Elementarteilchenphysik → Teilchen (WS 08/09)

YS, E6-118 (Sprechst. Mo 16-18 u.n.V.), 6211

www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/teilchen

Grutu; CERN-Ausstellung?; lange Nacht?; Ski zu ekvv?

1.0 Organisatorisches

Vorl Mo 14.15 – 16 (D01-249) Start: 13. Okt. 08
Mi 10.15 – 12 ✗

Übg Do 16.15 – 18 (D6-135) evtl.: Do 8-10; 10-12; 18-20
Fr 10-12; 11-13; 15-17; 16-18
Start: 23. Okt. 08

Regeln V Anw + Ü Anw + Ü aktiv (vorrechnen) + mdl. Prüfg
3 LP
6 LP
9 LP

Literatur s. Semesterapparat
z.B. Griffiths, Elementarteilchenphysik (Standard Model)
Cottingham/Greenwood, Introduction to the SM of Particle Physics
Becchi/Ridolfi, Introduction to Relativistic Processes and the SM of EW Interactions
Nachtmann, Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik
Halzen/Martin, Quarks and Leptons
Burgess/Moore, The SM
↳ Gast-Prof E6, WS 08/09

Bibliothek QE 200: meterweise ...
(check Index jedes Buches auf "Majorana" vor Kauf)

1.1 Einleitung

Ziele dieser Vorl:
- Formulierung der Theorie des Standardmodells (SM)
- (Quanten-) Feldtheorie, Feynmanregeln
- Phänomenologie des SM
- Empirische quantitative Aussagen herleiten
  - z.B. Wirkungsquerschnitte, Zerfallsraten in 1. Ord. Stö.
- Diskussion von Ideen zur Erweiterung des SM

Was diese Vorl nicht bietet
- Quantenfeldtheorie (→ SS 2009; ~6. Sem.)
- Historische Entwicklung des SM (→ s. z.B. [Griffiths, S. 13-52])
- Beschreibung der experimentellen Apparaturen + Daten (→ s. z.B. [Perkins])

als kleiner Appetizer: → [einleitung.pdf]
↳ Teilchen; Wechselwirkungen; SM

unbekannte Teile des SM

- Higgs-Boson
  gibt den anderen Teilchen Masse
  könnte schwer sein; exp. Suche läuft ($E=mc^2$)
- Massenspektrum der Neutrinos ν
  könnte Bedeutung für Expansionsrate des Universums haben
  viele Experimente zur Massenbestimmung

Fragen, die über das SM hinausgehen

- Quantengravitation?
  wichtig z.B. in Innern von schwarzen Löchern
- (mathematische) Eleganz?
  warum drei Familien / verschiedene Ladungen / verschiedene Massen / ...
- SM bricht bei sehr hohen E zusammen
  Problem von "Divergenzen" in QFT-Rechnungen

Ideen jenseits des SM

- String theorie
  Teilchen → Fäden + Vibrationen ← exp. Nachweis?!
  ∃ Quantengrav. (?); ∃ zusätzliche Dimensionen
- Supersymmetrie ← exp. Nachweis?!
  Teilchen → 2x Teilchen; Fermionen ⟷ Bosonen
  könnten "Dunkle Materie" sein
- GUT's
  mathemat. Struktur des SM vereinheitlichen / herleiten
  sagt z.B. Instabilität des Protons voraus ← exp. Nachweis?!

1.2 Inventar des SM

→ offizielle Liste der Elementarteilchen + deren Eigenschaften:
Particle Data Group; pdg.lbl.gov → [pdgExamplePages.pdf]

Eigenschaften?

Masse
Lebensdauer bzw. Zerfallsrate
Zerfallskanäle (← bestimmt die Wechselw. des SM)
innere Struktur bzw. Quantenzahlen
Spin (Eigendrehimpuls) J ((Fermionen $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$; Bosonen $0, 1, \ldots$))
el. Ladung Q (in Einheiten von e)
Parität $P = \pm 1$
Ladungskonjugation $C = \pm 1$
Flavor-Quantenzahlen
Isospin I_3 (($= +\frac{1}{2}$ (u), $-\frac{1}{2}$ (d)))
Strangeness S (($= -1$ (s), 0 (sonst)))
Charmness C (($= +1$ (c), ⋮))
Bottomness B (($= -1$ (b), ⋮))
Topness T (($= +1$ (t), ⋮))
Leptonzahl L (($= +1$ ($e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$), ⋮))
Baryonzahl B (($= +\frac{1}{3}$ (u, d, c, s, t, b), ⋮))

→ einige der Quantenzahlen sind bei allen Realprozessen exakt erhalten, einige nur in der starken Wechselw.

Antiteilchen?

Masse, Lebensdauer, Spin wie Teilchen
andere Quantenzahlen meist entgegengesetzt
Bezeichnung: z.B. $\bar{p}, \bar{n}, \bar{\nu}_e, e^+, \mu^+, \ldots$

Hadronen (unterliegen der starken Ww.)

Mesonen $q\bar{q}$-Systeme, z.B. $\pi^+(u\bar{d})$, $K^0(d\bar{s})$, ...
Baryonen qqq-Systeme, z.B. $p(uud)$, $n(udd)$, ...
} viele! → PDG

Leptonen (spüren starke Ww. nicht)

e^-, μ^-, τ^-; ν_e, ν_μ, ν_τ

1.3 Einheiten

früher: CGS (centimeter - gram - second)
→ MKS (Meter - Kilogramm - Sekunde)
A (Ampere)

nennt man jetzt SI (Système International d'unités)

Energie SI: $J = \frac{kg\, m^2}{s^2}$

Teilchenphys.: $eV = 1.602 \cdot 10^{-19}\, CV = 1.602 \cdot 10^{-19}\, J$

$1\, GeV = 10^9\, eV$

Impuls SI: $|\vec{p}| = \frac{kg\, m}{s}$

Teilchenphys.: $E = \sqrt{(mc^2)^2 + |\vec{p}c|^2}$

$\vec{p}c \equiv \vec{p}_{neu}$; $[\vec{p}_{neu}] = GeV$

Masse $\equiv m_{neu}$; $[m_{neu}] = GeV$

Geschwindigkeit $v_{neu} = \frac{p_{neu}}{E} = \frac{p_{alt} \cdot c}{E} = \frac{v_{alt}}{c} = \beta_{alt}$

Lebensdauer $[\tau] = s$

Zerfallsrate $\Gamma \equiv \frac{1}{\tau}$; $[\Gamma] = \frac{1}{s}$ (neu: s.u.)

Länge $[l] = fm = fermi = 10^{-15} m$

wir wissen aus QM: Länge ≙ Impuls

$\vec{p}_{alt} = \hbar \vec{k} = \hbar \frac{2\pi}{\lambda_{alt}} \vec{e}_{\vec{k}}$; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ← Planck'sche Konst.

$l_{neu} \equiv \frac{l_{alt}}{\hbar c}$

z.B. $\frac{fm}{\hbar c} = \frac{10^{-15} m}{1.0546 \cdot 10^{-34}\, Js \cdot 2.9979 \cdot 10^8\, m/s} = \frac{1}{197.3\, MeV}$

((⇒ $GeV \cdot fm \approx 5\, \hbar c$))

Zerfallsrate $\Gamma_{neu} \equiv \hbar \Gamma_{alt}$; z.B. $\frac{\hbar}{10^{-23} s} = \frac{10^{23}}{s} \cdot 1.0546 \cdot 10^{-34}\, Js = 65.8\, MeV$

Temperatur $T_{neu} \equiv k_B T_{alt}$; z.B. $10^4 K \cdot k_B = 10^4 K \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} = 0.86\, eV$

⇒ ab jetzt: wir schreiben alle Gl. in den neuen Größen
alles hat Dimension von Energie
"natürliche Einheiten", $\boxed{\hbar = c = k_B = 1}$

Volume 667, Issues 1–5, 18 September 2008 ISSN 0370-2693

ELSEVIER

PHYSICS LETTERS B

REVIEW OF PARTICLE PHYSICS

July 2008

COMPLETE VOLUME

Available online at
ScienceDirect
www.sciencedirect.com

http://www.elsevier.com/locate/physletb

SUMMARY TABLES OF PARTICLE PROPERTIES

Extracted from the Particle Listings of the
Review of Particle Physics
C. Amsler *et al.*, PL **B667**, 1 (2008)
Available at `http://pdg.lbl.gov`

Particle Data Group

C. Amsler, M. Doser, M. Antonelli, D.M. Asner, K.S. Babu, H. Baer, H.R. Band, R.M. Barnett, E. Bergren, J. Beringer, G. Bernardi, W. Bertl, H. Bichsel, O. Biebel, P. Bloch, E. Blucher, S. Blusk, R.N. Cahn, M. Carena, C. Caso, A. Ceccucci, D. Chakraborty, M.-C. Chen, R.S. Chivukula, G. Cowan, O. Dahl, G. D'Ambrosio, T. Damour, A. de Gouvêa, T. DeGrand, B. Dobrescu, M. Drees, D.A. Edwards, S. Eidelman, V.D. Elvira, J. Erler, V.V. Ezhela, J.L. Feng, W. Fetscher, B.D. Fields, B. Foster, T.K. Gaisser, L. Garren, H.-J. Gerber, G. Gerbier, T. Gherghetta, G.F. Giudice, M. Goodman, C. Grab, A.V. Gritsan, J.-F. Grivaz, D.E. Groom, M. Grünewald, A. Gurtu, T. Gutsche, H.E. Haber, K. Hagiwara, C. Hagmann, K.G. Hayes, J.J. Hernández-Rey, K. Hikasa, I. Hinchliffe, A. Höcker, J. Huston, P. Igo-Kemenes, J.D. Jackson, K.F. Johnson, T. Junk, D. Karlen, B. Kayser, D. Kirkby, S.R. Klein, I.G. Knowles, C. Kolda, R.V. Kowalewski, P. Kreitz, B. Krusche, Yu.V. Kuyanov, Y. Kwon, O. Lahav, P. Langacker, A. Liddle, Z. Ligeti, C.-J. Lin, T.M. Liss, L. Littenberg, J.C. Liu, K.S. Lugovsky, S.B. Lugovsky, H. Mahlke, M.L. Mangano, T. Mannel, A.V. Manohar, W.J. Marciano, A.D. Martin, A. Masoni, D. Milstead, R. Miquel, K. Mönig, H. Murayama, K. Nakamura, M. Narain, P. Nason, S. Navas, P. Nevski, Y. Nir, K.A. Olive, L. Pape, C. Patrignani, J.A. Peacock, A. Piepke, G. Punzi, A. Quadt, S. Raby, G. Raffelt, B.N. Ratcliff, B. Renk, P. Richardson, S. Roesler, S. Rolli, A. Romaniouk, L.J. Rosenberg, J.L. Rosner, C.T. Sachrajda, Y. Sakai, S. Sarkar, F. Sauli, O. Schneider, D. Scott, W.G. Seligman, M.H. Shaevitz, T. Sjöstrand, J.G. Smith, G.F. Smoot, S. Spanier, H. Spieler, A. Stahl, T. Stanev, S.L. Stone, T. Sumiyoshi, M. Tanabashi, J. Terning, M. Titov, N.P. Tkachenko, N.A. Törnqvist, D. Tovey, G.H. Trilling, T.G. Trippe, G. Valencia, K. van Bibber, M.G. Vincter, P. Vogel, D.R. Ward, T. Watari, B.R. Webber, G. Weiglein, J.D. Wells, M. Whalley, A. Wheeler, C.G. Wohl, L. Wolfenstein, J. Womersley, C.L. Woody, R.L. Workman, A. Yamamoto, W.-M. Yao, O.V. Zenin, J. Zhang, R.-Y. Zhu, P.A. Zyla

Technical Associates:

G. Harper, V.S. Lugovsky, P. Schaffner

©Regents of the University of California

(Approximate closing date for data: January 15, 2008)

GAUGE AND HIGGS BOSONS

γ

$I(J^{PC}) = 0,1(1^{--})$

Mass $m < 1 \times 10^{-18}$ eV
Charge $q < 5 \times 10^{-30}\ e$
Mean life τ = Stable

g or gluon

$I(J^P) = 0(1^-)$

Mass $m = 0$ [a]
SU(3) color octet

W

$J = 1$

Charge $= \pm 1\ e$
Mass $m = 80.398 \pm 0.025$ GeV
$m_Z - m_W = 10.4 \pm 1.6$ GeV
$m_{W^+} - m_{W^-} = -0.2 \pm 0.6$ GeV
Full width $\Gamma = 2.141 \pm 0.041$ GeV
$\langle N_{\pi^\pm} \rangle = 15.70 \pm 0.35$
$\langle N_{K^\pm} \rangle = 2.20 \pm 0.19$
$\langle N_p \rangle = 0.92 \pm 0.14$
$\langle N_{\rm charged} \rangle = 19.39 \pm 0.08$

W^- modes are charge conjugates of the modes below.

W^+ DECAY MODES		Fraction (Γ_i/Γ)	Confidence level	p (MeV/c)
$\ell^+\nu$	[b]	(10.80 ± 0.09) %		–
$e^+\nu$		(10.75 ± 0.13) %		40199
$\mu^+\nu$		(10.57 ± 0.15) %		40199
$\tau^+\nu$		(11.25 ± 0.20) %		40179
hadrons		(67.60 ± 0.27) %		–
$\pi^+\gamma$		$< 8 \times 10^{-5}$	95%	40199
$D_s^+\gamma$		$< 1.3 \times 10^{-3}$	95%	40175
cX		(33.4 ± 2.6) %		–
$c\overline{s}$		(31^{+13}_{-11}) %		–
invisible	[c]	(1.4 ± 2.8) %		–

Z

$J = 1$

Charge $= 0$
Mass $m = 91.1876 \pm 0.0021$ GeV [d]
Full width $\Gamma = 2.4952 \pm 0.0023$ GeV
$\Gamma(\ell^+\ell^-) = 83.984 \pm 0.086$ MeV [b]
$\Gamma(\text{invisible}) = 499.0 \pm 1.5$ MeV [e]
$\Gamma(\text{hadrons}) = 1744.4 \pm 2.0$ MeV
$\Gamma(\mu^+\mu^-)/\Gamma(e^+e^-) = 1.0009 \pm 0.0028$
$\Gamma(\tau^+\tau^-)/\Gamma(e^+e^-) = 1.0019 \pm 0.0032$ [f]

Average charged multiplicity

$\langle N_{charged} \rangle = 20.76 \pm 0.16$ (S = 2.1)

Couplings to leptons

$g_V^\ell = -0.03783 \pm 0.00041$
$g_A^\ell = -0.50123 \pm 0.00026$
$g^{\nu_\ell} = 0.5008 \pm 0.0008$
$g^{\nu_e} = 0.53 \pm 0.09$
$g^{\nu_\mu} = 0.502 \pm 0.017$

Asymmetry parameters [g]

$A_e = 0.1515 \pm 0.0019$
$A_\mu = 0.142 \pm 0.015$
$A_\tau = 0.143 \pm 0.004$
$A_s = 0.90 \pm 0.09$
$A_c = 0.670 \pm 0.027$
$A_b = 0.923 \pm 0.020$

Charge asymmetry (%) at Z pole

$A_{FB}^{(0\ell)} = 1.71 \pm 0.10$
$A_{FB}^{(0u)} = 4 \pm 7$
$A_{FB}^{(0s)} = 9.8 \pm 1.1$
$A_{FB}^{(0c)} = 7.07 \pm 0.35$
$A_{FB}^{(0b)} = 9.92 \pm 0.16$

QUARKS

The u-, d-, and s-quark masses are estimates of so-called "current-quark masses," in a mass-independent subtraction scheme such as $\overline{\rm MS}$ at a scale $\mu \approx 2$ GeV. The c- and b-quark masses are the "running" masses in the $\overline{\rm MS}$ scheme. For the b-quark we also quote the 1S mass. These can be different from the heavy quark masses obtained in potential models.

u

$I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 1.5$ to 3.3 MeV [a] Charge $= \frac{2}{3}\ e$ $I_z = +\frac{1}{2}$
$m_u/m_d = 0.35$ to 0.60

d

$I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 3.5$ to 6.0 MeV [a] Charge $= -\frac{1}{3}\ e$ $I_z = -\frac{1}{2}$
$m_s/m_d = 17$ to 22
$\overline{m} = (m_u + m_d)/2 = 2.5$ to 5.0 MeV

s

$I(J^P) = 0(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 104^{+26}_{-34}$ MeV [a] Charge $= -\frac{1}{3}\ e$ Strangeness $= -1$
$(m_s - (m_u + m_d)/2)/(m_d - m_u) = 30$ to 50

c

$I(J^P) = 0(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 1.27^{+0.07}_{-0.11}$ GeV Charge $= \frac{2}{3}\ e$ Charm $= +1$

b

$I(J^P) = 0(\frac{1}{2}^+)$

Charge $= -\frac{1}{3}\ e$ Bottom $= -1$

Mass $m = 4.20^{+0.17}_{-0.07}$ GeV ($\overline{\rm MS}$ mass)

t

$I(J^P) = 0(\frac{1}{2}^+)$

Charge $= \frac{2}{3}\ e$ Top $= +1$

Mass $m = 171.2 \pm 2.1$ GeV [b] (direct observation of top events)

t DECAY MODES		Fraction (Γ_i/Γ)	Confidence level	p (MeV/c)
Wq ($q = b, s, d$)				–
Wb				–
$\ell\nu_\ell$ anything	[c,d]	(9.4 ± 2.4) %		–
γq (q=u,c)	[e]	$< 5.9 \times 10^{-3}$	95%	–
$\Delta T = 1$ weak neutral current ($T1$) modes				
Zq (q=u,c)	$T1$	[f] < 13.7 %	95%	–

b' (4th Generation) Quark, Searches for

Mass $m >$ 190 GeV, CL = 95% ($p\overline{p}$, quasi-stable b')
Mass $m >$ 199 GeV, CL = 95% ($p\overline{p}$, neutral-current decays)
Mass $m >$ 128 GeV, CL = 95% ($p\overline{p}$, charged-current decays)
Mass $m >$ 46.0 GeV, CL = 95% (e^+e^-, all decays)

t' (4th Generation) Quark, Searches for

Mass $m >$ 256 GeV, CL = 95% ($p\overline{p}$, $t'\overline{t}'$ prod., $t' \to Wq$)

Free Quark Searches

All searches since 1977 have had negative results.

NOTES

[a] The ratios m_u/m_d and m_s/m_d are extracted from pion and kaon masses using chiral symmetry. The estimates of u and d masses are not without controversy and remain under active investigation. Within the literature there are even suggestions that the u quark could be essentially massless. The s-quark mass is estimated from SU(3) splittings in hadron masses.

[b] Based on published top mass measurements using data from Tevatron Run-I and Run-II. Including also the most recent unpublished results from Run-II, the Tevatron Electroweak Working Group reports a top mass of $172.6 \pm 0.8 \pm 1.1$ GeV. See the note "The Top Quark" in the Quark Particle Listings of this *Review*.

[c] ℓ means e or μ decay mode, not the sum over them.

[d] Assumes lepton universality and W-decay acceptance.

[e] This limit is for $\Gamma(t \to \gamma q)/\Gamma(t \to Wb)$.

[f] This limit is for $\Gamma(t \to Zq)/\Gamma(t \to Wb)$.

LIGHT UNFLAVORED MESONS
($S = C = B = 0$)

For $I = 1$ (π, b, ρ, a): $u\overline{d}$, $(u\overline{u}-d\overline{d})/\sqrt{2}$, $d\overline{u}$;
for $I = 0$ (η, η', h, h', ω, ϕ, f, f'): $c_1(u\overline{u}+d\overline{d}) + c_2(s\overline{s})$

$\pi^\pm$

$I^G(J^P) = 1^-(0^-)$

Mass $m = 139.57018 \pm 0.00035$ MeV (S = 1.2)
Mean life $\tau = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8}$ s (S = 1.2)
$c\tau = 7.8045$ m

$\pi^\pm \to \ell^\pm \nu\gamma$ form factors [a]

$F_V = 0.017 \pm 0.008$
$F_A = 0.0115 \pm 0.0005$ (S = 1.2)
$R = 0.059^{+0.009}_{-0.008}$

π^- modes are charge conjugates of the modes below.

For decay limits to particles which are not established, see the appropriate Search sections (Massive Neutrino Peak Search Test, A^0 (axion), and Other Light Boson (X^0) Searches, etc.).

π^+ DECAY MODES		Fraction (Γ_i/Γ)	Confidence level	p (MeV/c)
$\mu^+\nu_\mu$	[b]	(99.98770±0.00004) %		30
$\mu^+\nu_\mu\gamma$	[c]	(2.00 ±0.25) $\times 10^{-4}$		30
$e^+\nu_e$	[b]	(1.230 ±0.004) $\times 10^{-4}$		70
$e^+\nu_e\gamma$	[c]	(1.61 ±0.23) $\times 10^{-7}$		70
$e^+\nu_e\pi^0$		(1.036 ±0.006) $\times 10^{-8}$		4
$e^+\nu_e e^+e^-$		(3.2 ±0.5) $\times 10^{-9}$		70
$e^+\nu_e\nu\overline{\nu}$		< 5 $\times 10^{-6}$	90%	70
Lepton Family number (*LF*) or Lepton number (*L*) violating modes				
$\mu^+\overline{\nu}_e$	*L*	[d] < 1.5 $\times 10^{-3}$	90%	30
$\mu^+\nu_e$	*LF*	[d] < 8.0 $\times 10^{-3}$	90%	30
$\mu^-e^+e^+\nu$	*LF*	< 1.6 $\times 10^{-6}$	90%	30

π^0

$I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{-+})$

Mass $m = 134.9766 \pm 0.0006$ MeV (S = 1.1)
$m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} = 4.5936 \pm 0.0005$ MeV
Mean life $\tau = (8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17}$ s (S = 3.0)
$c\tau = 25.1$ nm

For decay limits to particles which are not established, see the appropriate Search sections (A^0 (axion) and Other Light Boson (X^0) Searches, etc.).

