

Aufgabe 44: $SU(2)$ Eichtransformationen

Eine allgemeine $SU(2)$ -Transformation kann als $\hat{\Phi} \rightarrow \hat{\Phi}' = U\hat{\Phi}$ geschrieben werden, wobei

$$U = \mathbb{1}_{2 \times 2} \cdot \cos |\theta| + i \sigma^a \frac{\theta^a}{|\theta|} \cdot \sin |\theta| \quad \text{sowie} \quad |\theta| \equiv \left(\sum_{a=1}^3 \theta^a \theta^a \right)^{1/2}.$$

Hier sind σ^a mit $a = 1, 2, 3$ die drei Pauli-Matrizen (s. Aufgabe 18).

(a) Zeigen Sie zunächst, dass U wirklich eine $SU(2)$ -Matrix ist, d.h. dass $U^\dagger U = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ sowie $\det(U) = 1$ gelten.

(b) Wie transformiert sich $\hat{\Phi} \equiv i\sigma^2 \hat{\Phi}^*$?

Aufgabe 45: $U(1)$ Eichtransformationen

Die Felder $\{\hat{Q}'_{1L}, \hat{\Phi}, \hat{u}_R, \hat{d}_R\}$ haben jeweils die Hyperladungen $Q_Y = \{-1/6, -1/2, -2/3, 1/3\}$. Zeigen Sie, dass sowohl

$$\hat{Q}'_{1L} \hat{\Phi} \hat{u}_R \quad \text{als auch} \quad \hat{Q}'_{1L} \hat{\Phi} \hat{d}_R$$

invariant bezüglich der Hyperladungs-Eichsymmetrie $U(1)_Y$ sind.

Aufgabe 46: Vektorbosonmassen

Was ist, ausgehend von Aufgabe 43, die Vorhersage des Standardmodells für m_Z/m_W ? Vergleichen Sie mit dem Experiment (bzw. dem PDG-Booklet). Was erhalten Sie für den Parameter v in $m_W = g_w v/2$? [Diese Größe ist als "Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes" bekannt.]

Aufgabe 47: globale Symmetrie

Betrachten Sie ein Potential wie im Standardmodell,

$$V(\hat{\Phi}) = -\mu^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} + \lambda (\hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi})^2,$$

aber jetzt im Falle einer "globalen" Symmetrie, wobei

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_2 + i\hat{\phi}_3 \\ v + \hat{\phi}_0 + i\hat{\phi}_1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Massen der vier Teilchen $\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3$. Warum kann es in der Natur keine (bei den typischen Energieskalen der Teilchenphysik) spontan gebrochene globale Symmetrie geben?