$\left(\begin{matrix} \text{Drehung} \\ \text{mechanik} \end{matrix} \right) \rightarrow \vec{b} \quad H \quad \vec{b} = E \quad \vec{b}$$

gegeben gesucht: "Eigenvektor" (EV) $\vec{b}$

"Eigenwert" (EW) E

$\rightarrow$ hier: Drehmatrix hat stets den EW +1

und die Drehung als zugehörigen EV.

8.2 Lineare Gleichungssysteme

in der Physik oft: eine Größe hängt linear (d.h. $\propto$) von einer anderen ab

→ falls Abhängigkeit komplexer: vielleicht nicht

in einem gewissen Bereich eine lineare Näherung aus? (vgl. Potenzial)

allg.: wenn m Größen $y_1, y_2, \dots, y_m$ von n Größen $x_1, x_2, \dots, x_n$ linear abhängen, ist ein lineares Gleichungssystem erfüllt:

$$y_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n$$

$$y_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$y_m = A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n$$

; A_{jk} = Konstanten, z.B. $\in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$

bzw.: $y_j = \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k$

oder, die Konstanten A_{jk} als matrix aufgef. $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$
 $\vec{y} = A \vec{x}$; $\vec{y}$ hängt linear von $\vec{x}$ ab.

Bsp $m=n=2$, $y_1 = 2x_1 - 3x_2$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{y} = A \vec{x}$
 $y_2 = 4x_1 + 5x_2$ $\stackrel{A}{=}$

→ fassen wir $\vec{y}$ und als Konstante auf, stellt sich die

Frage nach der Existenz des Gleichungssystems: $\vec{x} = ?$

Bezeichnung: $A \vec{x} = \vec{b}$ heißt homogenes lineares Gleichungssystem

$A \vec{x} = \vec{b}$ $\stackrel{\text{inhomogen}}{\neq}$

(wobei $A = m \times n$ -Matrix, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$) $\xrightarrow{\text{abg.}} \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$
 oder $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$

falls $m=2$, also A quadratische Matrix, heißt das System

quadratisch

→ was sind die quadratischen Eigenschaften der Lösungssysteme?

• homogenes lineares Gleichungssystem: $A \vec{x} = \vec{0}$

→ klar: falls $A \vec{x} = \vec{0}$ und $A \vec{x}' = \vec{0}$,

dann auch $A(\vec{x} + \lambda \vec{x}') = \vec{0}$ mit beliebigem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$

⇒ Lösungsmenge ("allgemeine Lösung") ist stets ein Unterraum

↳ Bsp: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n=2$: Lösungsmenge ist ein Punkt (= Ursprung $\vec{0}$)
 oder eine Gerade (durch $\vec{0}$)
 oder der ganze $\mathbb{R}^2$

↳ Bsp: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n=3$:
 ist $\vec{0}$
 oder Gerade durch $\vec{0}$
 oder Ebene durch $\vec{0}$
 oder der ganze $\mathbb{R}^3$

(als VR besitzt die Lsgs-Ränge immer eine auflösf. Dimension)

→ für ein quadratisches System gilt: (Ausrechnen: unten)

Ist A invertierbar (d.h. $\exists A^{-1}$ mit $A^{-1}A = \mathbb{1}$, vgl. Kap. 8, 5.7.7)

dann: $A \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A^{-1}A \vec{x} = \mathbb{1} \vec{x} = \vec{x} = A^{-1} \vec{0} = \vec{0}$

⇒ $\vec{x} = \vec{0}$ ist die eindeutige Lsg

• inhomogenes lineares Gleichungssystem: $A \vec{x} = \vec{b}$

→ entweder gibt es keine Lösung (d.h. Lösungsmenge ist leer, $\emptyset$),

oder die allgemeine Lsg ist

$$\vec{x} = \vec{x}_{inh} + \vec{x}_{hom}$$

↑ allg. Lsg. von $A \vec{x}_{hom} = \vec{0}$

eine spezielle Lsg. von $A \vec{x}_{inh} = \vec{b}$

(denn: $A(\vec{x}_{inh} + \vec{x}_{hom}) = A \vec{x}_{inh} + A \vec{x}_{hom} = A \vec{x}_{inh} + \vec{0} = \vec{b}$)

→ für quadratische Systeme mit invertierbarer A gilt

es gibt die eindeutige Lsg $\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$

Def der Rang einer $m \times n$ -Matrix A ist

die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren
bzw. die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren

→ also ist $0 \leq \text{Rang}(A) \leq \min(m, n)$

Bsp $\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 1$, denn $3 \cdot (1, 2) + (-1) \cdot (3, 6) = (0, 0)$
bzw. $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

⇒ $A \vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar, falls $\text{Rang}(A) = n$
bzw. hat mindestens eine Lsg, falls $\text{Rang}(A) = m$

→ Lösungsmethode in der Praxis?

Gaußsches Eliminationsverfahren (sehr geeignet für z.B. Computer-Algorithmus)

Bsp Bestimme die Lsg des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 16 \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= -2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 14 \\ 4x_1 - x_2 - 9x_3 - 2x_4 - x_5 &= -5 \end{aligned}$$

1. Schritt Reihenfolge der Glz. egal
→ wähle als erste Bsp. eine mit x_1 -Term
→ mit elementare Dstf.

2. Schritt Normierung der Kopfzeile
(d.h. jede Zeile mit 1)
Faktor multiplizieren, d.h. Lsg. zu finden

3. Schritt Elimination von x_1 aus allen
Gz. bis auf die erste
(d.h. Glz. untereinander abziehen, ohne Lsg. zu finden)

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \text{"b"} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ -3 & -3 & 3 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 & 14 \\ 4 & -1 & -9 & -2 & -1 & -5 & -5 \end{array}$$

→ ab jetzt bleiben 1. Zeile unverändert; nicht mehr hinschreiben

4. Schritt Normierung der Kopfzeile des Restsystems

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 & 14 \\ -5 & -5 & -2 & -1 & -2 & -23 \end{array}$$

5. Schritt Elimination von x_2

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 & -27 \end{array}$$

→ x_2 -Koeff. zufällig auch 0; behalte stattdessen nur Restsystem

6. Schritt Normierung der Kopfzeile des Restsystems

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 & -27 \end{array}$$

7. Schritt Elimination von x_4

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}$$

8. Schritt Ergebnis zusammenfassen "Zeilensystem"

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}$$

⇒ 3 Glz. für 5 Variablen ($x_1, \dots, x_5$)

ben zwei Variablen frei wählen: nehme x_3, x_5

Glz. setzen "von unten" lösen:

$$\begin{aligned} 3. \text{ Zeile} &\Rightarrow x_4 = 4 + 2x_5 \\ 2. \text{ Zeile} &\Rightarrow x_2 = 4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}(4 + 2x_5) = 1 - x_3 - x_5 \\ 1. \text{ Zeile} &\Rightarrow x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}(4 + 2x_5) = 1 + 2x_3 + x_5 \end{aligned}$$

⇒ allg. Lsg. ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ "2D Ebene im 5D Raum"

Berechnung der inversen Matrix (gilt genauso: nur "b" → 1)

Bsp Inverse von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$?

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & -2 & 2 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$