π^0 DECAY MODES		Fraction (Γ_i/Γ)	Scale factor/ Confidence level	p (MeV/c)
2γ		(98.798±0.032) %	S=1.1	67
$e^+e^-\gamma$		(1.198±0.032) %	S=1.1	67
γpositronium		(1.82 ±0.29) $\times 10^{-9}$		67
$e^+e^+e^-e^-$		(3.14 ±0.30) $\times 10^{-5}$		67
e^+e^-		(6.46 ±0.33) $\times 10^{-8}$		67
4γ		< 2 $\times 10^{-8}$	CL=90%	67
$\nu\overline{\nu}$	[e]	< 2.7 $\times 10^{-7}$	CL=90%	67
$\nu_e\overline{\nu}_e$		< 1.7 $\times 10^{-6}$	CL=90%	67
$\nu_\mu\overline{\nu}_\mu$		< 1.6 $\times 10^{-6}$	CL=90%	67
$\nu_\tau\overline{\nu}_\tau$		< 2.1 $\times 10^{-6}$	CL=90%	67
$\gamma\nu\overline{\nu}$		< 6 $\times 10^{-4}$	CL=90%	67
Charge conjugation (*C*) or Lepton Family number (*LF*) violating modes				
3γ	*C*	< 3.1 $\times 10^{-8}$	CL=90%	67
μ^+e^-	*LF*	< 3.8 $\times 10^{-10}$	CL=90%	26
μ^-e^+	*LF*	< 3.4 $\times 10^{-9}$	CL=90%	26
$\mu^+e^- + \mu^-e^+$	*LF*	< 1.72 $\times 10^{-8}$	CL=90%	26

η

$I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{-+})$

Mass $m = 547.853 \pm 0.024$ MeV [f]
Full width $\Gamma = 1.30 \pm 0.07$ keV [g]

C-nonconserving decay parameters

$\pi^+\pi^-\pi^0$ Left-right asymmetry $= (0.09 \pm 0.17) \times 10^{-2}$
$\pi^+\pi^-\pi^0$ Sextant asymmetry $= (0.18 \pm 0.16) \times 10^{-2}$
$\pi^+\pi^-\pi^0$ Quadrant asymmetry $= (-0.17 \pm 0.17) \times 10^{-2}$
$\pi^+\pi^-\gamma$ Left-right asymmetry $= (0.9 \pm 0.4) \times 10^{-2}$
$\pi^+\pi^-\gamma$ β (D-wave) $= -0.02 \pm 0.07$ (S = 1.3)

Dalitz plot parameter

$\pi^0\pi^0\pi^0$ $\alpha = -0.031 \pm 0.004$

η DECAY MODES		Fraction (Γ_i/Γ)	Scale factor/ Confidence level	p (MeV/c)
Neutral modes				
neutral modes		(71.91±0.34) %	S=1.2	–
2γ	[g]	(39.31±0.20) %	S=1.1	274
$3\pi^0$		(32.56±0.23) %	S=1.1	179
$\pi^0 2\gamma$		(4.4 ±1.5) $\times 10^{-4}$	S=2.0	257
$\pi^0\pi^0\gamma\gamma$		< 1.2 $\times 10^{-3}$	CL=90%	238
4γ		< 2.8 $\times 10^{-4}$	CL=90%	274
invisible		< 6 $\times 10^{-4}$	CL=90%	–
Charged modes				
charged modes		(28.06±0.34) %	S=1.2	–
$\pi^+\pi^-\pi^0$		(22.73±0.28) %	S=1.2	174
$\pi^+\pi^-\gamma$		(4.60±0.16) %	S=2.1	236
$e^+e^-\gamma$		(6.8 ±0.8) $\times 10^{-3}$	S=1.7	274
$\mu^+\mu^-\gamma$		(3.1 ±0.4) $\times 10^{-4}$		253
e^+e^-		< 7.7 $\times 10^{-5}$	CL=90%	274
$\mu^+\mu^-$		(5.8 ±0.8) $\times 10^{-6}$		253
$e^+e^-e^+e^-$		< 6.9 $\times 10^{-5}$	CL=90%	274
$\pi^+\pi^-e^+e^-$		(4.2 ±1.2) $\times 10^{-4}$		235
$\pi^+\pi^-2\gamma$		< 2.0 $\times 10^{-3}$		236
$\pi^+\pi^-\pi^0\gamma$		< 5 $\times 10^{-4}$	CL=90%	174
$\pi^0\mu^+\mu^-\gamma$		< 3 $\times 10^{-6}$	CL=90%	210
Charge conjugation (*C*), Parity (*P*), Charge conjugation × Parity (*CP*), or Lepton Family number (*LF*) violating modes				
$\pi^0\gamma$	*C*	< 9 $\times 10^{-5}$	CL=90%	257
$\pi^+\pi^-$	*P,CP*	< 1.3 $\times 10^{-5}$	CL=90%	236
$\pi^0\pi^0$	*P,CP*	< 3.5 $\times 10^{-4}$	CL=90%	238
$\pi^0\pi^0\gamma$	*C*	< 5 $\times 10^{-4}$	CL=90%	238
$\pi^0\pi^0\pi^0\gamma$	*C*	< 6 $\times 10^{-5}$	CL=90%	179
3γ	*C*	< 1.6 $\times 10^{-5}$	CL=90%	274
$4\pi^0$	*P,CP*	< 6.9 $\times 10^{-7}$	CL=90%	40
$\pi^0e^+e^-$	*C*	[h] < 4 $\times 10^{-5}$	CL=90%	257
$\pi^0\mu^+\mu^-$	*C*	[h] < 5 $\times 10^{-6}$	CL=90%	210
$\mu^+e^- + \mu^-e^+$	*LF*	< 6 $\times 10^{-6}$	CL=90%	264

$f_0(600)$ [i] or σ

$I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{++})$

Mass $m = (400\text{–}1200)$ MeV
Full width $\Gamma = (600\text{–}1000)$ MeV

$f_0(600)$ DECAY MODES	Fraction (Γ_i/Γ)	p (MeV/c)
$\pi\pi$	dominant	–
$\gamma\gamma$	seen	–

N BARYONS
($S = 0$, $I = 1/2$)

p, $N^+ = uud$; n, $N^0 = udd$

p

$I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

Mass $m = 1.00727646688 \pm 0.00000000013$ u
Mass $m = 938.27203 \pm 0.00008$ MeV [a]
$|m_p - m_{\overline{p}}|/m_p < 2 \times 10^{-9}$, CL = 90% [b]
$\left|\frac{q_{\overline{p}}}{m_{\overline{p}}}\right|/\left(\frac{q_p}{m_p}\right) = 0.99999999991 \pm 0.00000000009$
$|q_p + q_{\overline{p}}|/e < 2 \times 10^{-9}$, CL = 90% [b]
$|q_p + q_e|/e < 1.0 \times 10^{-21}$ [c]
Magnetic moment $\mu = 2.792847351 \pm 0.000000028\ \mu_N$
$(\mu_p + \mu_{\overline{p}}) / \mu_p = (-2.6 \pm 2.9) \times 10^{-3}$
Electric dipole moment $d < 0.54 \times 10^{-23}$ $e$cm
Electric polarizability $\alpha = (12.0 \pm 0.6) \times 10^{-4}$ fm^3
Magnetic polarizability $\beta = (1.9 \pm 0.5) \times 10^{-4}$ fm^3
Charge radius = 0.875 ± 0.007 fm
Mean life $\tau > 2.1 \times 10^{29}$ years, CL = 90% ($p \to$ invisible mode)
Mean life $\tau > 10^{31}$ to 10^{33} years [d] (mode dependent)

See the "Note on Nucleon Decay" in our 1994 edition (Phys. Rev. **D50**, 1173) for a short review.

The "partial mean life" limits tabulated here are the limits on τ/B_i, where τ is the total mean life and B_i is the branching fraction for the mode in question. For N decays, p and n indicate proton and neutron partial lifetimes.

p DECAY MODES	Partial mean life (10^{30} years)	Confidence level	p (MeV/c)
Antilepton + meson			
$N \to e^+\pi$	> 158 (n), > 1600 (p)	90%	459
$N \to \mu^+\pi$	> 100 (n), > 473 (p)	90%	453
$N \to \nu\pi$	> 112 (n), > 25 (p)	90%	459
$p \to e^+\eta$	> 313	90%	309
$p \to \mu^+\eta$	> 126	90%	297
$n \to \nu\eta$	> 158	90%	310
$N \to e^+\rho$	> 217 (n), > 75 (p)	90%	149
$N \to \mu^+\rho$	> 228 (n), > 110 (p)	90%	113
$N \to \nu\rho$	> 19 (n), > 162 (p)	90%	149
$p \to e^+\omega$	> 107	90%	143
$p \to \mu^+\omega$	> 117	90%	105
$n \to \nu\omega$	> 108	90%	144
$N \to e^+K$	> 17 (n), > 150 (p)	90%	339
$p \to e^+K^0_S$	> 120	90%	337
$p \to e^+K^0_L$	> 51	90%	337
$N \to \mu^+K$	> 26 (n), > 120 (p)	90%	329
$p \to \mu^+K^0_S$	> 150	90%	326
$p \to \mu^+K^0_L$	> 83	90%	326
$N \to \nu K$	> 86 (n), > 670 (p)	90%	339
$n \to \nu K^0_S$	> 51	90%	338
$p \to e^+K^*(892)^0$	> 84	90%	45
$N \to \nu K^*(892)$	> 78 (n), > 51 (p)	90%	45
Antilepton + mesons			
$p \to e^+\pi^+\pi^-$	> 82	90%	448
$p \to e^+\pi^0\pi^0$	> 147	90%	449
$n \to e^+\pi^-\pi^0$	> 52	90%	449
$p \to \mu^+\pi^+\pi^-$	> 133	90%	425
$p \to \mu^+\pi^0\pi^0$	> 101	90%	427
$n \to \mu^+\pi^-\pi^0$	> 74	90%	427
$n \to e^+K^0\pi^-$	> 18	90%	319
Lepton + meson			
$n \to e^-\pi^+$	> 65	90%	459
$n \to \mu^-\pi^+$	> 49	90%	453
$n \to e^-\rho^+$	> 62	90%	150
$n \to \mu^-\rho^+$	> 7	90%	114
$n \to e^-K^+$	> 32	90%	340
$n \to \mu^-K^+$	> 57	90%	330
Lepton + mesons			
$p \to e^-\pi^+\pi^+$	> 30	90%	448
$n \to e^-\pi^+\pi^0$	> 29	90%	449
$p \to \mu^-\pi^+\pi^+$	> 17	90%	425
$n \to \mu^-\pi^+\pi^0$	> 34	90%	427
$p \to e^-\pi^+K^+$	> 75	90%	320
$p \to \mu^-\pi^+K^+$	> 245	90%	279
Antilepton + photon(s)			
$p \to e^+\gamma$	> 670	90%	469
$p \to \mu^+\gamma$	> 478	90%	463
$n \to \nu\gamma$	> 28	90%	470
$p \to e^+\gamma\gamma$	> 100	90%	469
$n \to \nu\gamma\gamma$	> 219	90%	470
Three (or more) leptons			
$p \to e^+e^+e^-$	> 793	90%	469
$p \to e^+\mu^+\mu^-$	> 359	90%	457
$p \to e^+\nu\nu$	> 17	90%	469
$n \to e^+e^-\nu$	> 257	90%	470
$n \to \mu^+e^-\nu$	> 83	90%	464
$n \to \mu^+\mu^-\nu$	> 79	90%	458
$p \to \mu^+e^+e^-$	> 529	90%	463
$p \to \mu^+\mu^+\mu^-$	> 675	90%	439
$p \to \mu^+\nu\nu$	> 21	90%	463
$p \to e^-\mu^+\mu^+$	> 6	90%	457
$n \to 3\nu$	> 0.0005	90%	470
Inclusive modes			
$N \to e^+$anything	> 0.6 (n, p)	90%	–
$N \to \mu^+$anything	> 12 (n, p)	90%	–
$N \to e^+\pi^0$anything	> 0.6 (n, p)	90%	–
$\Delta B = 2$ dinucleon modes			
The following are lifetime limits per iron nucleus.			
$pp \to \pi^+\pi^+$	> 0.7	90%	–
$pn \to \pi^+\pi^0$	> 2	90%	–
$nn \to \pi^+\pi^-$	> 0.7	90%	–
$nn \to \pi^0\pi^0$	> 3.4	90%	–
$pp \to e^+e^+$	> 5.8	90%	–
$pp \to e^+\mu^+$	> 3.6	90%	–
$pp \to \mu^+\mu^+$	> 1.7	90%	–
$pn \to e^+\overline{\nu}$	> 2.8	90%	–
$pn \to \mu^+\overline{\nu}$	> 1.6	90%	–
$nn \to \nu_e\overline{\nu}_e$	> 0.000049	90%	–
$pn \to$ invisible	>2.1 × 10^{-5}	90%	–
$pp \to$ invisible	> 0.00005	90%	–

$\overline{p}$ DECAY MODES

$\overline{p}$ DECAY MODES	Partial mean life (years)	Confidence level	p (MeV/c)
$\overline{p} \to e^-\gamma$	> 7 × 10^5	90%	469
$\overline{p} \to \mu^-\gamma$	> 5 × 10^4	90%	463
$\overline{p} \to e^-\pi^0$	> 4 × 10^5	90%	459
$\overline{p} \to \mu^-\pi^0$	> 5 × 10^4	90%	453
$\overline{p} \to e^-\eta$	> 2 × 10^4	90%	309
$\overline{p} \to \mu^-\eta$	> 8 × 10^3	90%	297
$\overline{p} \to e^-K^0_S$	> 900	90%	337
$\overline{p} \to \mu^-K^0_S$	> 4 × 10^3	90%	326
$\overline{p} \to e^-K^0_L$	> 9 × 10^3	90%	337
$\overline{p} \to \mu^-K^0_L$	> 7 × 10^3	90%	326
$\overline{p} \to e^-\gamma\gamma$	> 2 × 10^4	90%	469
$\overline{p} \to \mu^-\gamma\gamma$	> 2 × 10^4	90%	463
$\overline{p} \to e^-\omega$	> 200	90%	143

LEPTONS

e

$J = \frac{1}{2}$

Mass $m = (548.57990943 \pm 0.00000023) \times 10^{-6}$ u
Mass $m = 0.510998910 \pm 0.000000013$ MeV
$|m_{e^+} - m_{e^-}|/m < 8 \times 10^{-9}$, CL = 90%
$|q_{e^+} + q_{e^-}|/e < 4 \times 10^{-8}$
Magnetic moment anomaly
$(g-2)/2 = (1159.6521811 \pm 0.0000007) \times 10^{-6}$
$(g_{e^+} - g_{e^-}) / g_{\rm average} = (-0.5 \pm 2.1) \times 10^{-12}$
Electric dipole moment $d = (0.07 \pm 0.07) \times 10^{-26}$ $e$cm
Mean life $\tau > 4.6 \times 10^{26}$ yr, CL = 90% [a]

μ

$J = \frac{1}{2}$

Mass $m = 0.1134289256 \pm 0.0000000029$ u
Mass $m = 105.658367 \pm 0.000004$ MeV
Mean life $\tau = (2.197019 \pm 0.000021) \times 10^{-6}$ s (S = 1.1)
$\tau_{\mu^+}/\tau_{\mu^-} = 1.00002 \pm 0.00008$
$c\tau = 658.650$ m
Magnetic moment anomaly $(g-2)/2 = (11659208 \pm 6) \times 10^{-10}$
$(g_{\mu^+} - g_{\mu^-}) / g_{\rm average} = (-0.11 \pm 0.12) \times 10^{-8}$
Electric dipole moment $d = (3.7 \pm 3.4) \times 10^{-19}$ $e$cm

Decay parameters [b]

$\rho = 0.7509 \pm 0.0010$
$\eta = 0.001 \pm 0.024$ (S = 2.0)
$\delta = 0.7495 \pm 0.0012$
$\xi P_\mu = 1.0007 \pm 0.0035$ [c]
$\xi P_\mu \delta/\rho > 0.99682$, CL = 90% [c]
$\xi' = 1.00 \pm 0.04$
$\xi'' = 0.7 \pm 0.4$
$\alpha/A = (0 \pm 4) \times 10^{-3}$
$\alpha'/A = (0 \pm 4) \times 10^{-3}$
$\beta/A = (4 \pm 6) \times 10^{-3}$
$\beta'/A = (1 \pm 5) \times 10^{-3}$
$\overline{\eta} = 0.02 \pm 0.08$

μ^+ modes are charge conjugates of the modes below.

μ^- DECAY MODES		Fraction (Γ_i/Γ)	Confidence level	p (MeV/c)
$e^- \overline{\nu}_e \nu_\mu$		$\approx 100\%$		53
$e^- \overline{\nu}_e \nu_\mu \gamma$	[d]	(1.4 ± 0.4) %		53
$e^- \overline{\nu}_e \nu_\mu e^+ e^-$	[e]	$(3.4 \pm 0.4) \times 10^{-5}$		53
Lepton Family number (*LF*) violating modes				
$e^- \nu_e \overline{\nu}_\mu$	*LF*	[f] < 1.2 %	90%	53
$e^- \gamma$	*LF*	$< 1.2 \times 10^{-11}$	90%	53
$e^- e^+ e^-$	*LF*	$< 1.0 \times 10^{-12}$	90%	53
$e^- 2\gamma$	*LF*	$< 7.2 \times 10^{-11}$	90%	53

τ

$J = \frac{1}{2}$

Mass $m = 1776.84 \pm 0.17$ MeV
$(m_{\tau^+} - m_{\tau^-})/m_{\rm average} < 2.8 \times 10^{-4}$, CL = 90%
Mean life $\tau = (290.6 \pm 1.0) \times 10^{-15}$ s
$c\tau = 87.11$ μm
Magnetic moment anomaly > -0.052 and < 0.013, CL = 95%
$\mathrm{Re}(d_\tau) = -0.22$ to 0.45×10^{-16} $e$cm, CL = 95%
$\mathrm{Im}(d_\tau) = -0.25$ to 0.008×10^{-16} $e$cm, CL = 95%

Weak dipole moment

$\mathrm{Re}(d_\tau^w) < 0.50 \times 10^{-17}$ $e$cm, CL = 95%
$\mathrm{Im}(d_\tau^w) < 1.1 \times 10^{-17}$ $e$cm, CL = 95%

Weak anomalous magnetic dipole moment

$\mathrm{Re}(\alpha_\tau^w) < 1.1 \times 10^{-3}$, CL = 95%
$\mathrm{Im}(\alpha_\tau^w) < 2.7 \times 10^{-3}$, CL = 95%

Decay parameters

See the τ Particle Listings for a note concerning τ-decay parameters.

$\rho(e$ or $\mu) = 0.745 \pm 0.008$
$\rho(e) = 0.747 \pm 0.010$
$\rho(\mu) = 0.763 \pm 0.020$
$\xi(e$ or $\mu) = 0.985 \pm 0.030$
$\xi(e) = 0.994 \pm 0.040$
$\xi(\mu) = 1.030 \pm 0.059$
$\eta(e$ or $\mu) = 0.013 \pm 0.020$
$\eta(\mu) = 0.094 \pm 0.073$
$(\delta\xi)(e$ or $\mu) = 0.746 \pm 0.021$
$(\delta\xi)(e) = 0.734 \pm 0.028$
$(\delta\xi)(\mu) = 0.778 \pm 0.037$
$\xi(\pi) = 0.993 \pm 0.022$
$\xi(\rho) = 0.994 \pm 0.008$
$\xi(a_1) = 1.001 \pm 0.027$
ξ(all hadronic modes) $= 0.995 \pm 0.007$

τ^+ modes are charge conjugates of the modes below. "$h^\pm$" stands for $\pi^\pm$ or $K^\pm$. "ℓ" stands for e or μ. "Neutrals" stands for γ's and/or π^0's.

τ^- DECAY MODES		Fraction (Γ_i/Γ)	Scale factor/ Confidence level	p (MeV/c)
Modes with one charged particle				
particle$^- \geq 0$ neutrals $\geq 0K^0 \nu_\tau$ ("1-prong")		(85.36 ± 0.08) %	S=1.3	–
particle$^- \geq 0$ neutrals $\geq 0K^0_L \nu_\tau$		(84.73 ± 0.08) %	S=1.4	–
$\mu^- \overline{\nu}_\mu \nu_\tau$	[g]	(17.36 ± 0.05) %		885
$\mu^- \overline{\nu}_\mu \nu_\tau \gamma$	[e]	$(3.6 \pm 0.4) \times 10^{-3}$		885
$e^- \overline{\nu}_e \nu_\tau$	[g]	(17.85 ± 0.05) %		888
$e^- \overline{\nu}_e \nu_\tau \gamma$	[e]	(1.75 ± 0.18) %		888
$h^- \geq 0K^0_L \nu_\tau$		(12.13 ± 0.07) %	S=1.1	883
$h^- \nu_\tau$		(11.60 ± 0.06) %	S=1.1	883
$\pi^- \nu_\tau$	[g]	(10.91 ± 0.07) %	S=1.1	883
$K^- \nu_\tau$	[g]	$(6.95 \pm 0.23) \times 10^{-3}$	S=1.1	820
$h^- \geq 1$ neutrals ν_τ		(37.08 ± 0.11) %	S=1.2	–
$h^- \geq 1\pi^0 \nu_\tau$ (ex.K^0)		(36.54 ± 0.11) %	S=1.2	–
$h^- \pi^0 \nu_\tau$		(25.95 ± 0.10) %	S=1.1	878
$\pi^- \pi^0 \nu_\tau$	[g]	(25.52 ± 0.10) %	S=1.1	878
$\pi^- \pi^0$ non-$\rho(770) \nu_\tau$		$(3.0 \pm 3.2) \times 10^{-3}$		878
$K^- \pi^0 \nu_\tau$	[g]	$(4.28 \pm 0.15) \times 10^{-3}$		814
$h^- \geq 2\pi^0 \nu_\tau$		(10.84 ± 0.12) %	S=1.3	–
$h^- 2\pi^0 \nu_\tau$		(9.49 ± 0.11) %	S=1.2	862
$h^- 2\pi^0 \nu_\tau$ (ex.K^0)		(9.33 ± 0.12) %	S=1.2	862
$\pi^- 2\pi^0 \nu_\tau$ (ex.K^0)	[g]	(9.27 ± 0.12) %	S=1.2	862
$\pi^- 2\pi^0 \nu_\tau$ (ex.K^0), scalar		$< 9 \times 10^{-3}$	CL=95%	862
$\pi^- 2\pi^0 \nu_\tau$ (ex.K^0), vector		$< 7 \times 10^{-3}$	CL=95%	862
$K^- 2\pi^0 \nu_\tau$ (ex.K^0)	[g]	$(6.3 \pm 2.3) \times 10^{-4}$		796
$h^- \geq 3\pi^0 \nu_\tau$		(1.35 ± 0.07) %	S=1.1	–
$h^- \geq 3\pi^0 \nu_\tau$ (ex. K^0)		(1.26 ± 0.07) %	S=1.1	–
$h^- 3\pi^0 \nu_\tau$		(1.18 ± 0.08) %		836
$\pi^- 3\pi^0 \nu_\tau$ (ex.K^0)	[g]	(1.04 ± 0.07) %		836
$K^- 3\pi^0 \nu_\tau$ (ex.K^0, η)	[g]	$(4.7 \pm 2.1) \times 10^{-4}$		765
$h^- 4\pi^0 \nu_\tau$ (ex.K^0)		$(1.6 \pm 0.4) \times 10^{-3}$		800
$h^- 4\pi^0 \nu_\tau$ (ex.K^0,η)	[g]	$(1.0 \pm 0.4) \times 10^{-3}$		800
$K^- \geq 0\pi^0 \geq 0K^0 \geq 0\gamma \nu_\tau$		(1.57 ± 0.04) %	S=1.1	820
$K^- \geq 1$ (π^0 or K^0 or γ) ν_τ		$(8.74 \pm 0.32) \times 10^{-3}$		–
Modes with K^0's				
K^0_S(particles)$^- \nu_\tau$		$(9.2 \pm 0.4) \times 10^{-3}$	S=1.4	–
$h^- \overline{K}^0 \nu_\tau$		$(10.0 \pm 0.5) \times 10^{-3}$	S=1.8	812
$\pi^- \overline{K}^0 \nu_\tau$	[g]	$(8.4 \pm 0.4) \times 10^{-3}$	S=2.0	812
$\pi^- \overline{K}^0$ (non-$K^*(892)^-) \nu_\tau$		$(5.4 \pm 2.1) \times 10^{-4}$		812
$K^- K^0 \nu_\tau$	[g]	$(1.58 \pm 0.16) \times 10^{-3}$		737
$K^- K^0 \geq 0\pi^0 \nu_\tau$		$(3.16 \pm 0.23) \times 10^{-3}$		737
$h^- \overline{K}^0 \pi^0 \nu_\tau$		$(5.5 \pm 0.4) \times 10^{-3}$		794
$\pi^- \overline{K}^0 \pi^0 \nu_\tau$	[g]	$(3.9 \pm 0.4) \times 10^{-3}$		794
$\overline{K}^0 \rho^- \nu_\tau$		$(2.2 \pm 0.5) \times 10^{-3}$		612
$K^- K^0 \pi^0 \nu_\tau$	[g]	$(1.58 \pm 0.20) \times 10^{-3}$		685

1. PHYSICAL CONSTANTS

Table 1.1. Reviewed 2007 by P.J. Mohr and B.N. Taylor (NIST). Based mainly on the "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2006" by P.J. Mohr, B.N. Taylor, and D.B. Newell (to be published in Rev. Mod. Phys, and J. Phys. Chem. Ref. Data). The last group of constants (beginning with the Fermi coupling constant) comes from the Particle Data Group. The figures in parentheses after the values give the 1-standard-deviation uncertainties in the last digits; the corresponding fractional uncertainties in parts per 10^9 (ppb) are given in the last column. This set of constants (aside from the last group) is recommended for international use by CODATA (the Committee on Data for Science and Technology). The full 2006 CODATA set of constants may be found at `http://physics.nist.gov/constants`.

