

Aufgabe 11: Lösung der Klein-Gordon-Gleichung

Zeigen Sie, daß die in der Vorlesung angegebene Lösung $\hat{\phi}(x) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} \right)$ die Vertauschungsrelationen $\left[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \partial_0 \hat{\phi}^\dagger(t, \mathbf{y}) \right] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ erfüllt.

Aufgabe 12: Klein-Gordon-Gleichung $[\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2] \phi = 0$

Zeigen Sie daß $Q \equiv i \int d^3\mathbf{x} (\phi^* \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^*)$ eine Erhaltungsgröße ist.

Aufgabe 13: Dirac-Gleichung $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$

(a) Zeigen Sie: Der Dirac-adjungierte Spinor $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ erfüllt $\bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0$.

(b) Ist die Ladung $Q \equiv \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \gamma_0 \psi$ eine Erhaltungsgröße?

Aufgabe 14: Normierung der Dirac-Lösung

Betrachten Sie die Spinoren

$$u(\mathbf{p}, s) = c_1 (\not{p} + m) \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\mathbf{p}, s) = c_2 (\not{p} - m) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \xi_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_- \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß die Normierungen $\bar{u}(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s') = 2m\delta_{s,s'}$ sowie $\bar{v}(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s') = -2m\delta_{s,s'}$ durch $c_1 = -c_2 = (E_{\mathbf{p}} + m)^{-1/2}$ erfüllt werden können.

Was folgt dann für $u^\dagger(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s')$ und $v^\dagger(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s')$?

Aufgabe 15: Helizitäts- und Chiralitätsoperatoren

Betrachten wir den Helizitätsoperator $h(\mathbf{p}) = \mathbf{e}_{\mathbf{p}} \cdot \vec{\Sigma}$ sowie den Chiralitätsoperator γ_5 , wobei

$$\mathbf{e}_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \text{Pauli-Matrizen}.$$

Zeigen Sie, daß

(a) $h^2(\mathbf{p}) = \mathbb{1}_{4 \times 4}$ gilt.

(b) die Eigenwerte von $h(\mathbf{p})$ und γ_5 gleich ± 1 sind.

(c) für $P_\pm^{(h)} = \frac{1 \pm h}{2}$ die Beziehungen $(P_\pm^{(h)})^2 = P_\pm^{(h)}$ und $P_+^{(h)} P_-^{(h)} = 0$ gelten.

(d) der Chiralitätseigenwert von $u_L \equiv P_- u$, mit $P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}$, gleich -1 ist.