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	c	299 792 458 m s^{-1}	exact*
Planck constant	h	$6.626\ 068\ 96(33) \times 10^{-34}$ J s	50
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	$1.054\ 571\ 628(53) \times 10^{-34}$ J s	50
		$= 6.582\ 118\ 99(16) \times 10^{-22}$ MeV s	25
electron charge magnitude	e	$1.602\ 176\ 487(40) \times 10^{-19}$ C $= 4.803\ 204\ 27(12) \times 10^{-10}$ esu	25, 25
conversion constant	$\hbar c$	197.326 9631(49) MeV fm	25
conversion constant	$(\hbar c)^2$	0.389 379 304(19) GeV^2 mbarn	50
electron mass	m_e	0.510 998 910(13) MeV/c^2 $= 9.109\ 382\ 15(45) \times 10^{-31}$ kg	25, 50
proton mass	m_p	938.272 013(23) MeV/c^2 $= 1.672\ 621\ 637(83) \times 10^{-27}$ kg	25, 50
		$= 1.007\ 276\ 466\ 77(10)$ u $= 1836.152\ 672\ 47(80)$ m_e	0.10, 0.43
deuteron mass	m_d	1875.612 793(47) MeV/c^2	25
unified atomic mass unit (u)	(mass ^{12}C atom)/12 = (1 g)/(N_A mol)	931.494 028(23) MeV/c^2 $= 1.660\ 538\ 782(83) \times 10^{-27}$ kg	25, 50
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854\ 187\ 817 \ldots \times 10^{-12}$ F m^{-1}	exact
permeability of free space	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2} $= 12.566\ 370\ 614 \ldots \times 10^{-7}$ N A^{-2}	exact
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	$7.297\ 352\ 5376(50) \times 10^{-3} = 1/137.035\ 999\ 679(94)$†	0.68, 0.68
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	$2.817\ 940\ 2894(58) \times 10^{-15}$ m	2.1
(e^- Compton wavelength)/2π	$\lambda\!\!\!^{-}_e = \hbar/m_e c = r_e \alpha^{-1}$	$3.861\ 592\ 6459(53) \times 10^{-13}$ m	1.4
Bohr radius ($m_{\rm nucleus} = \infty$)	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = r_e \alpha^{-2}$	$0.529\ 177\ 208\ 59(36) \times 10^{-10}$ m	0.68
wavelength of 1 eV/c particle	$hc/(1$ eV)	$1.239\ 841\ 875(31) \times 10^{-6}$ m	25
Rydberg energy	$hcR_\infty = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 = m_e c^2 \alpha^2/2$	13.605 691 93(34) eV	25
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	0.665 245 8558(27) barn	4.1
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$5.788\ 381\ 7555(79) \times 10^{-11}$ MeV T^{-1}	1.4
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$3.152\ 451\ 2326(45) \times 10^{-14}$ MeV T^{-1}	1.4
electron cyclotron freq./field	$\omega^e_{\rm cycl}/B = e/m_e$	$1.758\ 820\ 150(44) \times 10^{11}$ rad s^{-1} T^{-1}	25
proton cyclotron freq./field	$\omega^p_{\rm cycl}/B = e/m_p$	$9.578\ 833\ 92(24) \times 10^{7}$ rad s^{-1} T^{-1}	25
gravitational constant‡	G_N	$6.674\ 28(67) \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	1.0×10^5
		$= 6.708\ 81(67) \times 10^{-39}$ $\hbar c$ (GeV/c^2)$^{-2}$	1.0×10^5
standard gravitational accel.	g_N	9.806 65 m s^{-2}	exact
Avogadro constant	N_A	$6.022\ 141\ 79(30) \times 10^{23}$ mol^{-1}	50
Boltzmann constant	k	$1.380\ 6504(24) \times 10^{-23}$ J K^{-1}	1700
		$= 8.617\ 343(15) \times 10^{-5}$ eV K^{-1}	1700
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k(273.15$ K$)/(101\ 325$ Pa$)$	$22.413\ 996(39) \times 10^{-3}$ m^3 mol^{-1}	1700
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\rm max} T$	$2.897\ 7685(51) \times 10^{-3}$ m K	1700
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	$5.670\ 400(40) \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}	7000
Fermi coupling constant**	$G_F/(\hbar c)^3$	$1.166\ 37(1) \times 10^{-5}$ GeV^{-2}	9000
weak-mixing angle	$\sin^2\hat{\theta}(M_Z)$ ($\overline{\rm MS}$)	0.231 19(14)††	6.5×10^5
$W^\pm$ boson mass	m_W	80.398(25) GeV/c^2	3.6×10^5
Z^0 boson mass	m_Z	91.1876(21) GeV/c^2	2.3×10^4
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	0.1176(20)	1.7×10^7

$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238$ $\quad$ e $= 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235$ $\quad$ $\gamma = 0.577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 861$

1 in $\equiv 0.0254$ m $\quad$ 1 G $\equiv 10^{-4}$ T $\quad$ 1 eV $= 1.602\ 176\ 487(40) \times 10^{-19}$ J $\quad$ kT at 300 K $= [38.681\ 685(68)]^{-1}$ eV

1 Å $\equiv 0.1$ nm $\quad$ 1 dyne $\equiv 10^{-5}$ N $\quad$ 1 eV/c^2 $= 1.782\ 661\ 758(44) \times 10^{-36}$ kg $\quad$ 0 °C $\equiv 273.15$ K

1 barn $\equiv 10^{-28}$ m^2 $\quad$ 1 erg $\equiv 10^{-7}$ J $\quad$ $2.997\ 924\ 58 \times 10^9$ esu $= 1$ C $\quad$ 1 atmosphere $\equiv 760$ Torr $\equiv 101\ 325$ Pa

* The meter is the length of the path traveled by light in vacuum during a time interval of 1/299 792 458 of a second.
† At $Q^2 = 0$. At $Q^2 \approx m_W^2$ the value is $\sim 1/128$.
‡ Absolute lab measurements of G_N have been made only on scales of about 1 cm to 1 m.
** See the discussion in Sec. 10, "Electroweak model and constraints on new physics."
†† The corresponding $\sin^2\theta$ for the effective angle is 0.23149(13).

2. ASTROPHYSICAL CONSTANTS AND PARAMETERS

Table 2.1. Revised May 2008 by E. Bergren and D.E. Groom (LBNL). The figures in parentheses after some values give the one standard deviation uncertainties in the last digit(s). Physical constants are from Ref. 1. While every effort has been made to obtain the most accurate current values of the listed quantities, the table does not represent a critical review or adjustment of the constants, and is not intended as a primary reference. The values and uncertainties for the cosmological parameters depend on the exact data sets, priors, and basis parameters used in the fit. Many of the parameters reported in this table are derived parameters or have non-Gaussian likelihoods. The quoted errors may be highly correlated with those of other parameters, so care must be taken in propagating them. Unless otherwise specified, cosmological parameters are best fits of a spatially-flat ΛCDM cosmology with a power-law initial spectrum to WMAP 3-year data alone [2]. For more information see Ref. 3 and the original papers.

Quantity	Symbol, equation	Value	Reference, footnote
speed of light	c	$299\,792\,458$ m s^{-1}	exact[4]
Newtonian gravitational constant	G_N	$6.674\,3(7) \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	[1]
Planck mass	$\sqrt{\hbar c/G_N}$	$1.220\,89(6) \times 10^{19}$ GeV/c^2 $= 2.176\,44(11) \times 10^{-8}$ kg	[1]
Planck length	$\sqrt{\hbar G_N/c^3}$	$1.616\,24(8) \times 10^{-35}$ m	[1]
standard gravitational acceleration	g_N	$9.806\,65$ m s^{-2}	exact[1]
jansky (flux density)	Jy	10^{-26} W m^{-2} Hz^{-1}	definition
tropical year (equinox to equinox) (2007)	yr	$31\,556\,925.2$ s $\approx \pi \times 10^7$ s	[5]
sidereal year (fixed star to fixed star) (2007)		$31\,558\,149.8$ s $\approx \pi \times 10^7$ s	[5]
mean sidereal day (2007) (time between vernal equinox transits)		$23^h\,56^m\,04\overset{s}{.}090\,53$	[5]
astronomical unit	AU, A	$149\,597\,870\,700(3)$ m	[6]
parsec (1 AU/1 arc sec)	pc	$3.085\,677\,6 \times 10^{16}$ m $= 3.262\ldots$ ly	[7]
light year (deprecated unit)	ly	$0.306\,6\ldots$ pc $= 0.946\,053\ldots \times 10^{16}$ m	
Schwarzschild radius of the Sun	$2G_N M_\odot/c^2$	$2.953\,250\,077\,0(2)$ km	[8]
Solar mass	$M_\odot$	$1.988\,4(2) \times 10^{30}$ kg	[9]
Solar equatorial radius	$R_\odot$	$6.9551(3) \times 10^8$ m	[10]
Solar luminosity	$L_\odot$	$3.842\,7(1\,4) \times 10^{26}$ W	[11]
Schwarzschild radius of the Earth	$2G_N M_\oplus/c^2$	$8.870\,055\,881$ mm	[12]
Earth mass	$M_\oplus$	$5.972\,2(6) \times 10^{24}$ kg	[13]
Earth mean equatorial radius	$R_\oplus$	$6.378\,137 \times 10^6$ m	[5]
luminosity conversion (deprecated)	L	$3.02 \times 10^{28} \times 10^{-0.4\,M_{\rm bol}}$ W ($M_{\rm bol}$ = absolute bolometric magnitude = bolometric magnitude at 10 pc)	[14]
flux conversion (deprecated)	$\mathscr{F}$	$2.52 \times 10^{-8} \times 10^{-0.4\,m_{\rm bol}}$ W m^{-2} ($m_{\rm bol}$ = apparent bolometric magnitude)	from above
ABsolute monochromatic magnitude	AB	$-2.5 \log_{10} f_\nu - 56.10$ (for f_ν in W m^{-2} Hz^{-1}) $= -2.5 \log_{10} f_\nu + 8.90$ (for f_ν in Jy)	[15]
Solar velocity around center of Galaxy	Θ_0	$220(20)$ km s^{-1}	[16]
Solar distance from Galactic center	R_0	$8.0(5)$ kpc	[17]
local disk density	$\rho_{\rm disk}$	$3\text{–}12 \times 10^{-24}$ g cm$^{-3} \approx 2\text{–}7$ GeV/c^2 cm^{-3}	[18]
local halo density	$\rho_{\rm halo}$	$2\text{–}13 \times 10^{-25}$ g cm$^{-3} \approx 0.1\text{–}0.7$ GeV/c^2cm^{-3}	[19]
present day CMB temperature	T_0	$2.725(1)$ K	[20]
present day CMB dipole amplitude		$3.358(17)$ mK	[21]
Solar velocity with respect to CMB		$369(2)$ km/s towards $(\ell, b) = (263.86(4)^\circ, 48.24(10)^\circ)$	[21]
Local Group velocity with respect to CMB	$v_{\rm LG}$	$627(22)$ km s^{-1} towards $(\ell, b) = (276(3)^\circ, 30(3)^\circ$	[22]
entropy density/Boltzmann constant	s/k	$2\,889.2\,(T/2.725)^3$ cm^{-3}	[14]
number density of CMB photons	n_γ	$410.5(T/2.725)^3$ cm^{-3}	[23]
present day Hubble expansion rate	H_0	$100\,h$ km s^{-1} Mpc^{-1} $= h \times (9.777\,752$ Gyr$)^{-1}$	[24]
present day normalized Hubble expansion rate‡	h	$0.73(3)$	[2,3]
Hubble length	c/H_0	$0.925\,063 \times 10^{26}\,h^{-1}$ m $\approx 1.27 \times 10^{26}$ m	
scale factor for cosmological constant	$c^2/3H_0^2$	$2.852 \times 10^{51}\,h^{-2}$ m^2	
critical density of the Universe	$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G_N$	$2.775\,366\,27 \times 10^{11}\,h^2\,M_\odot$Mpc^{-3} $= 1.878\,35(19) \times 10^{-29}\,h^2$ g cm^{-3} $= 1.053\,68(11) \times 10^{-5}\,h^2$ (GeV/c^2) cm^{-3}	
pressureless matter density of the Universe‡	$\Omega_{\rm m} = \rho_{\rm m}/\rho_c$	$0.128(8)\,h^{-2} \approx 0.24$ (WMAP3) $0.132(4)\,h^{-2} \Rightarrow 0.27(2)$ (ALL mean)	[2,3] [2]
baryon density of the Universe‡	$\Omega_{\rm b} = \rho_{\rm b}/\rho_c$	$0.0223(7)\,h^{-2} \approx 0.0425$	[2,3]
dark matter density of the universe‡	$\Omega_{\rm dm} = \Omega_{\rm m} - \Omega_{\rm b}$	$0.105(8)\,h^{-2} \approx 0.20$	[2]
dark energy density of the Universe‡	Ω_Λ	$0.73(3)$	[25]
Hubble length	c/H_0	$0.925\,063 \times 10^{26}\,h^{-1}$ m $\approx 1.27 \times 10^{26}$ m	
radiation density of the Universe‡	$\Omega_\gamma = \rho_\gamma/\rho_c$	$2.471 \times 10^{-5}(T/2.725)^4\,h^{-2} \approx 4.6 \times 10^{-5}$	[23]
neutrino density of the Universe‡	Ω_ν	$0.0005 < \Omega_\nu h^{-2} < 0.023 \Rightarrow 0.001 < \Omega_\nu < 0.05$	[26]
total energy density of the Universe‡	$\Omega_{\rm tot} = \Omega_{\rm m} + \ldots + \Omega_\Lambda$	$1.011(12)$	[2,27]

1.4 Reminder: Spez. Rel.

Elementarteilchen sind meist sehr leicht und bewegen sich schnell

→ relativistische Beschreibung! ∃ Inertialsysteme ...

→ wichtig! [∈ Theorie I] [hier: Wdh.]

alle (verallg.) Koord. werden als 4-Vektoren zusammengefasst:

Ortsvektor x^μ, $\mu = 0, \ldots, 3$, $x^0 := t$, $x^1 := x$, $x^2 := y$, $x^3 := z$

$\Rightarrow x^\mu = (t, \vec{x})$

Viererimpuls p^μ, $p^0 := E$, $p^1 := p_x$, $p^2 := p_y$, $p^3 := p_z$

$\Rightarrow p^\mu = (E, \vec{p})$

Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \partial_\tau x^\mu(\tau)$, $\partial_\tau \hat{=} \frac{\partial}{\partial \tau}$

τ: Eigenzeit des Teilchens

"Weltlinie" des Teilchens

$u^\mu = \gamma(1, \vec{v})$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dt}{d\tau}$ im Laborsystem

massive Teilchen: $p^\mu = m u^\mu$ (Def. der Masse)

Relevanz: $(p^\mu)_{\rm vorher} = (p^\mu)_{\rm nachher}$ Viererimpuls-Erhaltung

Ableitungen $\partial_\mu := \partial_{x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu := \partial_{x_\mu}$

mit Hilfe des metrischen Tensors

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

bildet man die Skalarprodukte von 4-Vektoren:

$$a \cdot b := a_\mu b^\mu := g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu := a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Einstein'sche Summenkonvention! $\alpha \hat{=} \sum_{\alpha=0}^{3}$

z.B. $a^2 = a \cdot a = (a^0)^2 - \vec{a}^2$ ((kann auch < 0 sein!

$a^2 < 0$ heißt "raumartig"

> 0 zeit

$= 0$ licht))

z.B. $u^2 = \gamma^2(1^2 - \vec{v}^2) = 1$

$p^2 = m^2$

$\Box := \partial^\mu \partial_\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$

Relevanz: <u>Skalarprodukte sind invariant</u>

d.h. sie haben in allen Inertialsystemen den gleichen Wert

joja: $\Lambda^\mu{}_\nu$

lineare Transformationen $\Lambda^\mu{}_\nu$, unter denen die Skalarprodukte invariant bleiben, bilden die <u>Lorentzgruppe</u>

Lorentztrafo: $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$

Invarianz: $a' \cdot b' \overset{!}{=} g_{\mu\nu} a'^\mu b'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho a^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma b^\sigma$

$\overset{!}{=} g_{\rho\sigma} a^\rho b^\sigma = a \cdot b$

$\Rightarrow g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$

bzw. $\Lambda^T g \Lambda = g$

$(\mathrm{Det}\,\Lambda)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Det}\,\Lambda = \pm 1$

und (00-Komp.) $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 = 1$

$\Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$ <u>oder</u> $\Lambda^0{}_0 \leq -1$

haben also vier "Klassen" von Lorentztransformationen (LT)

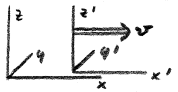
<u>"eigentliche" LT</u> $:= \{\mathrm{Det}\,\Lambda = +1,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1\} =: \Lambda_E$

((die anderen drei: $\Lambda_P \cdot \Lambda_E$, $\Lambda_T \cdot \Lambda_E$, $\Lambda_P \cdot \Lambda_T \cdot \Lambda_E$

mit Zeitumkehr $\Lambda_T := \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$: $x^0 \to -x^0$, $\vec{x} \to \vec{x}$

und Raumspiegelung $\Lambda_P := \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$: $x^0 \to x^0$, $\vec{x} \to -\vec{x}$))

konkret: <u>boost</u> z.B. in x-Richtung



Uhren synchron $t = t' = 0$ bei $x = x' = 0$

Ereignis (t, x, y, z) in gestrichenem Koord.?

$t' = \gamma(t - vx)$, $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$

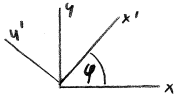
bzw. $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, $(\Lambda^\mu{}_\nu)_{x\text{-boost}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

eine bequemere Parametrisierung (γ, v nicht unabhängig):

setze $v =: \tanh\theta \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \cosh\theta$

so daß $(\Lambda^\mu{}_\nu)_{x\text{-boost}} = \begin{pmatrix} ch & -sh & 0 & 0 \\ -sh & ch & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $ch \equiv \cosh\theta$, $sh \equiv \sinh\theta$

in Analogie zu den <u>Rotationen</u> z.B. um z-Achse [vgl. EDTP I]



$t' = t$, $x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$, $y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$, $z' = z$

bzw. $(\Lambda^\mu{}_\nu)_{z\text{-Rot.}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $c \equiv \cos\varphi$, $s \equiv \sin\varphi$

weitere Vokabeln:

a_μ heißt "kovariant", $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ "kontravariant"

ein "Vektor" transformiert unter LT: $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$

ein "Tensor" auch: $a'^{\mu\nu\sigma\ldots} = \Lambda^\mu{}_{\bar\mu} \Lambda^\nu{}_{\bar\nu} \Lambda^\sigma{}_{\bar\sigma} \ldots a^{\bar\mu\bar\nu\bar\sigma\ldots}$

((Skalar = Tensor nullter Stufe
Vektor — erster
Matrix — zweiter
⋮ ⋮))

((<u>Physik</u> muß sich als (Komp. eines) Tensor(s) beschreiben lassen!!!))

z.B. $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} := \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen von } 0123 \\ -1 & \text{für ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

ist <u>invariant</u> unter eigentlichen LT's

Relevanz: oft sinnvoll ins "Schwerpunkt-System" (CMS) zu transformieren, $\sum_i \vec{p}_i = \vec{0}$

center-of-mass-system

1.5 Reminder: QM

klassische Mechanik: $E = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ ← hier 1D, der Einfachheit halber

Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$

Schrödinger-Glg $i\partial_t |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ ← Zustandsvektor; diktiert Zeitentwicklung

Vertauschungsrelation $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$ ← Kronecker-Delta ((=1 für i=j, 0 sonst))

Energie-Eigenzustände $\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle$

$\Rightarrow |n(t)\rangle = e^{-iE_n t} |n(0)\rangle$

Übergang zur Ortsdarst. $\psi(x,t) = \langle x | \psi(t)\rangle$ (Projektion auf Ortseigenvektor)

$\hat{x}_i \to x_i$ und $\hat{p}_i \to -i\partial_i$

$\to$ Schrödinger Glg: $i\partial_t \psi(x,t) = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(x)\right)\psi(x,t)$

konkretes Beispiel: harmonischer Oszillator

$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$

algebraische Lsg: $\hat{H}$ als Abschlußquadrat eines Operators darstellen

$\to$ Leiteroperatoren $\hat{a}$ (Vernichtungs-Op.) $:= \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}$

$\hat{a}^+$ (Erzeugungs-Op.) $:= \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}}$

$\Rightarrow [a, a^+] = 1$

$\hat{H} = \frac{\omega}{2}(a^+a + aa^+) = \omega\left(\frac{1}{2} + \underbrace{a^+a}_{\equiv \hat{N}}\right)$ Besetzungszahl-Op.

mit Eigenzuständen $|n\rangle$ von $\hat{N}$

$\Rightarrow \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

oft kann man ein System aber nicht vollständig lösen!

$\to$ wichtiges Werkzeug für Näherungs-Lösungen: Störungstheorie

z.B. $\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$ wobei $g \ll 1$

Energie-Eigenwerte? Reihe!

$E_n = E_n^{(0)} + g E_n^{(1)} + g^2 E_n^{(2)} + \dots$

$|n\rangle = |n\rangle^{(0)} + g|n\rangle^{(1)} + \dots$

$\to \hat{H}_0 |n\rangle^{(0)} = E_n^{(0)} |n\rangle^{(0)}$

$E_n^{(1)} = {}^{(0)}\langle n | \hat{V} | n\rangle^{(0)}$

$\vdots$

es werden oft verschiedene Darstellungen der Zeitabhängigkeit benutzt:

- Schrödinger-Darstellung

  Zustände sind zeitabhängig, Operatoren (z.B. $\hat{x}, \hat{p}, \hat{L}, \dots$) zeitunabhängig

  $i\partial_t |\psi\rangle_S = \hat{H}|\psi\rangle_S$

  formale Lsg: $|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle_S$

  Mittelwerte: $\langle \hat{A}_S \rangle = {}_S\langle\psi(t)|\hat{A}_S|\psi(t)\rangle_S$

- Heisenberg-Darstellung

  Operatoren folgen einer Bewegungsglg, Zustände zeitunabhängig (sind also zeitabhängig)

  def. $\hat{A}_H(t) := e^{i\hat{H}t}\hat{A}_S e^{-i\hat{H}t}$; $|\psi\rangle_H = e^{i\hat{H}t}|\psi(t)\rangle_S = |\psi(0)\rangle_S$

  $\Rightarrow i\partial_t \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}]$

  $\langle \hat{A}_H(t)\rangle = {}_S\langle\psi(0)|\hat{A}_H(t)|\psi(0)\rangle_S$

- <u>Wechselwirkungs-Darstellung</u> (oder Dirac-Darst.)

(liegt gewissermaßen zwischen Schröd.- + Heis.-Darst.))

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$$

$$|\psi(t)\rangle_I := e^{i\hat{H}_0 t}|\psi(t)\rangle_S$$

$$\hat{A}_I(t) := e^{i\hat{H}_0 t}\hat{A}_S e^{-i\hat{H}_0 t}$$

$$\hat{V}_I(t) := e^{i\hat{H}_0 t}\hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t}$$

so daß $i\partial_t |\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t}[-\hat{H}_0 + \hat{H}]|\psi(t)\rangle_S = g\hat{V}_I(t)|\psi(t)\rangle_I$

und $i\partial_t \hat{A}_I(t) = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0]$

mit Zeitentwicklungs-Operator $\hat{U}_I(t,t_0)$

$$|\psi(t)\rangle_I := U_I(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle_I$$

folgt dann $i\partial_t \hat{U}_I(t,t_0) = g\hat{V}_I(t)\hat{U}_I(t,t_0)$

und natürlich $\hat{U}_I(t_0,t_0) = \mathbb{1}$ als "Anfangsbedingung"

2. Beschreibung freier Teilchen. Rel. QM

relativistische Teilchen $\Rightarrow$ QFT.

zunächst jedoch freie Teilchen $\Rightarrow$ relativistische "klassische" QM etc.

2.1. Grundgleichungen

<u>Klein-Gordon-Glg</u> (Spin 0)

Erinnerung: nichtrel. Beziehung $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

setze $E \to i\partial_t$ und $\vec{p} \to -i\vec{\nabla}$

$\Rightarrow$ Schrödinger-Glg für freies Teilchen mit Masse m

relativistische Verallgemeinerung?

Physik muß Lorentzinvariant sein!

$$p_\mu p^\mu = m^2 \Leftrightarrow E^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow [-\partial_t^2 + \vec{\nabla}^2 - m^2]\psi = 0$$

also $\boxed{[\partial_\mu \partial^\mu + m^2]\psi = 0}$ "Klein-Gordon-Glg"

Relevanz: beschreibt Eigenschaften freier $J=0$ Teilchen (z.B. π, ...)

Lösungen: später...

<u>Dirac-Glg</u> (Spin $\frac{1}{2}$) 1927

Idee: Dgl 2. Ordnung $\to$ (Dgl 1. Ordnung)^2

geht sofort für $\vec{p} = \vec{0}$:

$$0 = p_\mu p^\mu - m^2 = (p^0)^2 - m^2 = (p^0 - m)(p^0 + m)$$

$\Rightarrow (p^0 - m) = 0$ oder $(p^0 + m) = 0$: 1. Ordnung in p^0

<u>Ansatz</u> für allgemeines $\vec{p} \neq \vec{0}$

$$p_\mu p^\mu - m^2 =: (\beta^\rho p_\rho - m)(\gamma^\sigma p_\sigma + m)$$

mit 8 zu bestimmenden Koeffizienten: $\beta^\rho, \gamma^\sigma$

lin. Term $\sim p$ auf rhs $\Rightarrow \beta^\mu \overset{!}{=} \gamma^\mu$

quad. Term: $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \overset{!}{=} \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu$ (4)

auf beiden Seiten der Glg (*) steht eine Summe von Termen die quadratisch in p-Komponenten sind:

Koeff-Vergleich $p_0p_0, p_1p_1, \dots$: $1 \overset{!}{=} \gamma^0\gamma^0$, $-1 \overset{!}{=} \gamma^1\gamma^1 = \gamma^2\gamma^2 = \gamma^3\gamma^3$

Koeff-Vergleich $p_\mu p_\nu$, $\mu \neq \nu$: $0 \overset{!}{=} \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$ für $\mu \neq \nu$

Lösungsversuch: $\gamma^0 = \pm 1$, $\gamma^k = \pm i$ $(k = 1,2,3)$

→ erfüllt die ersten vier Rels ✓

aber nicht die letzte ↯

Idee (Dirac!): γ könnten Matrizen sein

Def. Antikommutator $\{A, B\} := AB + BA$

dann ist Glg. (*) $\Leftrightarrow$ $\boxed{2g^{\mu\nu} = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}$

Lösungsversuch: γ könnten 2×2-Matrizen sein

z.B. Pauli-Matrizen $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

diese erfüllen $2\delta_{kl} = \{\sigma_k, \sigma_l\}$

aber die vierte unabh. 2×2-Matrix $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

erfüllt $\{\mathbb{1}, \sigma_k\} = 2\sigma_k$ ↯

Lösungsversuch: γ könnten 3×3-Matrizen sein

wegen $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ $(\mu \neq \nu)$

ist $\mathrm{Det}(\gamma^\mu)\,\mathrm{Det}(\gamma^\nu) = (-1)^3\,\mathrm{Det}(\gamma^\nu)\,\mathrm{Det}(\gamma^\mu)$ ← oder N bei $N\times N$-Matrizen

wir fordern $\mathrm{Det}(\gamma^\mu) \neq 0$ ⇒ $N\times N$-Matrizen mit ungeradem N ↯

Lösungsversuch: γ als 4×4-Matrizen

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$ ✓✓ (Standard-Darstellung)

((alles 2×2 Blöcke: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ etc))

also: $0 = p_\mu p^\mu - m^2 = (\gamma^\sigma p_\sigma - m)(\gamma^\tau p_\tau + m)$

Faktorisierung gelungen ✓

nehme z.B. $0 = \gamma^\mu p_\mu - m$ (($+m$ ist äquivalent, s. später...))

jetzt wieder $p^0 = E \to i\partial_t$ und $p_i = -p^i \to i\partial_i$ (($\Leftrightarrow p_\mu \to i\partial_\mu$))

so daß $\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0}$ "Dirac-Glg"

Bemerkung: 4 Gln: ψ = Dirac-Spinor = 4-komponentiger Spaltenvektor

und $m := m \cdot \mathbb{1}_{4\times 4}$

Relevanz: beschreibt Eigenschaften freier $J = \frac{1}{2}$ Teilchen (z.B. $e^-, \mu^-, \dots$)

Spin $\frac{1}{2}$ hat 2 Freiheitsgrade

Dirac-Spinor ψ hat 4 Freiheitsgrade = Teilchen + Antiteilchen (!)

Lösungen: später...

Maxwell-Glg (Spin 1)

((Einheiten: $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, und natürlich $c = 1$))

(1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$ (2) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

(3) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ (4) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \dot{\vec{E}} + \vec{j}$

können wir dies auch Lorentz-kovariant aufschreiben?

def. Vierer-Strom $j^\mu := (\rho, \vec{j})$

Vierer-Potential $A^\mu := (\phi, \vec{A})$

$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}$

erfüllen (2), (3) identisch ✓✓

Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu} \qquad \text{Maxwell-Gln}$$

z.B. $\nu = 0$: $\partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = j^0 = \rho \quad \hat{=}$ Max (1) ✓

NB: das Viererpotential A^μ ist nicht eindeutig bestimmt:

jedes $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$ (mit beliebigem $\chi(x)$)

ist auch eine Lsg, d.h. gilt dasselbe $F^{\mu\nu}$:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = F^{\mu\nu} + (\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\mu)\chi = F^{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$ "Eichfreiheit"

die freien Maxwell-Gln $\qquad \equiv \partial_\mu\partial^\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 =$ "d'Alembert-Operator"

$$0 = \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu\partial^\nu A^\mu = (\Box\delta^\nu_\mu - \partial^\nu\partial_\mu)A^\mu$$

sind also im Wesentlichen zur KG-Glg äquivalent.

2.2 Lösungen der Grundgleichungen

Klein-Gordon (KG)-Glg (s. S. 12)

$$0 = (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\phi$$

$\phi(x) = \phi(t,\vec{x}) = ?$ kann i.A. reell oder komplex sein

Ansatz (ebene Welle) $\quad \phi(x) = C\cdot e^{-ikx} = C\cdot e^{-ik^\mu x_\mu} = C\cdot e^{-ik_\mu x^\mu}$

einsetzen $\Rightarrow \left((-ik_\mu)(-ik^\mu) + m^2\right) C e^{-ikx} = 0$

$$\Rightarrow k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} =: \pm E_{\vec{k}}$$

allg Lsg ist LK ebener Wellen, mit bel. Koeff. C

$$\phi(x) = \int d^3\vec{k}\left(C_+(\vec{k})\, e^{-iE_{\vec{k}}t + i\vec{k}\vec{x}} + C_-(\vec{k})\, e^{+iE_{\vec{k}}t + i\vec{k}\vec{x}}\right)$$

$$= \int d^3\vec{k}\left(C'_+(\vec{k})\, e^{-i\vec{E}_{\vec{k}}t + i\vec{k}\vec{x}} + C'_-(-\vec{k})\, e^{iE_{\vec{k}}t - i\vec{k}\vec{x}}\right)$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}}\left(a_{\vec{p}}\, e^{-ipx} + b^*_{\vec{p}}\, e^{ipx}\right)$$

im 2. Schritt: $\vec{k} \to -\vec{k}$ im zweiten Term

im 3. Schritt: $\vec{k} \to \vec{p}$, $E_{\vec{k}} \to E_{\vec{p}} =: p^0$

$\rightsquigarrow p\cdot p = m^2$, $\quad p\cdot x = E_{\vec{k}}t - \vec{k}\vec{x}$

$$C_+(\vec{k}) \to \frac{a_{\vec{p}}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}}, \quad C_-(-\vec{k}) \to \frac{b^*_{\vec{p}}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2E_{\vec{p}}}}$$

wieviele Freiheitsgrade hat diese Lsg?

$a_{\vec{p}}, b^*_{\vec{p}}$ unabhängig voneinander $\Rightarrow \phi \in \mathbb{C} \Rightarrow$ 2 Freiheitsgrade (z.B. $\pi^\pm$)

$a_{\vec{p}} = b_{\vec{p}} \qquad \Rightarrow \phi \in \mathbb{R} \Rightarrow$ 1 Freiheitsgrad (z.B. π^0)

Teilcheninterpretation? am Teilchen (Masse m, Impuls $\vec{q}$)?

- $a_{\vec{p}} \sim \delta(\vec{p}-\vec{q})$, $\quad \phi(x) \sim e^{-iE_{\vec{q}}t + i\vec{q}\vec{x}}$

  $b_{\vec{p}} \sim \delta(\vec{p}-\vec{q})$, $\quad \phi(x) \sim e^{+iE_{\vec{q}}t - i\vec{q}\vec{x}}$

  $\to$ KG-Glg erklärt immer auch neg. E.-Lsg!

  $\to$ Universum instabil?

- bilde $(i\phi^*)(KG) - (i\phi)(KG)^*$

$$0 = (i\phi^*)(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\phi - (i\phi)(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)\phi^*$$

$$= \partial_t\left[i(\phi^*\dot{\phi} - \phi\dot{\phi}^*)\right] + \vec{\nabla}\cdot\left[-i(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*)\right]$$

$$=: \partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} \qquad (\text{Conti: } \partial_\mu j^\mu = 0)$$

$\vec{j}$: W.-Stromdichte

ρ: Wahrscheinlichkeitsdichte

$\rho \sim \pm 2E_{\vec{q}}$! negative Wahrsch.? ↯ $\qquad E<0,\ \rho<0$

historisch: Verwirrung; Problem: Teilchenintерpretation.

$\to$ Feynman-Stückelberg-Interpretation [s. z.B. Halzen/Martin §3.5]

Grundidee $\quad e^{+iEt} = e^{-iE(-t)}$

Teilchen mit $E>0$, propagiert rückwärts in Zeit

$\hat{=}$ Antiteilchen, das vorwärts propagiert

$\longrightarrow_t$: Teilchen $\hat{=}$ ⟶ ; Antiteilchen $\hat{=}$ ⟵

Zweite Quantisierung

Abkehr von der Willkür verschiedener Interpretationen

Feld $\phi(x) \to$ Operator $\hat\phi(x)$ ($\hat{=}$ Quanten Feld Theorie)

QM: $[\hat x, \hat p] = i \longrightarrow$ QFT: $[\hat\phi(t,\vec x), \partial_0 \hat\phi^+(t,\vec y)] = i\delta^{(3)}(\vec x - \vec y)$

diese Vertauschungsrelation wird erfüllt durch

$$\hat\phi(x) = \int \frac{d^3\vec p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec p}}} \left(\hat a_{\vec p}\, e^{-ipx} + \hat b^+_{\vec p}\, e^{ipx} \right)$$

(($\Rightarrow \hat\phi^+ = \hat a^+ e^+ + \hat b\, e^-$))

mit $[\hat a_{\vec p}, \hat a^+_{\vec q}] = \delta^{(3)}(\vec p - \vec q) = [\hat b_{\vec p}, \hat b^+_{\vec q}]$

$0 = [\hat a_{\vec p}, \hat a_{\vec q}] = [\hat b_{\vec p}, \hat b_{\vec q}] = [\hat a_{\vec p}, \hat b_{\vec q}] = \dots$

vgl. harm. Osz. S.9

((Beweis: s. Übung, Aufgabe 11))

$\to$ QFT-Lsg folgt aus klass. Lsg durch

$a_{\vec p}, a^*_{\vec p}, b_{\vec p}, b^*_{\vec p} \longrightarrow \hat a_{\vec p}, \hat a^+_{\vec p}, \hat b_{\vec p}, \hat b^+_{\vec p}$ (Vernichter + Erzeuger)

Interpretation:

$\hat Q := i\int d^3\vec x \left(\hat\phi^+ \partial_0 \hat\phi - \hat\phi \partial_0 \hat\phi^+ \right)$ ist erhalten ((vgl. S.16; Übung, Aufgabe 12))

$= \dots$ [ϕ einsetzen, $\int d^3\vec x\, e^{i\vec p\vec x} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec p)$, $[a,b]=0$ benutzen]

$= \int d^3\vec p \left(\frac{1}{2}(\hat a^+_{\vec p}\hat a_{\vec p} + \underbrace{\hat a_{\vec p}\hat a^+_{\vec p}}_{=\cancel{[a,a^+]} + a^+a}) - \frac{1}{2}(\hat b^+_{\vec p}\hat b_{\vec p} + \underbrace{\hat b_{\vec p}\hat b^+_{\vec p}}_{=\cancel{[b,b^+]} + b^+b}) \right)$

$= \int d^3\vec p \left(\hat a^+_{\vec p}\hat a_{\vec p} - \hat b^+_{\vec p}\hat b_{\vec p} \right)$ ist Differenz von Besetzungszahl-Op's!

$\sim$ Anzahl (π^+) − Anzahl (π^-)

$\sim$ Ladung (und nicht Wahrscheinlichkeit $\to$ darf neg. sein!)

sowie

$\hat H = \int d^3\vec x \left((\partial_0\hat\phi)\partial_0\hat\phi^+ + (\vec\nabla\hat\phi^+)\cdot\vec\nabla\hat\phi + m^2\hat\phi^+\hat\phi \right)$

$= \dots$ [ϕ einsetzen, $\int d^3\vec x\, e^{i\vec p\vec x} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec p)$, $[a,b]=0$ benutzen]

$= \int d^3\vec p\; E_{\vec p} \left(\frac{1}{2}(\hat a^+_{\vec p}\hat a_{\vec p} + \hat a_{\vec p}\hat a^+_{\vec p}) + \frac{1}{2}(\hat b^+_{\vec p}\hat b_{\vec p} + \hat b_{\vec p}\hat b^+_{\vec p}) \right)$

$= \int d^3\vec p\; E_{\vec p} \left(\hat a^+_{\vec p}\hat a_{\vec p} + \hat b^+_{\vec p}\hat b_{\vec p} + \delta^{(3)}(\vec 0) \right)$ ist Summe von Bes.-zahl-Op's!

"Vakuumenergie" unphysikalisch!

(($(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec 0) = \int d^3x\, e^{i0\cdot x} = \int d^3x \xrightarrow{\text{falls Volumen des Systems endlich}} \int_{(V)} d^3x = V$))

$=$ positiv!

$\sim$ Gesamtenergie

haben also keine neg. Energien mehr.

$\hat a_{\vec p}$ vernichtet ein Teilchen mit Impuls $\vec p$;
dieses muß also im Anfangszustand vorhanden sein.

$\hat a^+_{\vec p}$ erzeugt ein Teilchen mit Impuls $\vec p$;
dieses muß also im Endzustand vorhanden sein.

$\Rightarrow$ $\hat a_{\vec p}$ repräsentiert ein einlaufendes Teilchen
$\hat a^+_{\vec p}$ auslaufendes Teilchen
$\hat b_{\vec p}$ einlaufendes Antiteilchen
$\hat b^+_{\vec p}$ auslaufendes Antiteilchen

	T.	A.
ein	$\hat a_{\vec p}$	$\hat b_{\vec p}$
aus	$\hat a^+_{\vec p}$	$\hat b^+_{\vec p}$

Maxwell-Glg (s. S. 15)

strukturell: Max $\approx$ KG; benutze Lsg der KG mit kleinen Änderungen

wegen "Eichfreiheit" dürfen wir von den Lsn

(z.B.) fordern: $\partial_i A^i(t,\vec x) \equiv 0$ "Coulomb-Eichung"

$\Rightarrow (\text{Max})^{\nu=0}$: $\partial_i\partial^i A^0 = j^0$

(Greens zu Δ) $\Rightarrow A^0(t,\vec x) = \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec x'\, \frac{\rho(t,\vec x')}{|\vec x - \vec x'|}$

$\to A^0 \sim \rho$ in Coulomb-Eichung. keine Wellen.

$\Rightarrow (\text{Max})^{\nu=i}: \quad \partial_\mu \partial^\mu A^i - \partial_0 \partial^i A^0 = j^i$

$\Leftrightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^i = j^i + \partial_0 \partial^i A^0$, 3 (inhom.) Wellengl.!

also können wir für die freien Max. $(\rho = 0,\ \vec{j} = \vec{0})$

$A^0 = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu A^i = 0, \quad \partial_i A^i = 0$ (Coulomb-Eichg)

Lösungen als ebene Wellen finden

Wie KG. Hier aber:

- $A^\mu(t,\vec{x})$ reell $\Leftrightarrow$ $\hat{A}^\mu(t,\vec{x})$ hermitesch $\Leftrightarrow$ $\hat{a}_{\vec{p}} = \hat{b}_{\vec{p}}$
- i.A. gibt es vier verschiedene Lsn A^μ, $\mu = 0,1,2,3$

  $\Rightarrow$ Polarisationsvektor $\varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})$

$$\hat{A}^\mu(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \sum_\lambda \varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p}) \left(\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}}\, e^{-ipx} + \hat{a}^{+(\lambda)}_{\vec{p}}\, e^{ipx} \right)$$

$\Rightarrow \varepsilon^0_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0$ (damit $A^0 = 0$)

$p_i \varepsilon^i_{(\lambda)}(\vec{p}) = 0$ (damit $\partial_i A^i = \dots p_i \varepsilon^i \dots = 0$)

d.h. $\vec{\varepsilon} \perp \vec{p}$: Pol.-vektor $\perp$ Ausbreitungsrichtung

$\Rightarrow \exists$ zwei lin. unabh. Lsn

z.B. $\vec{p} = |\vec{p}|\,\vec{e}_z \Rightarrow \vec{\varepsilon}_{(1)} = (1,0,0)$

$\vec{\varepsilon}_{(2)} = (0,1,0)$ (oder LK's)

$\Rightarrow$ freies Photon ist transversal polarisiert

für die Summe über alle Polarisationsvektoren gilt die "Vollständigkeitsrelation"

$$\sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^i_{(\lambda)}(\vec{p})\, \varepsilon^j_{(\lambda)}(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^2}$$

(in Coulomb-Eichung)

Bem:
- $A^\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Lsg hat keinen $\hat{b}$-Op. $\Rightarrow \nexists$ Antiphotonen
- $\hat{a}^{(\lambda)}_{\vec{p}} / \hat{a}^{+(\lambda)}_{\vec{p}}$ repräsentiert ein einlaufendes/auslaufendes Teilchen
- Polarisation bestimmt durch $\varepsilon^\mu_{(\lambda)}(\vec{p})$, $\lambda = 1,2$

Dirac-Glg.

suche Lsn der Dirac-Glg $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$, $\psi(x) = \psi(t,\vec{x}) = ? \in \mathbb{C}$

wieder als ebene Wellen $\psi(x) \sim u(\vec{p})\, e^{-ipx}$

analog Pol.-Vektor $\vec{\varepsilon}(\vec{p})$ in Max-Lsn

d.h. $i\partial_\mu \to p_\mu$

$\Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(\vec{p}) = 0$

Lzw. $\boxed{(\not{p} - m)\, u(\vec{p}) = 0}$ mit $\not{p} := \gamma^\mu p_\mu$

Lzw. (mit Standard-Darst. der γ^μ, s. S. 13)

$$\begin{pmatrix} (p^0-m)\mathbb{1} & -p^k\sigma^k \\ p^k\sigma^k & (-p^0-m)\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} (p^0-m)u_1 - p^k\sigma^k u_2 &= 0 \\ p^k\sigma^k u_1 - (p^0+m)u_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{p^0-m}\, p^k\sigma^k u_2 = \frac{1}{(p^0)^2-m^2}\, \underbrace{p^k\sigma^k p^j\sigma^j}_{= p^k p^j \frac{1}{2}\{\sigma^k,\sigma^j\} = p^k p^j \frac{1}{2} 2\delta^{kj}\mathbb{1}_{2\times2} = \vec{p}^2\mathbb{1}}\, u_1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\vec{p}^2}{(p^0)^2-m^2} \quad \Leftrightarrow \quad p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2} = \pm E_{\vec{p}}$$

es gilt (wie bei KG) wieder 2 Arten von Lsn: "pos/neg. Energie"

Lsg "pos. Energie": $u(\vec{p})\, e^{-ipx}$, erfüllt $(\not{p}-m)u(\vec{p}) = 0$

$\Rightarrow$ setze $u(\vec{p}) = (\not{p}+m)\cdot c_1 u_0$ ← Spinor; unabhängig von $\vec{p}$

Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$ (s.u.: aus Norm)

((denn dann $(\not{p}-m)(\not{p}+m)\, c u_0 = (p^2-m^2)\, c u_0 = 0$))

zwei unabh. (Spin-) Zustände; wähle $u_0 = \begin{pmatrix} \xi_\pm \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

also insgesamt $u(\vec{p},s) = c_1 (\not{p}+m) \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}$, $s = \pm$

Lsg "neg. Energie": $v(\vec{p})\, e^{+ipx}$ mit $p^0 = +E_{\vec{p}}$, erfüllt $(\not{p}+m)v(\vec{p}) = 0$

$\Rightarrow$ setze $v(\vec{p}) = (\not{p}-m)\cdot c_2 \cdot v_0$

wähle $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_\pm \end{pmatrix}$

so daß $v(\vec{p},s) = c_2 (\not{p}-m) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix}$

die Lsn u, v sind orthogonal gewählt: $u^+ v = 0 = v^+ u$

Im Ruhesystem $(\!(\vec p = \vec 0\,;\ p^0 = m)\!)$ ergibt sich damit

$$u(\vec 0, s) = c_1 \begin{pmatrix} 2m\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix} = 2m c_1 \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(\vec 0, s) = c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2m\mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix} = -2m c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{-s} \end{pmatrix}$$

def. <u>hermitesch konjugierter</u> Spinor $u^\dagger := (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$ falls $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$

def. <u>Dirac-adjungierter</u> Spinor $\bar u := u^\dagger \gamma^0$

Normierung der Lsn? → Wahl der Konstanten c_1, c_2

fordere $\bar u(\vec p, s)\, u(\vec p, s') = 2m\, \delta_{ss'}$

$\bar v(\vec p, s)\, v(\vec p, s') = -2m\, \delta_{ss'}$

$(\bar u v = 0 = \bar v u$ automatisch durch Wahl der $u_0, v_0)$

$$\Rightarrow \quad c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{E_{\vec p} + m}}$$

$$\Rightarrow \quad u^\dagger(\vec p, s)\, u(\vec p, s') = 2E_{\vec p}\, \delta_{ss'} = v^\dagger(\vec p, s)\, v(\vec p, s')$$

} Beweis s. Übung Aufgabe 14

oft (s.z.B. später: Auswertung von "Feynman-Diagrammen" brauchen wir die Summe über alle Spinzustände: <u>Vollständigkeitsrelation</u>

$$\sum_{s=\pm} u_\alpha(\vec p, s)\, \bar u_\delta(\vec p, s) = \sum_s c_1^2 (\not p + m)_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix}_\beta (\xi_s^T\ 0)_\delta (p_\mu \gamma^{\mu\dagger} + m)_{\delta\sigma} \gamma^0_{\sigma\varsigma}$$

$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$, s. Übung 10a

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\beta (1000)_\delta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\beta (0100)_\delta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\beta\delta}$$

$$= \frac{1}{p^0 + m} \begin{pmatrix} p^0 + m & -\vec p \vec\sigma \\ \vec p \vec\sigma & -p^0 + m \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}_{\delta\sigma} \begin{pmatrix} p^0 + m & -\vec p \vec\sigma \\ \vec p \vec\sigma & -p^0 + m \end{pmatrix}_{\sigma\varsigma}$$

$$= \frac{1}{p^0 + m} \begin{pmatrix} (p^0 + m)^2 & -(p^0 + m)\vec p \vec\sigma \\ (p^0 + m)\vec p \vec\sigma & -\vec p^{\,2} \end{pmatrix}_{\alpha\varsigma}$$

$$\left(-\vec p^{\,2} = m^2 - p_0^2 = (m - p^0)(m + p^0)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} p^0 + m & -\vec p \vec\sigma \\ \vec p \vec\sigma & -p^0 + m \end{pmatrix}_{\alpha\varsigma}$$

$$= (\not p + m)_{\alpha\varsigma}$$

letzter Term:

$$\left(p_\mu \gamma^{\mu\dagger} + m\right)\gamma^0 = \left(p_\mu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 + m\right)\gamma^0 = \gamma^0\left(\not p\, \gamma_0^2 + m\right) = \gamma^0(\not p + m)$$

$$\sum_{s=\pm} v_\alpha(\vec p, s)\, \bar v_\varsigma(\vec p, s) = \ldots = (\not p - m)_{\alpha\varsigma} \qquad \text{genauso}$$

zweite Quantisierung

die Lsn der Dirac-Glg werden durch Teilchen- und Antiteilchenzustände interpretiert. [→ s. QFT-Vorlesung]

Hier: die wichtigsten Resultate der QFT-Behandlung als "Zitat"

Felder $\psi(x)$ → Feldoperatoren

$$\hat\psi = \int \frac{d^3\vec p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec p}}} \sum_{s=\pm} \left(\hat a^{(s)}_{\vec p}\, u(\vec p, s)\, e^{-ipx} + \hat b^{\dagger(s)}_{\vec p}\, v(\vec p, s)\, e^{+ipx} \right)$$

$$\hat{\bar\psi} = \qquad \hat a^\dagger\ \bar u\ e^{+ipx} \qquad \hat b\ \bar v\ e^{-ipx}$$

Vertauschungsrelationen sind <u>Antikommutatoren</u>

$$\left\{ \hat a^{(s)}_{\vec p}, \hat a^{\dagger(s')}_{\vec p'} \right\} = \delta^{(3)}(\vec p - \vec p')\, \delta_{ss'} = \left\{ \hat b^{(s)}_{\vec p}, \hat b^{\dagger(s')}_{\vec p'} \right\} \ ; \quad \text{Rest} = 0$$

⇒ Dirac-Felder gehorchen der Fermi-Dirac-Statistik

z.B. 1-Elektron-Zustand $|e^-\rangle \sim \hat a^{\dagger(s)}_{\vec p} |0\rangle$

2- " $|2e^-\rangle \sim \hat a^{\dagger(s)}_{\vec p}\, \hat a^{\dagger(s)}_{\vec p} |0\rangle = 0$ Pauli-Prinzip

Ges.-Energie → Hamilton-Operator (wie bei KG-Glg, s.S. 18)

$$\hat H = \int d^3\vec p\, E_{\vec p} \sum_{s=\pm} \left(\hat a^{\dagger(s)}_{\vec p}\, \hat a^{(s)}_{\vec p} - \hat b^{(s)}_{\vec p}\, \hat b^{\dagger(s)}_{\vec p} \right)$$

$$= \int d^3\vec p\, E_{\vec p} \sum_{s=\pm} \left(\hat a^{\dagger(s)}_{\vec p}\, \hat a^{(s)}_{\vec p} + \hat b^{\dagger(s)}_{\vec p}\, \hat b^{(s)}_{\vec p} - \delta^{(3)}(\vec 0) \right)$$

erhaltene Gesamtladung

$$\hat Q = \int d^3\vec x\, \hat{\bar\psi}\, \gamma_0\, \hat\psi = \int d^3\vec p \sum_{s=\pm} \left(\hat a^{\dagger(s)}_{\vec p}\, \hat a^{(s)}_{\vec p} - \hat b^{\dagger(s)}_{\vec p}\, \hat b^{(s)}_{\vec p} \right)$$

völlig analog zur Lsg der KG-Glg (s.S. 18) interpretiert man die Operatoren $\hat a, \hat b$ wieder als ein/aus-laufende Teilchen/Antiteilchen:

	Teilchen	Antiteilchen
einlaufendes	$\hat a^{(s)}_{\vec p}$	$\hat b^{(s)}_{\vec p}$
auslaufendes	$\hat a^{\dagger(s)}_{\vec p}$	$\hat b^{\dagger(s)}_{\vec p}$

Im Zusammenhang mit Dirac-Teilchen ist es nützlich, zwei Konzepte zur Klassifizierung des "Eigendrehimpulses" einzuführen:

Helizität

Def (physikalisch; analog Polarisation des Photons)

Helizität h = (Projektion des Spins auf Bewegungsrichtung) $\cdot 2$

z.B. $s_z = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow h = \pm 1$

Beschreibung (mathematisch; s. auch Übung, Aufgabe 15)

Helizität $h(\vec{p}) := \vec{e}_{\vec{p}} \cdot \vec{\Sigma}$, $\vec{\Sigma} := \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$, $\vec{e}_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

Spin entlang Bewegungsrichtung $\vec{e}_{\vec{p}}$ ist dann $S_{\vec{e}_{\vec{p}}} = \frac{1}{2} h(\vec{p})$

es gilt: $h^2(\vec{p}) = \mathbb{1} \Rightarrow EW = \pm 1$

Projektoren $P_\pm^{(h)} := \frac{\mathbb{1} \pm h}{2}$ $\quad$ ((denn $(P_\pm^{(h)})^2 = P_\pm^{(h)}$, $P_+^{(h)} P_-^{(h)} = 0$, $P_+^{(h)} + P_-^{(h)} = \mathbb{1}$))

$\rightarrow$ können jeden Zustand als $u = (P_+^{(h)} + P_-^{(h)}) u =: u_+^{(h)} + u_-^{(h)}$ schreiben!

z.B. $\vec{p} = p\vec{e}_z \Rightarrow h(\vec{p}) = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1)$

$$h(\vec{p})\, u(\vec{p},s) = h(\vec{p}) \frac{1}{\sqrt{E_p + m}} \begin{pmatrix} E_p + m & 0 & -p & 0 \\ 0 & E_p + m & 0 & p \\ p & 0 & -E_p + m & 0 \\ 0 & -p & 0 & -E_p + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_s \\ 0 \end{pmatrix} = h(\vec{p}) \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m}\, \xi_s \\ \frac{sp}{\sqrt{E_p + m}} \xi_s \end{pmatrix} = s\, u(\vec{p},s)$$

$\Rightarrow$ Helizitäts-EW ist s!

Chiralität

Def (mathematisch; s. auch Übg, Aufgabe 15)

Chiralitätsoperator $\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

es gilt: $\gamma_5^2 = \mathbb{1} \Rightarrow EW = \pm 1$

Projektoren $P_{R/L} := \frac{\mathbb{1} \pm \gamma_5}{2}$ $\quad$ ((denn $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $P_L P_R = 0$, $P_L + P_R = \mathbb{1}$))

$\rightarrow$ können jeden Zustand als $u = (P_L + P_R) u =: u_L + u_R$ schreiben!

"rechtshändig"

"linkshändig"

Beschreibung (physikalische Relevanz)

- die schwache Wechselwirkung wirkt nur auf linkshändige Teilchen (s. später)
- masselose Teilchen: Chiralität $\hat{=}$ Helizität

  z.B. $\vec{p} = p\vec{e}_z$, $m = 0 \Rightarrow u(\vec{p},s) = \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \xi_s \\ s\xi_s \end{pmatrix}$

  $\gamma_5\, u(\vec{p},s) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \xi_s \\ s\xi_s \end{pmatrix} = \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} s\xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} = s\, u(\vec{p},s)$

  $\Rightarrow$ Chiralitäts-EW ist s!

- Neutrinos werden nur in schwachen WW's erzeugt, sind also linkshändig. $m_\nu = 0 \Rightarrow s = -1$: (ü 15d)

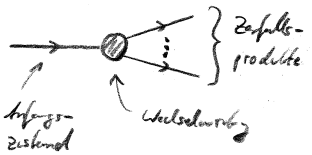
3. wechselwirkende Teilchen

bisher: Beschreibung freier relativistischer Teilchen (mit Impuls $\vec{p}$; Polarisation λ; Helizität s)

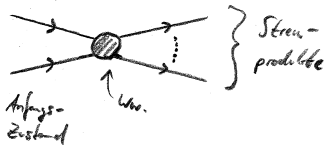
jetzt: Wechselwirkungen erlaubt

haben zwei grundlegende Arten von Prozessen:

Zerfälle



Streuung



3.1 Zerfälle

einige wichtige Vokabeln:

- Lebensdauer τ

  wird meist für ein ruhendes Teilchen angegeben (vgl. Ü 4)

  QM $\rightarrow$ für ein energiereiches T. keine genaue Vorhersage

  $\rightarrow$ τ ist "mittlere" Lebensdauer

- Zerfallsrate Γ ≙ Wahrscheinlichkeit (pro Zeiteinheit) daß Zerfall stattfindet

  T.-Zahl N, $dN = -\Gamma N\, dt \Rightarrow N(t) = N(0)\, e^{-\Gamma t}$

  es gilt $\Gamma = \frac{1}{\tau}$

  ((denn: $\tau = \langle t \rangle = \frac{\int_0^\infty dt\; t\; N(t)}{\int_0^\infty dt\; N(t)} = \frac{-\partial_\Gamma \int dt\, e^{-\Gamma t}}{\int dt\, e^{-\Gamma t}} \overset{x=\Gamma t}{=} \frac{-\partial_\Gamma \frac{1}{\Gamma}}{\frac{1}{\Gamma}} = \frac{1}{\Gamma}$ ●))

- Zerfallskanal i (i beschreibt Art der Zerfallsprodukte; s. PDG)

  z.B. Zerfallsrate in diesem Kanal $= \Gamma_i$

- Gesamtzerfallsrate $\Gamma_{tot} = \sum_i \Gamma_i$

- Verzweigungsverhältnis Γ_i / Γ_{tot}

  je größer also das Verzweigungsverhältnis, desto mehr Zerfälle im Kanal

Berechnung der Zerfallsrate

per zeitabhängiger Störungstheorie im Ww.-Bild (s. S. 11 und Ü 9)

$$\hat H = \underbrace{\hat H_0}_{\text{freie T.}} + \underbrace{g \hat V}_{\text{Ww}} \quad ; \quad |\psi(t)\rangle_I = \underbrace{\hat U_I(t,t_0)}_{\text{Zeitentwicklungs-Op.}} |\psi(t_0)\rangle_I$$

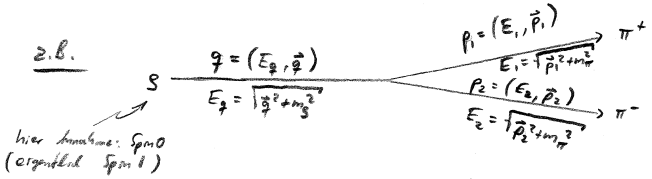
$$\hat U_I(t,t_0) = \mathbb{1} - i g \int_{t_0}^{t} dt'\, \hat V_I(t') + O(g^2)$$

def Streumatrix $S_{fi} := {}_I\langle f | \hat U_I(+\infty, -\infty) | i \rangle_I$

(f: Endzust. ("final"), i: Anfangszustand ("initial")

→ für $g = 0$ ist S_{fi} diagonal

z.B.



Ww. habe die Form $g \hat V_I(t') = \int d^3x\; \underbrace{\mathcal M}_{\text{Konstante}}\; \hat\phi^+(t',\vec x)\, \hat\phi(t',\vec x)\, \hat s(t',\vec x)$

mit
$$\hat\phi(x) = \int \frac{d^3p_1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_1}} \left(\hat a_{\vec p_1} e^{-ip_1x} + \hat b^+_{\vec p_1} e^{+ip_1x} \right)$$
erzeugt Antiteilchen. ≙ auslaufendes π^+

$$\hat\phi^+(x) = \int \frac{d^3p_2}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_2}} \left(\hat a^+_{\vec p_2} e^{+ip_2x} + \hat b_{\vec p_2} e^{-ip_2x} \right)$$
erzeugt Teilchen. ≙ auslaufendes π^-

$$\hat s(x) = \int \frac{d^3q}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_q}} \left(\hat a_{\vec q} e^{-iqx} + \hat a^+_{\vec q} e^{+iqx} \right)$$
vernichtet Teilchen. ≙ einlaufendes s

damit wird das nicht-triviale Matrixelement (in erster Ordnung Stö.)

$$S_{fi} = -i \langle \pi^+(\vec p_1)\pi^-(\vec p_2) | \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x\; \mathcal M\, \hat\phi^+ \hat\phi\, \hat s\; | s(\vec q) \rangle$$

$$= -i \int dt' \int d^3x\; \mathcal M \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_1}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_2}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_q}}\, e^{i(p_1+p_2-q)x}$$

$$= -i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q) \frac{\mathcal M}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_1}\sqrt{(2\pi)^3 2E_2}\sqrt{(2\pi)^3 2E_q}}$$

$\mathcal M$ ← Amplitude

$$=: -i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q)\; T_{fi}$$

T_{fi} ← Transfermatrixelement

↑ E-p-Erhaltung; kommt automatisch heraus.

zur Berechnung der Zerfallsrate des s müssen wir über die Impulse aller auslaufenden Teilchen integrieren: (($\Gamma \sim \frac{\text{Wahrsch.}}{\text{Zeit}} \sim \frac{|S|^2}{T}$, s. S. 25))

$$\Gamma = \frac{1}{T} \int d^3p_1 \int d^3p_2\; |S_{fi}|^2$$

$$= \frac{1}{T} \int d^3p_1 \int d^3p_2\; (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q)\; \underbrace{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)}_{= V\cdot T,\ \text{vgl. S. 18}}\; |T_{fi}|^2$$

das s im Anfangszustand ist ebene Welle, also überall im Raum.

Normierung $\langle s(\vec q) | s(\vec q) \rangle = \delta^{(3)}(\vec 0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$

((denn: $\langle s(\vec p) | s(\vec q) \rangle = \langle 0 | \hat a^+_{\vec p} \hat a^+_{\vec q} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat a_{\vec p} \hat a^+_{\vec q} | 0 \rangle$
$= \langle 0 | [\hat a_{\vec p}, \hat a^+_{\vec q}] + \cancel{\hat a^+_{\vec q} \hat a_{\vec p}} | 0 \rangle = \delta^{(3)}(\vec p - \vec q) \langle 0 | 0 \rangle$))

also teilen wir für ein Teilchen mit Norm $\langle s | s \rangle \equiv 1$ durch $V/(2\pi)^3$:

$$\boxed{\Gamma_{s\to\pi^+\pi^-} = \frac{1}{2E_{\vec q}} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\; (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-q)\; |\mathcal M|^2}$$

"Fermi's Goldene Regel"

$$\Gamma_{s\to 1\dots n} = \frac{1}{2E_{\vec q}}\, c \underbrace{\int d\Phi_n}_{= \left(\prod_{i=1}^{n} \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec p_i}}\right)(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - q\right)}\; |\mathcal M|^2$$

= "n-Teilchen Phasenraumintegration"

statistischer Faktor, z.B. $c = \frac{1}{N!}$ für N identische T.

Zur endgültigen Berechnung der Zerfallsrate muß jetzt "nur noch" die Phasenraumintegration ausgeführt werden.

z.B. für $A \to 1+2$ im A-Ruhesystem ← s. Übung, Aufgabe 17

nützlich: Phasenraumintegration Lorentzinvar. schreiben (($p = (p^0, \vec{p})$))

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, 2\pi\, \delta(p^2 - m^2)\, \Theta(p^0) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp_0\, \delta(p_0^2 - E_{\vec{p}}^2) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}}$$

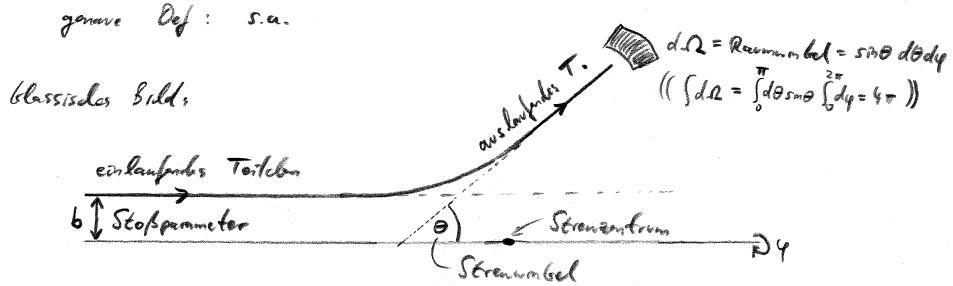
((via $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ für einfache Nullstellen x_i von f))

3.2 Streuprozesse

wichtige Vokabeln:

- elastische Streuung / inelastische Streuung
  $1+2 \to 1+2$ / $1+2 \to 1+2+3+\dots$ oder $1+2 \to 3+4$ etc
- exklusiver Prozeß / inklusiver Prozeß
  alle Streuprodukte werden untersucht / nur ein Teil der Streuprodukte werden identifiziert: z.B. $1+2 \to 3+$"Rest"
- Wirkungsquerschnitt σ
  klassisch: Größe des Ziels, aus der Sicht des einlaufenden T.
  QM: ähnlich; hängt von v ($\hat{=} E$) der T. ab.
  E-Abhängigkeit kann groß sein; bei "Resonanzenergie" wirkt Ziel groß!
  genaue Def: s.u.

klassisches Bild:



- barn ("Scheune")
  oft benutzte Einheit von σ. $1\ \text{barn} = 10^{-28}\,\text{m}^2 = (10\,\text{fm})^2$
  $\hat{\approx}$ geometrischer Querschnitt schwerer Atome (z.B. Uran)

def differentieller Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} := \frac{1}{L_{ein}} \frac{d^2N_{aus}}{d\Omega\, dt}$

Luminosität $= \frac{d^2N_{ein}}{dA\, dt}$
= Anzahl der einlaufenden T. pro Zeit- und Flächeneinheit

Anzahl der in Richtung $\Omega = (\theta, \varphi)$ beobachteten auslaufenden T. pro Zeiteinheit pro Raumwinkel

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}\right] = \frac{1}{1/\text{m}^2\text{s}} \frac{1}{\text{s}} = \text{m}^2 = [\text{Fläche}]$$

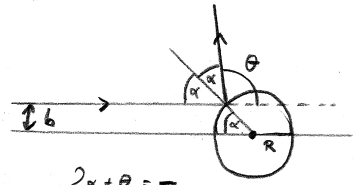
⇒ Ereignisrate = Wirkungsquerschnitt · Luminosität

def totaler Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi)$$

((oft: $u := \cos\theta$, $\int_0^\pi d\theta \sin\theta = \int_{-1}^{1} du$))

Bsp: Streuung an harter Kugel

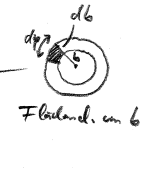


Frage: $\sigma = ?$

hier $b \sim \sigma$: $b = R\sin(\alpha)$, $2\alpha + \theta = \pi$
$= R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Luminosität $L_{ein} = \frac{N_{ein}}{V} \cdot v$ ← Geschw. d. ein- (und aus-) laufenden T.

zwischen $\theta, \theta + d\theta$ beobachtet man Teilchen aus $b, b + db$
mit $db = -\frac{R}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$



also
$$\frac{d^2N_{aus}}{d\Omega\, dt} = \frac{1}{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi} \frac{N_{ein}}{V} \cdot v\, |b\, db\, d\varphi|$$
$$= L_{ein} \frac{R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{R}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta\, d\varphi}{\sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi}$$
$$= L_{ein} \frac{R^2}{4} \qquad ((\text{da } \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)))$$

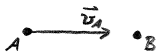
$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$$

und $\sigma = \int d\Omega \frac{R^2}{4} = \pi R^2$ ist klassischer Querschnitt der Kugel!

• <u>Luminosität</u> in Teilchenstößen

$A + B \to$ "irgendetwas".

$m_B \neq 0 \to$ gehe ins Ruhesystem von Teilchen B



Normierung $\langle A|A\rangle = 1 = \langle B|B\rangle$

(($\hat{=}$ nur ein T. A und ein T. B im ganzen Volumen V))

Luminosität der einlaufenden ebenen A-Welle ist dann

$$L_{ein} = \frac{1}{V}|\vec{v}_A|$$

$|\vec{v}_A|$ ← Geschwindigkeit

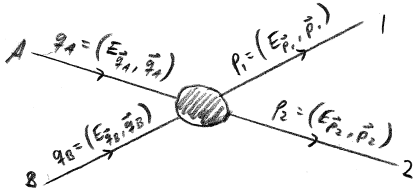
$\frac{1}{V}$ ← durchschnittliche Teilchendichte

<u>Goldene Regel für Streuprozesse</u>

"Rezept" wie bei Zerfallsrate: Amplituden ($\mathcal{M}$) ← dynamische Information; bekannt → Feynmanregeln, s.u.

Phasenraum ← kinematische Information; $m, E, \vec{p}$

z.B.



$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V} \quad \text{mit} \quad g\hat{V} = \int d^3\vec{x}\, \mathcal{M}\, \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2$$

berechnen wieder (vgl. S. 25,26) Streumatrixelement in 1. Ordn. Störung

eml. T. $\to \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{q}}}} e^{-iqx}$, ausl. T. $\to \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} e^{+ipx}$

$$S_{fi} = -i\langle \phi_1(\vec{p}_1)\phi_2(\vec{p}_2) | \int dt' d^3\vec{x}\, \mathcal{M}\, \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 | \phi_A(\vec{q}_A)\phi_B(\vec{q}_B)\rangle$$

$$= -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_A - q_B) \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{p_1}}\sqrt{\ p_2\ }\sqrt{\ q_A\ }\sqrt{\ q_B\ }}$$

und, wie oben: Rate $= \frac{|S_{fi}|^2}{T}$; dabei $(2\pi)^4\delta^{(4)}(0) \to V \cdot T$

integriere über alle $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ für totalen Wirkungsquerschnitt

2 ebene Wellen im Anfangszustand

$\to$ teile für 2 Teilchen durch $[V/(2\pi)^3]^2$

$$\Rightarrow \frac{dN_{aus}}{dt} = \text{totale Ereignisrate}$$

$$= \frac{1}{V 2E_{\vec{q}_A} 2E_{\vec{q}_B}} \underbrace{\int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \int \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_A - q_B)}_{=: \int d\Phi_2} |\mathcal{M}|^2$$

$$= L_{ein} \cdot \sigma \qquad (\text{laut Def., s. S. 28})$$

gehe ins <u>Ruhesystem von B</u> (s. S. 29 oben)

$$= \frac{|\vec{v}_A|}{V} \cdot \sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{1}{F} \int d\Phi_2 |\mathcal{M}|^2} \quad \text{Goldene Regel}$$

mit $\int d\Phi_n := \left(\prod_{i=1}^{n} \int \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j - q_A - q_B \right)$

und <u>Flussfaktor</u> $F = 4|\vec{v}_A| E_{\vec{q}_A} m_B$ (im B-Ruhesyst.)

sieht hier nicht sehr L-inv. aus!

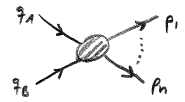
$d\Phi_n$ ist L-inv (s. S. 27), $|\mathcal{M}|^2$ auch

$\rightsquigarrow$ F in L-inv. Form schreiben:

$$= 4\frac{|\vec{q}_A|}{E_{\vec{q}_A}} E_{\vec{q}_A} m_B = 4\sqrt{\vec{q}_A^{\,2} m_B^2} = 4\sqrt{(E_{\vec{q}_A}^2 - m_A^2)\, m_B^2}$$

$$= 4\sqrt{(q_A \cdot q_B)^2 - m_A^2 m_B^2} \qquad ((\text{denn } q_B = (m_B, 0),\ q_A = (E_{\vec{q}_A}, \vec{q}_A)))$$

Insgesamt haben wir also die <u>Goldene Regel</u> in allg. Form



$$\sigma_{2\to n} = \frac{1}{F} \int d\Phi_n |\mathcal{M}|^2$$

$|\mathcal{M}|^2$ ← Amplitude

$d\Phi_n$ ← Phasenraumint., s.o.

$$F = 4\sqrt{(q_A \cdot q_B)^2 - m_A^2 m_B^2}$$

Der Flussfaktor F kann auf verschiedene Art und Weise geschrieben werden:

<u>z.B.</u> mit Hilfe der kinematischen Invariante $s := (q_A + q_B)^2$

$$F = 2\sqrt{(2q_A \cdot q_B)^2 - 4m_A^2 m_B^2} = 2\sqrt{(s - q_A^2 - q_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2}$$

$$= 2\sqrt{(s - m_A^2 - m_B^2)^2 - 4m_A^2 m_B^2}$$

((Bem.: s wird häufig verwendet, denn es ist

die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem $= E_A + E_B = \sqrt{s}$;

denn: CMS $\xrightarrow{\vec{q}_A} \quad \xleftarrow{\vec{q}_B = -\vec{q}_A}$ $\Rightarrow$ $q_A = (E_{\vec{q}_A}, \vec{q}_A)$

"center of mass system" $\qquad q_B = (E_{\vec{q}_B}, -\vec{q}_A)$

also $q_A + q_B = (E_A + E_B, \vec{0})$ mit $E_A = \sqrt{\vec{q}_A^{\,2} + m_A^2}$, $E_B = \sqrt{\vec{q}_A^{\,2} + m_B^2}$

und $(q_A + q_B)^2 = (E_A + E_B)^2 = s$ ■))

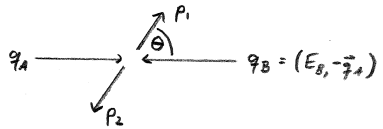
oder z.B. im Schwerpunktsystem (CMS)

$$(q_A \cdot q_B)^2 - m_A^2 m_B^2 = (E_A E_B + \vec{q}_A^{\,2})^2 - m_A^2 m_B^2$$
$$= E_A^2 E_B^2 + 2 E_A E_B \vec{q}_A^{\,2} + (\vec{q}_A^{\,2})^2 - m_A^2 m_B^2$$
$$= \vec{q}_A^{\,2} \left(2\vec{q}_A^{\,2} + m_A^2 + m_B^2 + 2E_A E_B\right) = \vec{q}_A^{\,2} (E_A + E_B)^2$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{F} = 4(E_A + E_B)|\vec{q}_A|$$

Bsp: Phasenraumintegration für Zweikörper-Streuung

$A + B \to 1 + 2$ im CMS:



$$d\sigma_{2\to 2} = \frac{1}{\mathcal{F}} d\Phi_2 |\mathcal{M}|^2$$

$$= \frac{1}{4(E_A+E_B)|\vec{q}_A|} \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \overbrace{\delta(E_1+E_2-E_A-E_B)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)}^{=\delta^{(4)}(\Sigma p - \Sigma q) \text{ im CMS}} |\mathcal{M}|^2$$

s.o.

nutze $\delta^{(3)}$ für $\vec{p}_2$-Integration. Nachlässigkeit in Bezeichnung: wieder $d\sigma$

$$= \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\vec{q}_A|(E_A+E_B)} d^3\vec{p}_1 \frac{\delta\left(\sqrt{m_1^2+\vec{p}_1^{\,2}} + \sqrt{m_2^2+\vec{p}_1^{\,2}} - E_A - E_B\right)}{\sqrt{m_1^2+\vec{p}_1^{\,2}}\sqrt{m_2^2+\vec{p}_1^{\,2}}}$$

wovon kann $|\mathcal{M}|^2$ abhängen?

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A, \vec{q}_B, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A, -\vec{q}_A, \vec{p}_1, -\vec{p}_1) = |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A, \vec{p}_1)$$
$$= |\mathcal{M}|^2(\vec{q}_A^{\,2}, \vec{p}_1^{\,2}, \vec{q}_A \cdot \vec{p}_1) = |\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, |\vec{p}_1|, \cos\theta)$$

da $|\mathcal{M}|^2$ ein Skalar sein muss

schreibe $\vec{p}_1$-Integration in Kugelkoordinaten um $\vec{q}_A$

$$d^3\vec{p}_1 = q^2 dq\, d\Omega \,, \quad q \equiv |\vec{p}_1|$$
$$d\Omega \equiv \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

substituiere $q \to E := \sqrt{m_1^2+q^2} + \sqrt{m_2^2+q^2}$ in Radialintegration

$$\Rightarrow dE = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m_1^2+q^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m_2^2+q^2}}\right) 2q\,dq = E \frac{q\,dq}{\sqrt{m_1^2+q^2}\sqrt{m_2^2+q^2}}$$

und $q(E) = \frac{1}{2E}\sqrt{E^4 - 2E^2(m_1^2+m_2^2) + (m_1^2-m_2^2)^2}$

((denn: $E^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2q^2 + 2\sqrt{\ }\sqrt{\ }$

$$(E^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2q^2)^2 = 4(m_1^2+q^2)(m_2^2+q^2)$$
$$E^4 + m_1^4 + m_2^4 + \cancel{4q^4} - 2E^2m_1^2 - 2E^2m_2^2 - 4E^2q^2 + 2m_1^2m_2^2 + \cancel{4m_1^2q^2} + \cancel{4m_2^2q^2}$$
$$= 4m_1^2m_2^2 + \cancel{4m_1^2q^2} + \cancel{4m_2^2q^2} + \cancel{4q^4}$$

diese Glg nach q^2 auflösen ■))

können auch noch $E_A + E_B = \sqrt{s}$ im CMS verwenden

$$\frac{d\sigma_{2\to 2}}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2}\frac{1}{|\vec{q}_A|\sqrt{s}} \int_{m_1+m_2}^{\infty} \frac{dE}{E} q(E)\, |\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, q(E), \cos\theta) \cdot \delta(E - \sqrt{s})$$

Deltafkt schlägt nur für $\sqrt{s} > m_1 + m_2$ zu!

$$= \frac{1}{(8\pi)^2}\frac{1}{|\vec{q}_A|\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s}} q(\sqrt{s})\, |\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, q(\sqrt{s}), \cos\theta) \cdot \Theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2)$$

aber $q = |\vec{p}_1|$, s.o., so daß $q(\sqrt{s})$ das durch E-p-Erhaltung fixierte $|\vec{p}_1|$ ist

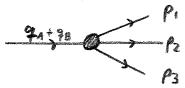
$$= \frac{1}{(8\pi)^2}\frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{q}_A|} \frac{|\mathcal{M}|^2(|\vec{q}_A|, |\vec{p}_1|, \cos\theta)}{(E_A+E_B)^2}$$

Bem.:
- konnten für $2\to 2$ Streuung also Phasenraumintegration ohne explizite Kenntnis von $|\mathcal{M}|^2$ ausführen!
- im Allgemeinen geht das nicht bei $2 \to n > 2$
- haben im CMS gearbeitet, und $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ durch Variablen in diesem System ausgedrückt.
- manchmal bequemer: Lorentz-Invariante Variablen

L-inv: m_A, m_B, m_1, m_2 ; Mandelstam-Variablen $\begin{cases} s := (q_A + q_B)^2 \\ t := (q_A - p_1)^2 \\ u := (q_A - p_2)^2 \end{cases}$

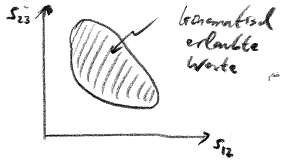
↳ s. Übung, Aufgabe 21

- bei $2 \to n > 2$ Streuung ist die Kinematik etwas komplizierter, z.B.



$\Rightarrow$ $s_{12} := (p_1+p_2)^2$, $s_{13} := (p_1+p_3)^2$, $s_{23} := (p_2+p_3)^2$

$s_{12} + s_{13} + s_{23} = (q_A+q_B)^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \text{const}$ $\rightsquigarrow$ zwei genügen!



"Dalitz-Plot": stellt die erlaubte Region dar.
Jeder Punkt $\hat{=}$ einer Geometrie des Endzustandes

- eine tiefergehende Behandlung der Phasenraumintegralen ist z.B. in [Fayyazuddin / Riazuddin, "Modern Intro. to Particle Phys.", s. 3-body phase space]

Jetzt fehlt uns nur noch eine Methode, um $|\mathcal{M}|^2$ zu berechnen!
das geht am besten mit "Feynman-Diagrammen", die graphisch sehr anschaulich sind, und sich daher als eine "Sprache" in der Teilchenphysik durchgesetzt haben.

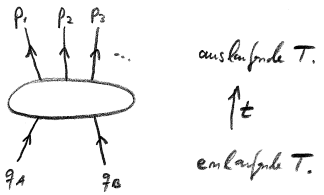
3.3 Feynman-Regeln

$\hat{=}$ Algorithmus zur Berechnung der Amplitude $\mathcal{M}$ in quantenfeldtheoretischen Prozessen

mathematischen Ausdrücken werden graphische Bausteine zugeordnet

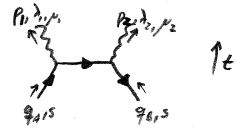
① externe Linien

werden durch ihren Viererimpuls bezeichnet
Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen: zusätzlich Helizität s
Spin 1-Teilchen: zusätzlich Polarisation λ



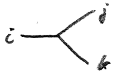
$\to p$ - - -	Spin-0-T., Vierimpuls p	$\Rightarrow$	$\delta\mathcal{M} = 1$
$\to p, \lambda$ ~~~	Spin-1-T. (Photon)	$\Rightarrow$	$\delta\mathcal{M} = \varepsilon^{\mu}_{(\lambda)}(\vec{p})$
$\to p, s$ ———	Spin-$\frac{1}{2}$-T. (Elektron)	$\Rightarrow$	$\delta\mathcal{M} = u(\vec{p},s)$ einlaufend, $\delta\mathcal{M} = \bar{u}(\vec{p},s)$ auslaufend
$\to p, s$ ←———	Spin-$\frac{1}{2}$-Antit. (Positron)	$\Rightarrow$	$\delta\mathcal{M} = \bar{v}(\vec{p},s)$, $\delta\mathcal{M} = v(\vec{p},s)$

Bsp: $e^-(q_A,s) + e^+(q_B,s) \to \gamma(p_1,\lambda_1,\mu_1) + \gamma(p_2,\lambda_2,\mu_2)$:



② Vertizes: sind durch $g\hat{V}$ in $\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$ bestimmt.
genauer: im Zeitentwicklungs-Operator kommt $-i\int dt'\, g\hat{V}_I(t')$ vor.
im Lagrange-Formalismus ist das $+i\int dt' \int d^3\vec{x}\, \hat{\mathcal{L}}_I$
mit Lagrange-Dichte $\hat{\mathcal{L}}_I$ (= Polynom in Feldoperatoren)
allgemein: $\hat{\mathcal{L}}_I = g_{ijk}\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j\hat{\phi}_k + g_{ijkl}\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j\hat{\phi}_k\hat{\phi}_l + \dots$

wir schreiben (malen)



3-er Vertex $\Rightarrow$ $\delta\mathcal{M} = i\, g_{ijk}$

4-er Vertex $\Rightarrow$ $\delta\mathcal{M} = i\, g_{ijkl}$

usw.

③ interne Linien: falls ein Feynman-Diagramm (s.o.) innere Linien hat, entspricht jede dieser Linien einem "Propagator".
Dieser hängt von Impuls / Masse / Art des Teilchens ab, hat aber keine Spin- bzw. Polarisations-Zustände: es ist über alle Möglichkeiten summiert.

$\to p$ - - - $\Leftrightarrow$ $\delta\mathcal{M} = \frac{i}{p^2 - m^2}$

$\mu \to p \to \nu$ ~~~ $\Leftrightarrow$ $\delta\mathcal{M} = \frac{i}{p^2}(-g_{\mu\nu})$

$\to p$ ——— $\Leftrightarrow$ $\delta\mathcal{M} = \frac{i}{p^2 - m^2}(\not{p} + m)$ $\hat{=}$ Vollständigkeitsrelation vgl. Skript S. 21

$p \leftarrow$ ———

((Herleitung: die genauen Ausdrücke für Propagatoren folgen aus $\hat{H}_0$))

④ E-p-Erhaltung: an jedem Vertex muß der Vierimpuls erhalten sein

⑤ interne Impulse: werden per $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ überintegriert

⑥ Antisymmetrisierung: (-1) für jede geschlossene Fermion-Schleife.
(-1) zwischen Diagrammen, die sich nur durch Austausch von zwei externen Fermionen unterscheiden.

⑦ Gesamtphase: alles mit $(+i)$ multiplizieren ((für $|\mathcal{M}|^2$ egal))

Bsp Wie gegeben durch $\hat{\mathcal{L}}_I = -g\,\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3$

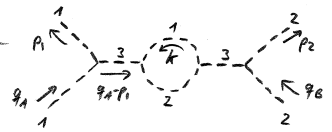
Bsp 1

$$\mathcal{M} = \underset{②}{(-ig)}\,\underset{⑦}{(i)} = g$$

Bsp 2

$$\mathcal{M} = \underset{②}{(-ig)^2}\underset{③}{\left(\frac{i}{(q_A-p_1)^2-m_3^2}\right)}\underset{⑦}{(i)} = \frac{g^2}{(q_A-p_1)^2-m_3^2}$$

Bsp 3



$$\mathcal{M} = \underset{②}{(-ig)^4}\underset{③}{\left(\frac{i}{(q_A-p_1)^2-m_3^2}\right)^2}\underset{⑤}{\left(\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\right)}\underset{③}{\left(\frac{i}{k^2-m_1^2}\right)}\underset{③}{\left(\frac{i}{(q_A-p_1+k)^2-m_2^2}\right)}\underset{⑦}{(i)}$$

$$= \frac{ig^4}{[(q_A-p_1)^2-m_3^2]^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(k^2-m_1^2)[(q_A-p_1+k)^2-m_2^2]}$$

4. Quantenelektrodynamik (QED)

Entwicklung: 1946–51 Feynman, Schwinger, Tomonaga; (Nobel 1965)

QED ist die am genauesten verifizierte Theorie der Physik!

magnetisches Moment des e^-

((im Einheiten des "Bohrschen Magnetons" $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$))

$$\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1.00115965218073\,(28)$$ ⟸ experimentell gemessen [Harvard, 2008 s. arXiv: 0801.1134]

Unsicherheit der letzten beiden Ziffern

$$= 1.00115965218\,3\,(7)$$ ⟸ theoretisch berechnet [s. arXiv: 0712.2607]

Relevanz: QED beschreibt (u.a.) Wirken von e^-, γ

→ alle Phänomene z.B. der Chemie folgen aus QED!

Formulierung der QED: $\boxed{\hat{\mathcal{L}}_I \equiv e\,\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\hat{A}_\mu\hat{\psi}}$

Elementarladung

besser zu machen: Feinstrukturkonstante $\alpha_{EM} \overset{\text{nat.}}{\equiv} \frac{e^2}{4\pi} \overset{SI}{=} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137.035999\ldots}$

⇒ Vertex: ⇒ $\mathcal{M} = ie\gamma^\mu$

können nun Feynman-Diagramme der wichtigsten Prozesse malen:

Prozess erster Ordnung

magnetisches Moment des e^-

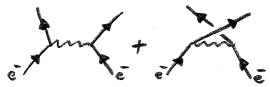
$\mu_e/\mu_B = 1$

elastische Prozesse zweiter Ordnung

Elektron-Myon-Streuung: $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$

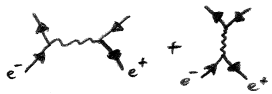
"Mott-Streuung": $m_\mu \to \infty$

"Rutherford-Streuung": $v_e \to 0$ (($e^- + p^+ \to e^- + p^+$))



Elektron-Elektron-Streuung: $e^- + e^- \to e^- + e^-$

"Møller-Streuung"



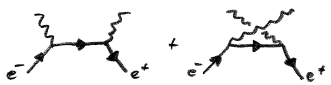
Elektron-Positron-Streuung: $e^- + e^+ \to e^- + e^+$

"Bhabha-Streuung"

Elektron-Photon-Streuung: $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$

"Compton-Streuung"

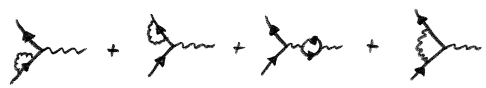
inelastische Prozesse zweiter Ordnung



Paarvernichtung: $e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$

Paarerzeugung: $\gamma + \gamma \to e^- + e^+$

wichtigster Prozeß dritter Ordnung



"Strahlungskorrekturen" zum magn. Moment des e^-
oder: "anomales" magn. Moment des e^-

((grobe Abschätzung der Größenordnung dieser Korrekturen:

2 neue Vertizes $\rightsquigarrow e^2$. jede "Schleife" gibt $\frac{1}{(4\pi)^2}$

$\rightarrow \frac{e^2}{16\pi^2} = \frac{\alpha_{EM}}{4\pi} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 137} \approx \frac{1}{1720}$?

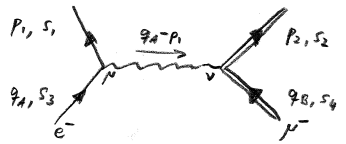
die genaue Antwort ist $\frac{\alpha_{EM}}{2\pi} \approx \frac{1}{861} \approx 0.0011617..$

vgl. mit (s.o.) $\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1.0011596..$ (exp.) !))

etc... Teilchenphysik als "Puzzlespiel" mit Feynmangraphen !

Nun können wir aber mit Hilfe der Feynman-Regeln (s. § 3.3) die Amplituden berechnen.

Bsp: Amplitude für e-μ-Streuung



zur Anwendung der Feynman-Regeln: jede Fermionlinie "rückwärts" verfolgen

$$\mathcal{M} = \underset{\substack{① \\ \text{ausl. } e^-}}{\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)} \; \underset{②}{ie\gamma^\mu} \; \underset{\substack{① \\ \text{eml. } e^-}}{u(\vec{q}_A,s_3)} \; \underset{①}{\bar{u}(\vec{p}_2,s_2)} \; \underset{②}{ie\gamma^\nu} \; \underset{①}{u(\vec{q}_B,s_4)} \; \underset{\substack{③ \\ \text{Photon-Propagator}}}{\frac{-ig_{\mu\nu}}{(q_A-p_1)^2}} \; \underset{\substack{⑦ \\ \text{Gesamtphase}}}{(+i)}$$

$$= -\frac{e^2}{(q_A-p_1)^2} \; \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma^\mu u(\vec{q}_A,s_3) \; \bar{u}(\vec{p}_2,s_2)\gamma_\mu u(\vec{q}_B,s_4)$$

Bem:
- für gegebene $\vec{p}, \vec{q}, s_i$ ist das eine Zahl !
- falls es mehrere Diagramme gleicher Ordnung gibt: Addition / Subtraktion (Regel ⑥), z.B.
  $|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_1 \pm \mathcal{M}_2|^2 = |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 \pm (\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^*)$
  letzter Term: repräsentiert gen. Interferenz !

Behandlung der Spinabhängigkeit:

Annahme (≙ den meisten Experimenten): Spinorientierungen des Anfangszustandes seien zufällig verteilt, und im Endzustand wird die Spinorientierung der einzelnen Teilchen nicht gemessen.

→ Mittelung über alle Spinkonfigurationen im Anfangszustand
Summe ″ Endzustand

$$\rightarrow |\mathcal{M}|^2 \rightarrow \langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{1}{4}\sum_{s_1=\pm1}\sum_{s_2=\pm1}\sum_{s_3=\pm1}\sum_{s_4=\pm1} |\mathcal{M}|^2$$

in unserem Bsp ist

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(q_A-p_1)^4}\sum_{\mu\nu} \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma^\mu u(\vec{q}_A,s_3)\underbrace{\left[\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma^\nu u(\vec{q}_A,s_3)\right]^*}\bar{u}(\vec{p}_2,s_2)\gamma_\mu u(\vec{q}_B,s_4)\left[\bar{u}(\vec{p}_2,s_2)\gamma_\nu u(\vec{q}_B,s_4)\right]^*$$

= ein Skalar (keine Matrix; oder: 1×1-Matrix)

$$= \left[\bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma^\nu u(\vec{q}_A,s_3)\right]^\dagger = \left[u^\dagger(\vec{p}_1,s_1)\gamma^0\gamma^\nu u(\vec{q}_A,s_3)\right]^\dagger$$

$$= u^\dagger(\vec{q}_A,s_3)\underbrace{\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{0\dagger}}u(\vec{p}_1,s_1) = \bar{u}(\vec{q}_A,s_3)\gamma^\nu u(\vec{p}_1,s_1)$$

$$= \gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=\mathbb{1}}\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu \quad \text{(s. Übung, Aufgabe 106)}$$

also mit Mittelung und Summe:

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{4(q_A-p_1)^4}\sum_{s_i=\pm1} \bar{u}(\vec{p}_1,s_1)\gamma^\mu u(\vec{q}_A,s_3)\,\bar{u}(\vec{q}_A,s_3)\gamma^\nu u(\vec{p}_1,s_1) \;*$$
$$* \;\bar{u}(\vec{p}_2,s_2)\gamma_\mu u(\vec{q}_B,s_4)\,\bar{u}(\vec{q}_B,s_4)\gamma_\nu u(\vec{p}_2,s_2)$$

Spinsumme? Vollständigkeitsrelation (s. S.21)! $\sum_s u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s) = \not{p}+m\mathbb{1}$

außerdem gilt (für irgendeine 4×4-Matrix M)

$$\sum_s \bar{u}(\vec{p},s)\,M\,u(\vec{p},s) = \sum_s \bar{u}_\alpha(\vec{p},s)\,M_{\alpha\beta}\,u_\beta(\vec{p},s) = \sum_s M_{\alpha\beta}\,u_\beta(\vec{p},s)\bar{u}_\alpha(\vec{p},s)$$
$$= \sum_s \mathrm{Sp}\left(M\,u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s)\right) = \mathrm{Sp}\left(M(\not{p}+m)\right)$$

also ist insgesamt

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{4(q_A-p_1)^4}\,\mathrm{Sp}\left[\gamma^\mu(\not{q}_A+m_e)\gamma^\nu(\not{p}_1+m_e)\right]\mathrm{Sp}\left[\gamma_\mu(\not{q}_B+m_\mu)\gamma_\nu(\not{p}_2+m_\mu)\right]$$

Bem:
- faktorisiert in e^-- und μ^--Anteil
- keine Spinoren mehr !
- brauchen jetzt Spuren über γ-Matrizen

Spuren über γ-Matrizen:

es gilt (s. Übungen, Aufgabe 25)

$$Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

$$Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = 0$$

$$Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\sigma) = 4\left(g^{\mu\nu}g^{5\sigma} - g^{\mu5}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu5}\right)$$

((und, natürlich, $Sp(A+B) = Sp(A) + Sp(B)$; $Sp(cA) = c\,Sp(A)$;
$Sp(AB) = Sp(BA)$; für Matrizen A, B und Zahl c))

so daß für unser Bsp gilt

$$Sp\left[\gamma^\mu(\not{q}_1+m_e)\gamma^\nu(\not{p}_1+m_e)\right] = (q_1)_\alpha(p_1)_\beta\, Sp\left[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta\right] + \dots \cancel{Sp[(\gamma)^3]}^{\,0} + m_e^2 Sp[\gamma^\mu\gamma^\nu]$$

$$= 4(q_1)_\alpha(p_1)_\beta\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\right) + 4m_e^2 g^{\mu\nu}$$

$$= 4\left(q_1^\mu p_1^\nu + q_1^\nu p_1^\mu + g^{\mu\nu}(m_e^2 - q_1 p_1)\right)$$

also insgesamt

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{4e^4}{(q_1-p_1)^4}\Big\{\left[q_1\cdot q_2\, p_1\cdot p_2 + q_1\cdot p_2\, q_2\cdot p_1 + q_1\cdot p_1(m_\mu^2 - q_2\cdot p_2)\right]\cdot 2$$
$$+ (m_e^2 - q_1\cdot p_1)\Big(q_2\cdot p_2\cdot 2 + \underbrace{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}}_{= g^\mu_\mu = Sp\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = 4}(m_\mu^2 - q_2\cdot p_2)\Big)\Big\}$$

$$= \frac{8e^4}{(q_1-p_1)^4}\left\{q_1\cdot q_2\, p_1\cdot p_2 + q_1\cdot p_2\, q_2\cdot p_1 - m_\mu^2\, q_1\cdot p_1 - m_e^2\, q_2\cdot p_2 + 2m_e^2 m_\mu^2\right\}$$

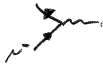
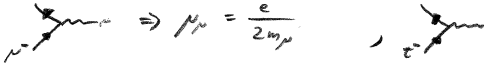
Bem:
- haben L-invariantes Resultat für $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ gefunden
- können dieses jetzt z.B. auf S. 32 einsetzen
  $\rightarrow \frac{d\sigma_{2\to2}}{d\Omega} = \dots$
  (oder in den L-invarianten Ausdruck von Aufgabe 22!)
- für $m_\mu \gg m_e$ ((vgl. $m_\mu \approx 106$ MeV, $m_e \approx 0.511$ MeV))
  folgt dann der Streuungsquerschnitt für "Mott-Streuung"
  und daraus für $v_e \ll 1$ die "Rutherford-Formel"

Einschub: mehr zum magnetischen Moment der Leptonen

(s. S. 36/37) ; magn. Moment der anderen Leptonen verschieden von μ_e?

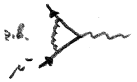
Masse $(e^-, \mu^-, \tau^-) \approx (0.511,\ 105.7,\ 1780)$ MeV

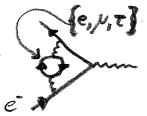
1. Ordnung: $\Rightarrow \mu_e = \frac{e}{2m_e} \equiv \mu_B$, $\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1$ (in 1. Ordn.)

also  $\Rightarrow \mu_\mu = \frac{e}{2m_\mu}$,  $\Rightarrow \mu_\tau = \frac{e}{2m_\tau}$

3. Ordnung: wichtigstes Diagramm $\Rightarrow$ Korrektur $\frac{\delta\mu_e^{(1)}}{\mu_B} = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha_{EM}}{2\pi}$

((diese Korrektur kommt vom Schleifenintegral (vgl. Regel ⑤), in dessen Integrand die Propagatoren (vgl. Regel ③) stehen. Propagatoren enthalten Massen (hier: m_e), da als Korrektur (zu $\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1$) aber dim.-lose Zahl herauskommen muss, kann das Ergebnis nicht von m_e abhängen $\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha_{EM}}{\pi}$))

also z.B.  $\Rightarrow$ Korrektur $\frac{\delta\mu_\mu^{(1)}}{e/2m_\mu} = \frac{\alpha_{EM}}{2\pi} = \frac{\delta\mu_\tau^{(1)}}{e/2m_\tau}$!

5. Ordnung: wichtigstes Diagramm:  $\Rightarrow \frac{\delta\mu_e^{(2)}}{\mu_B} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2 \sum_{i\in\{e,\mu,\tau\}} a\left(\frac{m_i}{m_e}\right)$

((wobei die Korrektur vom Zwei-Schleifenintegral kommt:

$\sim a\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$ muß wieder Zahl sein, kann also nur vom Verhältnis der Massen abhängen

dieses Integral ist berechnet [Li/Mendel/Samuel, PRD 47 (1993) 1723],

wobei z.B. $a(1) = \frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3} \approx 0.016$

$a(\varepsilon) = -\frac{1}{3}\ln(\varepsilon) - \frac{25}{36} + O(\varepsilon)$; $a\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right) \approx a\left(\frac{1}{207}\right) \approx 1.08$

$a\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon^2}{45} + O(\varepsilon^4)$; $a\left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right) \approx a(17) \approx 7.7\cdot10^{-5}$))

(Fazit: Schleife mit dem leichtesten Teilchen, hier: e^-, gibt den größten Beitrag)

also

$$\frac{\delta\mu_e^{(2)}}{e/2m_e} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2\left[a(1) + a(207) + a(3483)\right] \approx 0.016 + 5.2\cdot10^{-7} + 1.8\cdot10^{-9}$$

$$\frac{\delta\mu_\mu^{(2)}}{e/2m_\mu} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2\left[a\left(\frac{1}{207}\right) + a(1) + a(17)\right] \approx 1.08 + 0.016 + 7.7\cdot10^{-5}$$

$$\frac{\delta\mu_\tau^{(2)}}{e/2m_\tau} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2\left[a\left(\frac{1}{3483}\right) + a\left(\frac{1}{17}\right) + a(1)\right] \approx 2.02 + 0.25 + 0.016$$

Anwendung: Mott- und Rutherford-Formel

$m_\mu \approx 106\ \mathrm{MeV} \gg m_e \approx 0.511\ \mathrm{MeV}$

$\rightarrow$ betrachte den Grenzwert $m_\mu \to \infty$

((CMS $\approx$ Laborsystem; das Myon ruht, Rückstoß vernachlässigbar))

$p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$, $p_2 = (E_2, -\vec{p}_1) = m_\mu\left(\sqrt{1+\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{m_\mu^2}}, -\frac{\vec{p}_1}{m_\mu}\right) \approx (m_\mu, \vec{0})$

$q_A = (E_A, \vec{q}_A)$, $q_B = (E_B, -\vec{q}_A) = m_\mu\left(\sqrt{1+\frac{\vec{q}_A^{\,2}}{m_\mu^2}}, -\frac{\vec{q}_A}{m_\mu}\right) \approx (m_\mu, \vec{0})$

E-Erhaltung: $E_A + m_\mu + O\left(\frac{1}{m_\mu}\right) \overset{!}{=} E_1 + m_\mu + O\left(\frac{1}{m_\mu}\right) \Rightarrow \vec{q}_A^{\,2} = \vec{p}_1^{\,2}$

nach Ausführen der Phasenraumintegrationen hatten wir (s. S. 32)

erhalten: $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2}\underbrace{\frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{q}_A|}}_{=1 \text{ wegen E-Erhaltung}}\frac{|\mathcal{M}|^2}{(E_A+E_B)^2}$$

nun das Ergebnis für $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ von S. 39 einsetzen

hier: $(q_A - p_1)^2 = \cancel{(E_A - E_1)^2}^{\,0} - (\vec{q}_A - \vec{p}_1)^2 = -2\vec{q}_A^{\,2}(1-\cos\theta) = -4\vec{q}_A^{\,2}\sin^2\frac{\theta}{2}$

$q_A \cdot q_B = p_1 \cdot p_2 = q_A \cdot p_2 = q_B \cdot p_1 = m_\mu E_A$

$q_A \cdot p_1 = E_A E_1 - \vec{q}_A \vec{p}_1 = m_e^2 + \vec{q}_A^{\,2} - \vec{q}_A^{\,2}\cos\theta = m_e^2 + 2\vec{q}_A^{\,2}\sin^2\frac{\theta}{2}$

$q_B \cdot p_2 = m_\mu^2$

$E_A + E_B = m_\mu\left(\frac{\sqrt{m_e^2+\vec{q}_A^{\,2}}}{m_\mu} + 1\right) \approx m_\mu + O\left(\frac{1}{m_\mu}\right)$

$$= \frac{1}{(8\pi)^2}\frac{1}{m_\mu^2}\frac{8e^4}{(-4\vec{q}_A^{\,2}\sin^2\frac{\theta}{2})^2}\left(2m_e^2 m_\mu^2 + 2m_\mu^2\vec{q}_A^{\,2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

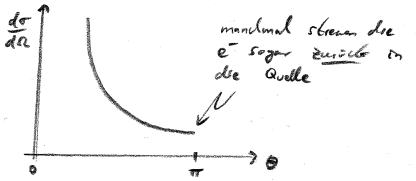
$$= \left(\frac{\alpha_{EM}}{2\vec{q}_A^{\,2}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2\left(m_e^2 + \vec{q}_A^{\,2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{"Mott-Formel"}$$

Bem.: · ist gute Näherung für e-p-Streuung, da $m_p \approx 938\ \mathrm{MeV} \gg m_e$

falls das Elektron nichtrelativistisch ist (also $|\vec{q}_A| = m_e v \ll m_e$),

ergibt sich die "Rutherford-Formel":

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{2mv^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2$$



5. Starke Wechselwirkungen, Quantenchromodynamik (QCD)

Im letzten Kapitel: QED, Theorie der elektromagnetischen Wechselw.
konvergiert sehr gut ($\alpha_{EM} \approx \frac{1}{137}$)
experimentell extrem genau verifiziert (z.B. μ_e)
$\rightarrow$ "langweilig"

jetzt: komplizierte Wechselw.
viele verschiedene Näherungsmethoden, neue Begriffe
$\rightarrow$ "interessant"

Behandlung hier jedoch nur qualitativ.

QED $\hat{=}$ Wechselw. geladener T.; Vermittlung: Photonen; Stärke: $g_e = \sqrt{4\pi\alpha_{EM}}$ (Einheitsladung: e (Positron))

QCD $\hat{=}$ Wechselw. farbiger T.; Vermittlung: Gluonen; Stärke: $g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s}$ (Farb-Einheitsladung)

Quarkmodell

historisch: 1959–64; Gell-Mann, Ne'eman, Zweig
siehe [D.W. Greenberg, Am. J. Phys. 50 (1982) 1074]

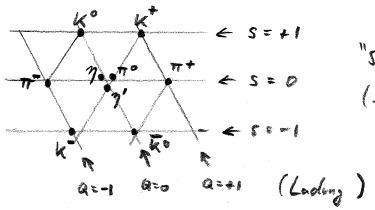
leichte Quarks: u ($m \approx 2\ \mathrm{MeV}$), d ($\approx 5\ \mathrm{MeV}$), s ($\approx 100\ \mathrm{MeV}$)

schwere Quarks: c ($m \approx 1.25\ \mathrm{GeV}$), b ($\approx 4.2\ \mathrm{GeV}$), t ($\approx 174\ \mathrm{GeV}$)

durch Beobachtung der leichtesten Hadronen (Mesonen mit Spin $J = 0, 1, \ldots$ bzw. Baryonen mit Spin $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$) kann man etwas über die leichten Quarks erfahren!

Klassifizierung durch Gell-Mann ("der Mendelejew der Teilchenphysik")

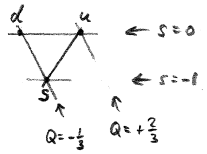
$J = 0$ - Mesonen:
"der achtfache Weg"
((η' schwerer als andere 8))



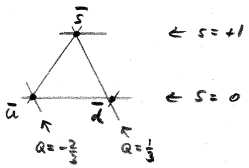
"Strangeness" (Seltsamkeit)

<u>Systematik:</u> Meson = Quark + Antiquark

$q\bar{q}$:



$\bar{q}q$:



alle Kombinationen ⇒ $3 \cdot 3 = 9$ Mesonen !

[Gruppentheorie: $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$, $1 \equiv \eta'$]

funktioniert nicht nur für Spin-0 (↑↓, s.o.)

sondern auch für Spin-1 Mesonen (↑↑), Spin-$\frac{1}{2}$ Baryonen (↑↑↓),

Spin-$\frac{3}{2}$ Baryonen (↑↑↑)

<u>Bestätigung</u> des Quarkmodells: experimentell!

es "fehlte" eine Ecke im Baryondekuplett (das Ω^-, sss).

1964 experimentell entdeckt.

((vgl. Mendelejew: es "fehlten" Gallium, Scandium, Germanium im Periodensystem → Vorhersage !))

<u>Fragen</u>
- warum sieht man keine <u>freien</u> Quarks?
- steht z.B. sss nicht im Widerspruch zum Pauli-Prinzip?

→ neue Eigenschaft: <u>Farbe</u>.

Quarks haben drei Farben / Antifarben ((nehmen wir r, g, b / $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$)) (rot/grün/blau)

als freie Teilchen treten nur <u>farblose</u> Kombinationen auf

dies ist Hypothese! braucht wieder experimentelle Bestätigung.

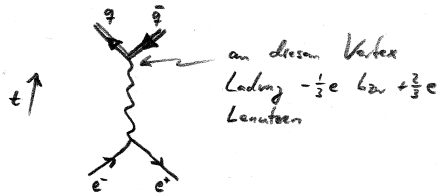
→ studiere innere Struktur der Hadronen.

<u>Hadronenerzeugung in e^+e^--Kollisionen</u>

Quarks sind (el.) geladen (s.o.)

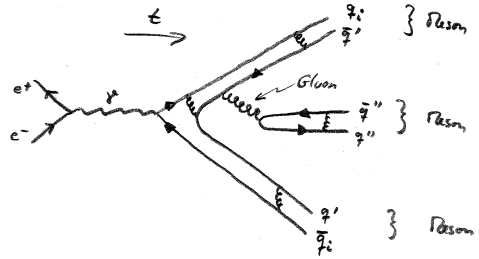
→ spüren em. Ww, ≙ QED

Idee: $e^+e^- \to \gamma \to q\bar{q}$



genauer:

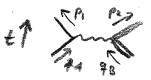
[z.B. SLAC, LEP]

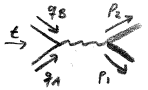


können die <u>erste</u> Stufe dieses Prozesses mit den QED-Regeln aus Kapitel 4 berechnen, analog zu "$e^+ + e^- \to \gamma \to \mu^+ + \mu^-$":

wähle CMS, $E \equiv$ Energie des einl. e^-

$Q_i \equiv$ Ladung des q_i (in Einheiten von e), $m_i \equiv$ Masse des q_i

((S.37-39: 

, jetzt: 

, also $p_1 \leftrightarrow -q_B$))

$$\Rightarrow \langle |M|^2 \rangle \overset{(S.39)}{=} \sum_{\substack{\text{Farben}\\ \text{Flavors } i}} \frac{8 Q_i^2 e^4}{(q_A + q_B)^4} \left\{ q_A p_1 \, q_B p_2 + q_A p_2 \, p_1 q_B + m_i^2 q_A q_B + m_e^2 p_1 p_2 + 2 m_e^2 m_i^2 \right\}$$

CMS: $\vec{q}_B = -\vec{q}_A$, $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$

E-Erhaltung: $2E = E_1 + E_2 = 2E_1$ ⇒ $E_A = E_B = E_1 = E_2 = E$

$\vec{q}_A^{\,2} + m_e^2 = \vec{p}_1^{\,2} + m_i^2$

$$= \sum \frac{8 Q_i^2 e^4}{(2E)^4} \left\{ (E^2 - \vec{q}_A \vec{p}_1)^2 + (E^2 + \vec{q}_A \vec{p}_1)^2 + m_i^2 (E^2 + \vec{q}_A^{\,2}) + m_e^2 (E^2 + \vec{p}_1^{\,2}) + 2 m_e^2 m_i^2 \right\}$$

$$= \sum \frac{Q_i^2 e^4}{E^4} \left\{ E^4 + m_e^2 E^2 + m_i^2 E^2 + (E^2 - m_e^2)(E^2 - m_i^2) \cos^2\theta \right\}$$

$\sphericalangle\, \vec{q}_A, \vec{p}_1$

also folgt insgesamt für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta}_{= \int_{-1}^{1} du \,,\ u = \cos\theta} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\sqrt{E^2 - m_i^2}}{\sqrt{E^2 - m_e^2}} \frac{\langle |M|^2 \rangle}{(2E)^2} \Theta(E - m_i)$$

$$= \sum_{\substack{\text{Farben}\\ \text{Flavors } i}} \frac{\pi}{3} \frac{Q_i^2 \alpha_{em}^2}{E^2} \frac{\sqrt{1 - m_i^2/E^2}}{\sqrt{1 - m_e^2/E^2}} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_e^2}{E^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_i^2}{E^2}\right) \Theta(E - m_i)$$

$$\approx N_c \cdot \sum_i Q_i^2 \cdot \frac{\pi}{3} \left(\frac{\alpha_{em}}{E}\right)^2 \qquad \text{für } E \gg m_i \gg m_e$$

$N_c \equiv \sum_{\text{Farben}}$

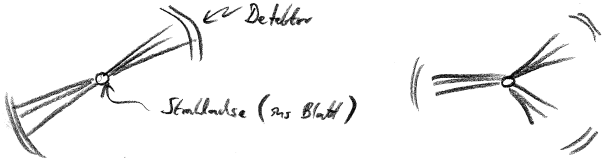
Bem: • Schwellenenergie (θ-Fkt): Prozeß für $E < m_{quark}$ verboten; brauchen genug Energie, um $q\bar{q}$-Paar zu erzeugen!

• für große Stoßenergien ist die Näherung der letzten Zeile sehr gut: $\sqrt{1-m_i^2/E^2}\left(1+\frac{m_i^2}{2E^2}\right) \approx 1 - \frac{3}{8}\frac{m_i^4}{E^4} + \dots$!
(eher zufällig)

((Korrektur in m_e ist $O(m_e^2/E^2)$, aber $m_e^2 \ll m_{quark}^2$))

• es werden tatsächlich Prozesse beobachtet, die dem oben skizzierten Modell entsprechen:

"2-Jet-Ereignis" "3-Jet-Ereignis"



$e^+e^- \to q\bar{q} \to$ Hadronisierung $\qquad e^+e^- \to q\bar{q}G \to$ Hadronisierung

expt. Beweis für Existenz der Gluonen!

• die Anzahl der Farben ist als $N_c = 3$ gemessen:

$$R(E) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \approx N_c \cdot \sum_i Q_i^2\, \theta(E-m_i)$$

→ erwarten bei niedrigen Energien (u,d,s-Quarks Energie bei)
$R \approx N_c\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] = \frac{2}{3}N_c$

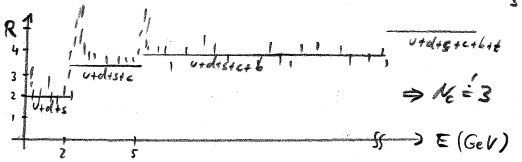
→ zwischen c- und b-Schwelle $R \approx \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]N_c = \frac{10}{9}N_c$

→ über b-Schwelle $R \approx \left[\frac{10}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]N_c = \frac{11}{9}N_c$

→ über t-Schwelle $R \approx \left[\frac{11}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]N_c = \frac{5}{3}N_c$

siehe z.B. [hep-ph/0312114] oder auch [pdg.lbl.gov/2007/hadronic-xsections/]

Exp.:



$\Rightarrow N_c \overset{!}{=} 3$

⇒ $\boxed{\text{die Quark- und Farb-Hypothesen scheinen richtig zu sein!}}$

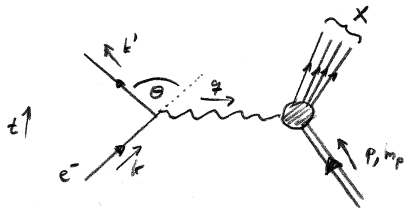
Tiefinelastische ep^+-Streuung

wie z.B. bei HERA / DESY, 1992–2007

→ präzise Untersuchung der inneren Struktur des Protons, und damit der Eigenschaften von Quarks + Gluonen.

Grundidee: Rutherford-Streuung ⇒ Zahl der unter großen Winkeln abgelenkten Teilchen deutet auf Atomstruktur hin (Kern).

Tiefinelastische Streuung ⇒ Zahl der unter großen Winkeln abgelenkten Teilchen deutet auf Protonstruktur hin (Qu. + Gl.)



e^- mit hoher Energie
→ inelastischer Prozess
$e^- + p^+ \to e^- + X$
$k = (E, \vec{k})$, $k' = (E', \vec{k}')$

"inklusiver" Prozess: nur ausleuchtendes e^- wird registriert.
$X \hat{=}$ "hadronische Splitter" des Protons

wenn p, k bekannt ist, und alles über X unbekannt ist, gibt es zwei unabhängige Variablen: E', θ

$\Rightarrow k' = \left(E', \sqrt{(E')^2 - m_e^2}\,\vec{e}_{k'}\right)$

((vgl. mit elastischer Streuung $e+p \to e+p$:
wegen E-p-Erhaltung ist dann $p'^2 = (k+p-k')^2 \overset{!}{=} m_p^2$
→ nur eine unabh. Variable, z.B. θ))

üblicherweise wählt man $Q_e^2 = -q^2$, $x \equiv \frac{Q_e^2}{2q\cdot p}$ ("Bjorken x")

Zusammenhang $(Q_e^2, x) \leftrightarrow (E', \theta)$: s. Übung, Aufgabe 28

für $E \gg m_e$ parametrisiert man den Streuungsquerschnitt als

$$\frac{d\sigma}{dE'\,d\Omega} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{2E\sin^2(\frac{\theta}{2})}\right)^2 \left\{ 2\,W_1(Q_E^2,x)\sin^2(\tfrac{\theta}{2}) + W_2(Q_E^2,x)\cos^2(\tfrac{\theta}{2}) \right\}$$

Strukturfunktionen des Protons
enthalten Eigenschaften des Protons
experimentell gut bekannt

((vgl. Mott-Formel, S. 41; elastische Streuung,
falls $E \gg m_e \Rightarrow |\vec{q}_{\parallel}| = E \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{2E\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 \left\{\cos^2\frac{\theta}{2}\right\}$

hier also E' nicht unabhängig von E, θ))

aber wie berechnet man die Strukturfktn? → Partonmodell

Partonmodell [Bjorken, Callan, Gross 1967-69]

Bjorken hat ein Skalenverhalten vorhergesagt: bei großen Impulsübertragen $Q_E^2 \gtrsim (1\,\mathrm{GeV})^2$ sollte alles nur von einer Variablen abhängen:

$$m_p W_1(Q_E^2,x) \to F_1(x)$$

$$\frac{Q_E^2}{2m_p x} W_2(Q_E^2,x) \to F_2(x)$$

Callan und Gross haben vorhergesagt, daß für nicht zu kleines x gilt

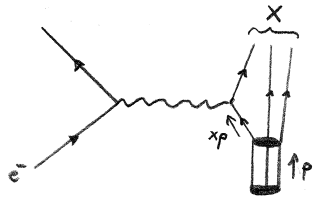
$$2x F_1(x) = F_2(x)$$

⇒ statt 2 Fkt von 2 Variablen nur 1 Fkt von 1 Variable!
also muß das System eine spezielle Struktur haben, die es so dramatisch vom allgemeinen Fall abweichen lässt!

dieses Verhalten wurde kurz darauf am SLAC experimentell bestätigt.

was ist diese spezielle Struktur des Protons?
→ "Partonmodell". ((es gibt eigentlich um Quarks + Gluonen, aber damals hatten sich diese Begriffe noch nicht durchgesetzt, wegen der auf S. 43 angesprochenen Probleme des Quarkmodells))

Grundidee: mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (bestimmt durch eine "Verteilungsfunktion") löst sich ein Parton (Quark, Gluon) vom Proton, und streut dann elastisch am virtuellen Photon.



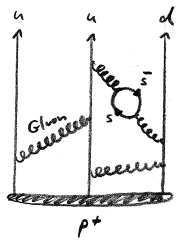
→ es kann bewiesen werden, daß aus dieser Grundidee (plus unseren Resultaten für ep-Streuung) sowohl das Bjorken-Skalenverhalten als auch die Callan-Gross-Beziehung folgt, mit

$$F_2(x) = x \sum_i Q_i^2 f_i(x) \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

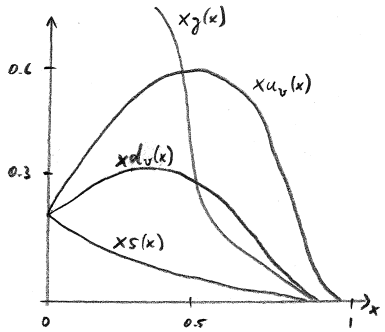
[s. Übung, Aufgabe 28(b)]

Partonverteilungsfunktionen / Wahrscheinlichkeitsdichten

aus welchen Partonen besteht das Proton?



- "Valenz"-Quarks, s. Quarkmodell.
  Verteilungsfktn: $u_v(x)$, $d_v(x)$
- "See"-Quarks, virtuelle $q\bar{q}$-Paare
  → $s(x)$, $\bar{s}(x)$
- Gluonen: $g(x)$
  diese haben keine elektrische Ladung, koppeln also nicht an das Photon, tragen also nicht zu $F_2(x)$ bei!
  tragen jedoch Teil des Proton-Gesamtimpulses $p = \int_0^1 dx \sum_i f_i(x)\, x p$
  ((mehr solcher Summenregeln: Aufg. 29))



⇐ experimentell gemessene Partonverteilungsfunktionen

"weiche" Partonen wenig Impuls

"harte" Partonen viel Impuls

Quantenchromodynamik (QCD)

→ Stoff einer ganzen Vorlesung!

hier: nur Struktur / Selbstgewichte / Highlights

historisch: Nambu; Gell-Mann; Fritzsch;
Gross, Wilczek, Politzer 1973 → Nobel 2004

QCD ≡ Theorie der starken Wechselwirkungen

≙ Modelle dieses Kapitels (Quarks, Farbe; Partonen)

+ mathematische Struktur (nichtabelsche Eichtheorie [Yang, Mills 1954])

analog zur QED: spezifiziere QCD durch Feynmanregeln

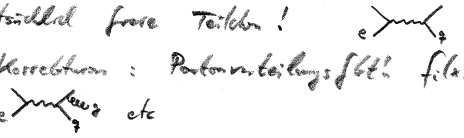
Vertices:

Bem.:
- Gluon koppelt an Farbladung
  Quarkfarbe ändert sich typischerweise am ggg-Vertex
  z.B.

  , Gluon trägt Differenz
- Gluon wechselwirkt daher mit sich selbst
  (im Gegensatz zum el. neutralen Photon)
- QCD hat sehr wenige Parameter:
  "Eichinvarianz" erfordert $\succ \sim g_s$, $\times \sim g_s^2$
- analog zu α_{em}: def. $\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}$
  hier ist $\alpha_s \gtrsim \frac{1}{10}$ "groß"
- daher funktioniert Störungstheorie i.A. nicht
  so perfekt wie in der QED.
  → Theorie ist "interessanter", vielseitiger, es
  gibt einige unerwartete Konsequenzen (s.u.)
- Berechnungen selten präziser als ~ 1%

- eine wichtige Lösungsmethode ist (numerische) Gitter-QCD
- Störungstheorie möglich z.B. für Systeme schwerer Quarks

QCD-Highlights:

- Asymptotische Freiheit:
  Kopplungsstärke g_s ist keine Konstante, sondern hängt von Impulsskala ab, $g_s(Q_E)$ [s. Übung, Aufgaben 30, 31]
  in tiefinel. Streuung z.B. und $g_s \searrow$ wenn $Q_E^2 \nearrow$,
  und sogar $\lim_{Q_E^2 \to 0} g_s = 0$.
  ⇒ erklärt Bjorken-Skalenverhalten: für großes Q_E^2 sind die Partonen tatsächlich freie Teilchen! 

  Endliches Q_E^2 → Korrekturen: Partonverteilungsfkt'n $f_i(x) \to f_i(Q_E^2, x)$
  etc
- Quarkeinschluß
  $g_s \nearrow$ für $Q_E^2 \searrow$: W'w'n sind stark ⇒ eng gebundene Zustände (Hadronen)
- "chirale Symmetriebrechung"
  ((Begriffsklärung: später))
  Konsequenz: Massen der leichten Hadronen sind nicht wie vom Quarkmodell suggeriert (z.B. $m_{\pi^+} \approx m_u + m_d$),
  sondern $m_{\pi^+} \approx \sqrt{26\,\text{eV} \cdot (m_u + m_d)}$
- [→ s. auch 3 Sonderblätter]

6. Schwache Wechselwirkungen

QED (em. WW), QCD (starke WW): haben vollständige Theorie.

schwache WW: (noch) keine komplette Theorie

→ hier: Behandlung der bekannten "Bausteine" der richtigen Theorie.

Relevanz: z.B. Beta-Zerfälle von μ, n, $\pi^\pm$

Austauschteilchen: "intermediäre Vektorbosonen" $W^\pm$, $m_W \approx 80.4$ GeV
Z^0, $m_Z \approx 91.2$ GeV

schwache WW führt zu vielen Prozessen/Zerfällen, die laut QED/QCD nicht stattfinden sollten ⇒ verschiedene Theorien haben verschiedene Symmetrien und Erhaltungssätze!

tiefer Zusammenhang: Noether-Theorem

$$\boxed{\text{Symmetrien der Lagrangedichte} \Leftrightarrow \text{Erhaltungssätze}}$$

z.B.: Invarianz unter (räuml. + zeitl.) Translationen ⟷ Energie-Impuls-Erhaltung

Bsp Leptonzahlerhaltung in der QED

$$\hat{\mathcal{L}}_I = e\,\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu \hat{A}_\mu \hat{\psi} \qquad \text{(vgl. Skript, S. 36)}$$

hat die folgende Invarianz (Symmetrie):

$$\hat{\psi} \to \hat{\psi}' = e^{i\alpha}\hat{\psi} \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\hat{\bar{\psi}} \to \hat{\bar{\psi}}' = e^{-i\alpha}\hat{\bar{\psi}}$$
$$\hat{A}_\mu \to \hat{A}'_\mu = \hat{A}_\mu$$
$$\Rightarrow \hat{\mathcal{L}}_I \to \hat{\mathcal{L}}'_I = \hat{\mathcal{L}}_I \quad ! \quad (\forall \alpha)$$

Die Symmetrie funktioniert, weil es am jeweiligen Vertex zwei Fermionen gibt, $\hat{\bar{\psi}}, \hat{\psi}$, bzw.

⇒ Anzahl der Fermionen bleibt erhalten.

zu der QCD gibt es viele solcher Symmetrien. z.B.:

Seltsamkeit ist eine "kontinuierliche innere Symmetrie"

$\mathcal{L}_{QCD}$ ist invariant unter $\hat{s} \to e^{i\alpha}\hat{s}$, $\hat{\bar{s}} \to e^{-i\alpha}\hat{\bar{s}}$.

⇒ deshalb bleibt die Seltsamkeit erhalten.

d.h. Mesonen wie $K^+ = u\bar{s}$, $K^- = s\bar{u}$ können in QCD nicht zerfallen!

((dasselbe gilt auch für "Charmness" etc. aber $c\bar{c}$ kann natürlich zerfallen.))

Isospin

analog zur Seltsamkeit könnte man auch "Upness" und "Downness" definieren.

Diese wären wieder exakte Symmetrien der QCD.

Falls man elektromagnetische Effekte sowie die Massendifferenz der u- und d-Quarks vernachlässigen kann, gilt es eine größere Symmetrie, die sog. Isospin-Symmetrie: $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ ← Matrix

Damit $\hat{\mathcal{L}}_I$ invariant ist, muß R unitär sein: $R^\dagger R = \mathbb{1}$, sowie $\det R = +1$.

Man sagt: "die Symmetriegruppe ist die Flavor-SU(2)"

Konsequenzen:
- Isospin-Transformationen vertauschen mit Hamilton-Op.
  → diese Op's haben gleichzeitige Eigenwertsätze
  → Teilchen (≙ Eigenzustände des $\hat{H}$) können durch I, I_z klassifiziert werden ((vgl. Drehungen: J, J_z))

z.B. $u \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle \equiv \bar{d}$

$d \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle \equiv \bar{u}$

$u\bar{d}$ $\quad \pi^+ \equiv |1\,1\rangle = |\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle$

$u\bar{u} + d\bar{d}$ $\quad \pi^0 \equiv |1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

$d\bar{u}$ $\quad \pi^- \equiv |1\,-1\rangle = |\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle$

((remember: Addition von Drehimpulsen; Clebsch-Gordan-Koeff's:
s. QM; $|j\,m\rangle = \sum_{j_1 j_2} C^{j\,j_1 j_2}_{m\,m_1 m_2} |j_1 m_1\rangle|j_2 m_2\rangle$

(zu. $|j_1 m_1\rangle|j_2 m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C^{j\,j_1 j_2}_{m\,m_1 m_2} |j\,m_1+m_2\rangle$))

- Zerfälle: Isospin bleibt erhalten
- Streuung: Amplitude bestimmt durch I des Streuzustandes (vgl. Übungen, Aufgabe 32)

Parität ist eine "diskrete Raumzeitsymmetrie"

Raum(spiegelung) (inversion!) $x^\mu \to x^{\mu\prime} = \Lambda_P{}^\mu{}_\nu x^\nu$, $\Lambda_P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ ist ein Teil der Lorentzgruppe (vgl. Skript S. 7).

Vermutung: diese Trafo vertauscht mit $\hat{H}$ ⇒ kann physikalische Teilchen als Eigenzustände wählen. Für QED/QCD ist das der Fall.

Bezeichnung: Operator $\hat{P}$ überführt Teilchenzustände in raumgespiegelte Version. wegen $\hat{P}^2 = \mathbb{1}$ hat $\hat{P}$ die Eigenwerte $p = \pm 1$.

falls ein Objekt unter L-Trafo invar. ist: "Skalar"

wie x^μ transformiert: "Vektor"

mit ihrem Verhalten unter $\hat{P}$ fallen diese in folgende Klassen:

Skalar	$\hat{P} s = s$	
Pseudoskalar	$\hat{P} p = -p$	z.B. $p = \vec{v}\cdot\vec{a}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$
Vektor	$\hat{P}\vec{v} = -\vec{v}$	z.B. $\vec{v} = \partial_t \vec{x}$
Axialvektor (oder Pseudovektor)	$\hat{P}\vec{a} = \vec{a}$	z.B. $\vec{a} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, $\vec{r}\times\vec{F}$, $\vec{B}$

Die wichtigsten $J=0$ Mesonen (π, K, η, η'; S. S. 42) sind <u>Pseudoskalare</u>

denn: betrachte $\hat{P}$ im 2d Raum von Teilchen/Anti T.

beide sind Eigenzustände von $\hat{P}$ ⇒ $\hat{P}$ diagonal, $\hat{P} = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

also hat T.-Anti T.-Zustand Gesamtparität $1\cdot(-1) = -1$

((angeregte Zustände: zusätzlicher Faktor $(-1)^{l}$ ← Bahndrehimpuls))

merken:
- Bewegungsrichtung = Vektor ($\vec{v} = \partial_t \vec{x}$)
- Spinvektor = Axialvektor ($\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p}$)
- Helizitäts- (oder Polarisations-)Zustand = Pseudoskalar

((= Projektion des Spinvektors auf Bewegungsrichtung))

Ladungskonjugation $\hat{C}$

konvertiert jedes Teilchen in sein Antiteilchen

im 2d Raum von T.-Anti T.: $\hat{C} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

wieder $\hat{C}^2 = \mathbb{1}$

$\hat{C}$ vertauscht mit $\hat{H}$ der QED/QCD.

((haben allerdings T./Anti T.-Zustände nicht als Eigenzust. gewählt))

falls ein Teilchen sein eigenes Antiteilchen ist, hat man wieder einen Eigenzustand, mit Ew $C = \pm 1$

Bsp π^0 hat $C = +1$, Photon γ hat $C = -1$

also ist $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ erlaubt (PDG: 98.8 %)

$\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma$ verboten (PDG: $< 3\cdot 10^{-8}$)

kombinierte diskrete Symmetrien

- die Kombination $\hat{C}\hat{P}$ ist sehr wichtig (s. später; s. Übung, Aufg. 33).
  überführt Teilchen mit Helizität/Polarisation in Anti-T. mit entgegengesetzem Wert
- kommen Zeitumkehr definieren ((s. S. 7, $\Lambda_T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$)).
  der entsprechende Operator heißt $\hat{T}$.
  $\hat{T}$ nicht unabhängig von $\hat{C}\hat{P}$, denn: jede Lorentz-invariante QFT muß $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$-symmetrisch sein! [Pauli, 1955]
  ((Konsequenz der $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$-Symmetrie: Teilchen und Anti-T. haben dieselbe Masse und Lebensdauer. Experiment ⇒ ✓))

Paritätsverletzung

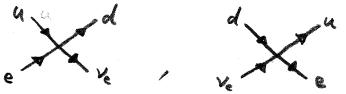
historisch: schwache WW als Ursache des β-Zerfalls $n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$

[Fermi, 1932] Modell dafür: $\hat{\mathcal{L}}_I = -G_F\left(\hat{\bar{n}}\gamma^\mu \hat{p}\,\hat{\bar{\nu}}_e \gamma_\mu \hat{e} + \hat{\bar{p}}\gamma^\mu \hat{n}\,\hat{\bar{e}}\gamma_\mu \hat{\nu}_e\right)$

Fermi-Kopplung $G_F = 1.166\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{GeV}^2}$; Feldoperatoren

heute würden wir das Fermi-Modell mit Partonen statt Nucleonen schreiben: $\hat{\mathcal{L}}_I = -G_F \left(\hat{\bar{d}} \gamma^\mu \hat{u} \, \hat{\bar{\nu}}_e \gamma_\mu \hat{e} + h.c. \right)$ ← "hermitesch konjugiert"

$\Leftrightarrow$ Vertices

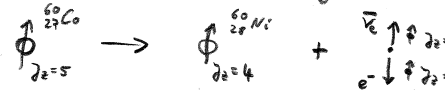


experimentelle Befund (C.S. Wu, 1957): in schwachen Zerfällen wird Parität verletzt! unerwartet!

Kobalt-60

beobachtet — nicht beobachtet!

eine etwas andere Darstellung dieses Experiments:

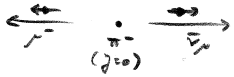


$\Rightarrow$ $\bar{\nu}_e$ sollte immer rechtshändig sein, mit Helizität $h = +1$
ν_e linkshändig, $h = -1$

→ Paritätsverletzung nicht nur beim Betazerfall des Kobalts, sondern aber "Nachbarzerfällen" der schwachen WW.

z.B.: $K^+ \to \pi^+ + \pi^0$ $(P = +1)$ (PDG: 20.7 %)
$K^+ \to \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$ } $(P = -1)$ 1.8
$K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ } 5.6

z.B.: $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$:



es werden nur $h = +1$ - Myonen beobachtet.
((das Antineutrino wird natürlich nicht beobachtet, muß aber wegen Drehimpuls-Erhaltung auch $h = +1$ haben))

→ Fermi-Modell muß geändert werden!

L-Invarianz ⇒ Helizitätsoperator (($h = \vec{e}_p \cdot \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$, s. S. 23)) nicht brauchbar; aber Chiralitätsoperator (($\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$)), - Projektoren $P_{L/R}$.

((masselose T.: Chir. ≙ Hel., s. S. 24))

schwache WW sollen also nur linkshändige (P_L) Teilchen und rechtshändige (P_R) Antiteilchen erzeugen:

$$P_{R/L} \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2}, \quad \psi_{R/L} \equiv P_{R/L} \psi$$

$$\Rightarrow \hat{\mathcal{L}}_I^{V-A} \equiv -2\sqrt{2}\, G_F \left\{ \hat{\bar{d}} \gamma^\mu P_L \hat{u} \; \hat{\bar{\nu}}_e \gamma_\mu P_L \hat{e} + \hat{\bar{u}} \gamma^\mu P_L \hat{d} \; \hat{\bar{e}} \gamma_\mu P_L \hat{\nu}_e \right\}$$

$$= -2\sqrt{2}\, G_F \left\{ \hat{\bar{d}}_L \gamma^\mu \hat{u}_L \; \hat{\bar{\nu}}_{eL} \gamma_\mu \hat{e}_L + \hat{\bar{u}}_L \gamma^\mu \hat{d}_L \; \hat{\bar{e}}_L \gamma_\mu \hat{\nu}_{eL} \right\}$$

[s. Übungen, Aufgabe 34]

Bem. der Name "V-A"-Modell steht für "Vektor minus Axialvektor"; denn $\gamma^\mu P_L \sim \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5$, und
$\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2$ transformiert wie ein Vektor
$\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \psi_2$ " Axialvektor (vgl. S. 53)

Seltsamkeitsverletzung

in der schwachen WW werden viele andere (außer P) QZ verletzt.

z.B.: $K^+ \to \pi^+ \pi^0$ (usw.) $\pi^+ \pi^0 \pi^0$: Seltsamkeit S verletzt!

z.B.: $D^0 \to K^- \pi^+ \pi^0$ (cū) : Charmness C verletzt! (PDG: 13.9 %)

können wir diese Prozesse ins Fermi-Modell aufnehmen?

→ def. Fermion-Dubletten, charakterisiert durch el. Ladung und "Generation":

Leptonen: $L_1 \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$; $L_2 \equiv \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$ ← $Q = 0$, ← $Q = -1$

Quarks: $Q_1 \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$; $Q_2 \equiv \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ ← $Q = +\frac{2}{3}$, ← $Q = -\frac{1}{3}$

((Bem.: ∃ jeweils dritte Generation; spielt in obigen Prozessen keine Rolle))

Bem: Zuordnung der Quarks zu "Generationen" ist Konvention.

Hier: c-Quark definiert zweite Generation

→ untere Komponenten können noch Linearkombinationen aus d, s sein.

$$Q_1' \equiv \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \quad Q_2' \equiv \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

Cabibbo-Winkel $\theta_c \approx 0.2286 \hat{=} 13.1°$

könnten wir dasselbe mit L_1, L_2 machen?

→ im Prinzip ja; aber ν_e, ν_μ (in guter Näherung) masselos, also (fast) identisch, also macht Rotation keinen Unterschied.

ursprüngliches Fermi-Modell (s. S. 56)

$$\hat{\mathcal{L}}_I^{V-A} = -2\sqrt{2}\, G_F \left\{ \hat{\bar{Q}}_{1L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} \hat{Q}_{1L} \; \hat{\bar{L}}_{1L} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{L}_{1L} + h.c. \right\}$$

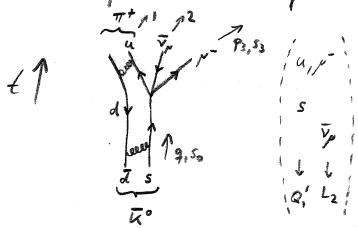
→ Verallgemeinerung:

$$\hat{\mathcal{L}}_I^{V-A} = -2\sqrt{2}\, G_F \sum_{D_L} \sum_{D_L'} \hat{\bar{D}}_L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L \; \hat{\bar{D}}_L' \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L'$$

mit $D_L, D_L' \in \{ Q_{1L}', Q_{2L}', L_{1L}, L_{2L} \}$ $\quad \left(\binom{1}{2} \Rightarrow \bar{\psi}\gamma^\mu 1 \cdot \bar{\psi}\gamma_\mu 2 \right)$

enthält Strukturen; beinhaltet sehr viele verschiedene Prozesse!

Bsp "semileptonischer" Zerfall $\bar{K}^0 \to \pi^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu$



auslaufende Teilchen: in $\hat{\bar{\psi}}$

einlaufende T. / auslaufende Anti-T. } in $\hat{\psi}$

(vgl. S. 22)

→ obiger Prozeß vermittelt durch

$$\hat{\mathcal{L}}_I \ni -2\sqrt{2}\, G_F \; \hat{\bar{\mu}}_L \gamma^\mu \hat{\nu}_L \; \hat{\bar{u}}_L \gamma_\mu \hat{d}_L'$$

$$\to -2\sqrt{2}\, G_F \sin(\theta_c) \; \hat{\bar{\mu}} \gamma^\mu P_L \hat{\nu} \; \hat{\bar{u}} \gamma_\mu P_L \hat{s}$$

→ Amplitude berechnen wie "gewohnt" (vgl. S. 33, 37)

$$\mathcal{M} = -\frac{i}{\sqrt{2}} G_F \sin(\theta_c) \; \bar{u}(\vec{p}_3, s_3) \gamma^\mu (1-\gamma_5) v(\vec{p}_2, s_2) \cdot \bar{u}(\vec{p}_1, s_1) \gamma_\mu (1-\gamma_5) u(\vec{q}_1, s_0)$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \ldots$$

Unitaritätsgrenze

Fermi-Modell ist sehr erfolgreich: beschreibt fast alle schwachen Zerfälle.

Es gibt jedoch theoretische Argumente, die seine Grenzen aufzeigen:

(a) betrachte z.B. $\bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^-$ - Streuung im CMS.

$s = (q_1 + q_2)^2$; Frage: Wirkungsquerschnitt $\sigma(s)$ für große s?

dimensionale Analyse:

$\mathcal{M}$ hat G_F ($G_F \approx 1.166 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$) $\Rightarrow |\mathcal{M}|^2$ hat G_F^2

$[\sigma] = [\text{Fläche}] = [\mathrm{fm}^2] = [\mathrm{GeV}^{-2}]$

für $s \gg m_e^2$ gibt es keine anderen Skalen $\Rightarrow$ $\underline{\sigma \sim G_F^2 s}$

((die genaue Antwort ist $\sigma = \frac{G_F^2 s}{3\pi}$))

dieses Verhalten $\sigma(s \gg m_e) \sim s$ kann aber nicht richtig sein:

betrachte Streumatrix (vgl. §3, S. 25, 26, 29)

$$\hat{S} \equiv \hat{U}_I(+\infty, -\infty) \equiv \mathbb{1} - i\hat{T}$$

($\hat{U}_I$: Zeitentwicklungs-Op.; $\hat{T}$: Transformatrix)

$$\langle f | \hat{T} | i \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)\, T_{fi}$$

Gesamtwahrscheinlichkeit bleibt erhalten $\Leftrightarrow$ $\hat{S}$ unitär $\Leftrightarrow$ $\hat{S}^\dagger \hat{S} = \mathbb{1}$

$\Leftrightarrow (\mathbb{1} + i\hat{T}^\dagger)(\mathbb{1} - i\hat{T}) = \mathbb{1} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{T}^\dagger \hat{T} = i(\hat{T} - \hat{T}^\dagger)$

also ist

$$i \langle f | \hat{T} - \hat{T}^\dagger | i \rangle = \langle f | \hat{T}^\dagger \hat{T} | i \rangle = \sum_n \langle f | \hat{T}^\dagger | n \rangle \langle n | \hat{T} | i \rangle$$

bzw.

$$i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p_f - \Sigma q_i) \left[T_{fi} - T_{if}^* \right] = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma p_f - \Sigma r_n)\, T_{nf}^* \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma r_n - \Sigma q_i)\, T_{ni}$$

$$\Leftrightarrow \quad i \left[T_{fi} - T_{if}^* \right] = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma r_n - \Sigma q_i)\, T_{nf}^* T_{ni}$$

wir wissen (s. z.B. S. 29), daß $T_{fi} \sim \mathcal{M}$ ist; nach Phasenraum int.

sagt diese Formel also etwas über das Verhalten von σ aus.

eine genaue Analyse ist kompliziert; "Froissart-Grenze"

Resultat: σ kann für große s höchstens logarithmisch anwachsen.

$\Rightarrow$ lineares Wachstum, wie oben per dim. Analyse hergeleitet, verletzt Unitarität, also Wahrscheinlichkeitserhaltung!

(b) ein anderes Argument ist die sog. "Renormierbarkeit" (s. später).

Resultat: Fermi-Modell kann nur für $s \lesssim G_F^{-1}$ richtig sein.

$\Rightarrow$ Fermi-Modell ist keine komplette Theorie der schwachen WW'n!

$W^\pm$-Teilchen

die Lösung der Situation ist geniial [O. Klein 1938]:

definiere $G_F =: \frac{g_W^2}{4\sqrt{2}\, m_W^2}$, g_W, m_W vorerst unbekannt

def $J_+^\mu \equiv \sum_{D_L} \hat{\bar{D}}_L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L$; $(J_+^\mu)^+ = \sum_{D_L} \hat{\bar{D}}_L \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{D}_L$

dann ist das Fermi-Modell $\hat{\mathcal{L}}_I = -\frac{g_W^2}{2} J_+^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2} (J_+^\nu)^+$

ersetze dies durch $\hat{\mathcal{L}}_I = i \frac{g_W^2}{2} J_+^\mu \underbrace{\frac{i}{s-m_W^2}(-g_{\mu\nu})}_{\text{wie Photon-Propagator, aber mit Masse!}} (J_+^\nu)^+$

Relevanz: für $s \ll m_W^2$ ändert sich nichts

aber für $s \gg m_W^2$ wird $\sigma_{tot} = \frac{G_F^2 s}{3\pi} \cdot \left(\frac{m_W^2}{s-m_W^2}\right)^2 \approx \frac{G_F^2 m_W^4}{3\pi s}$

$\Rightarrow$ Problem durch Einführung neuer Teilchen gelöst!

diese neuen T. (W^- und sein Antiteilchen W^+) haben Masse m_W und el. Ladung ($\pm e$)

die oben def. Objekte J_+^μ heißen "geladene Ströme"

Experiment?! $W^\pm$-Teilchen 1983 am CERN entdeckt.

Masse $m_W = 80.398 \pm 0.025$ GeV

Bezeichnung manchmals als "intermediäre Vektorbosonen"

Z^0-Teilchen

das Problem mit $\bar{\nu}_e e^- \to \bar{\nu}_e e^-$ ist durch $W^\pm$ gelöst.

es gibt andere Prozesse, die in völliger Analogie dazu einen ungeladenen Partner der W's, das Z^0 [S. Bludman 1958] und "neutrale Ströme" $J_0^\mu = \sum_D \hat{\bar{D}} \begin{pmatrix} c_V^u \gamma^\mu + c_A^u \gamma^\mu \gamma^5 & 0 \\ 0 & c_V^d \gamma^\mu + c_A^d \gamma^\mu \gamma^5 \end{pmatrix} \hat{D}$ benötigen.

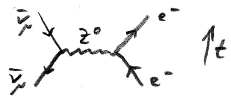
((nicht mehr reines "V-A"; $c_{V/A}^{u/d}$ numerische Koeff's, s. später))

$\Rightarrow \hat{\mathcal{L}}_I \equiv i \frac{g_W^2}{2} J_0^\mu \frac{i}{s-m_Z^2} (-g_{\mu\nu}) J_0^\nu$

$m_Z = 91.1876 \pm 0.0021$ GeV [CERN, 1983]

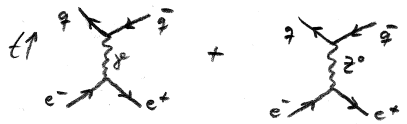
Bsp 1 Neutrinos haben jetzt auch direkte WW

z.B. ist $\bar{\nu}_\mu e^- \to \bar{\nu}_\mu e^-$ möglich



((expt. Nachweis der neutralen Ströme, CERN 1973, durch diesen Prozess))

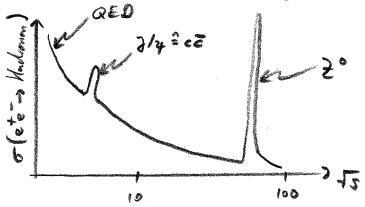
Bsp 2 $e^+e^- \to$ Hadronen (vgl. §5) bekommt zusätzlichen Beitrag:



QED — schwache WW

S.44: $\sigma_{QED} \sim \frac{1}{s}$ — s.o.: $\sigma \sim \frac{s}{(s-m_Z^2)^2} \to \infty$ für $s \to m_Z$!

Experiment:



7. elektroschwaches Standardmodell

bisher kennen wir

Teilchen : Quarks ; Leptonen; Photon; Gluonen; $W^\pm$, Z^0

WW'n : elektromagnetische; starke; schwache

expt. verifiziert ✓✓

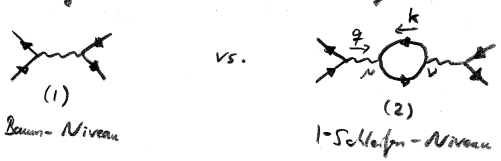
wir brauchen aber noch eine "bessere", übergeordnete Struktur.

warum? → wieder theoretische Argumente :

Renormierbarkeit

grundlegende Frage: sind höhere Ordnungen der Störungstheorie wirklich klein?

z.B.



(1) Baum-Niveau vs. (2) 1-Schleifen-Niveau

Größenordnung der Amplitude:

$$\mathcal{M}(2) \sim \mathcal{M}(1) * \quad \text{(Diagramm (2))}$$

(Feynman-Regeln, s. S. 34, 36) →

$$\sim \mathcal{M}(1) * \frac{i}{q^2}\cdot e^2 \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathrm{Sp}\left[i\gamma^\mu \frac{i(\not k+m)}{k^2-m^2}\, i\gamma^\nu \frac{i(\not q+\not k+m)}{(q+k)^2-m^2}\right]$$

(γ-Spuren; wie bei exp-Streuung, s. S. 39) →

$$= \mathcal{M}(1) * \frac{(-4ie^2)}{q^2}\cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{2k^\mu k^\nu + q^\mu k^\nu + q^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}(k^2+k\cdot q-m^2)}{(k^2-m^2)\left((q+k)^2-m^2\right)}$$

Integral ist divergent!

(div 1) "auf der Massenschale"

Nenner = 0 für $k_0 = \pm\sqrt{\vec k^2+m^2}$, $k_0 = -q_0 \pm \sqrt{(\vec k+\vec q)^2+m^2}$

→ genauere Def. des Propagators beschreibt, wie mit diesen Polen umgegangen wird ("Einkleidung")

(div 2) "Ultraviolett-Divergenz"

für große $|k|$. denn:

letzten Term im Zähler umformen:

$$k^2+kq-m^2 = k^2+\tfrac12\left((q+k)^2-q^2-k^2\right)-m^2$$
$$= \tfrac12\left(k^2-m^2\right)+\tfrac12\left((q+k)^2-m^2\right)-\tfrac12 q^2$$

→ der $g^{\mu\nu}$-Anteil des obigen Integrals ist dann

$$-g^{\mu\nu}\left\{\underbrace{\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2}}_{\text{quadratisch divergent!}} - \frac{q^2}{2}\underbrace{\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-m^2)\left((q+k)^2-m^2\right)}}_{\text{logarithmisch divergent!}}\right\}$$

(s. Übung, Aufgabe 40,41) ⟷

⇒ Korrekturen scheinen also i.A. nicht klein, sondern unendlich zu sein!

Katastrophe? Nein! Selektionsargument für Theorien:

→ in sogenannten "renormierbaren Theorien" kürzen sich alle solche Divergenzen, wenn man Beziehungen zwischen physikalisch messbaren Größen berechnet. ((Kürzung funktioniert Ordnung für Ordnung in Störungstheorie))

Kriterien für renormierbare (≡ wohldefinierte) Theorien:

- die Lagrange-Dichten für Photonen, Gluonen, $W^\pm$, Z^0-Teilchen müssen "eichinvariant" sein (s.u.)
- die Lagrange-Dichte enthält nur WW'n zwischen drei (Bosonen, Fermionen) oder vier (Bosonen) Feldern ((also ist das Fermionmodell nicht renormierbar))

Eichinvarianz

betrachte QED ("abelsche Eichtheorie")

haben bisher meist WW-Term $\hat{\mathcal{L}}_I$ von $\hat{\mathcal{L}}$ untersucht

es gilt auch $\hat{\mathcal{L}}\big|_{\text{quadratisch (in Feldop's)}}$ → Propagatoren, Massen der Felder

((vgl. S. 15: A_μ Lsg der Max $\Rightarrow$ $A_\mu + \partial_\mu \chi$ auch))

Eichtransformation: $\hat{A}_\mu \to \hat{A}_\mu' = \hat{A}_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$

Masse für $\hat{A}_\mu$ einführen?

Lorentz-Inv! $\to$ einzige Möglichkeit: $\delta\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} m^2 \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu$

aber: $\delta\hat{\mathcal{L}}' = \frac{1}{2} m^2 \left[\hat{A}_\mu \hat{A}^\mu + \frac{2}{e} \hat{A}^\mu \partial_\mu \alpha + \frac{1}{e^2} (\partial_\mu \alpha)(\partial^\mu \alpha) \right]$

$\neq \delta\hat{\mathcal{L}}$ $\Rightarrow$ Massenterm ist i.A. <u>nicht</u> <u>eichinvariant</u>!

d.h. Theorien mit solchen Massentermen sind i.A. <u>nicht</u> <u>renormierbar</u>.

OK für Photonen, Gluonen: ohnehin masselos.

$\to$ aber wie erreicht man Renormierbarkeit für schwere Teilchen ($W^\pm, Z^0$)?

Masse für <u>Skalarfelder</u> $\hat{\phi}$ möglich?

$\hat{\phi} \to \hat{\phi}' = e^{i\alpha(x)} \hat{\phi}$, $\hat{\phi}^\dagger \to \hat{\phi}'^\dagger = e^{-i\alpha(x)} \hat{\phi}^\dagger$

$\Rightarrow \delta\hat{\mathcal{L}} = m^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}$ <u>ist</u> eichinvariant ✓ $\Rightarrow$ <u>JA.</u>

Masse für <u>Fermionen</u> $\hat{\psi}$ möglich?

wir haben gesehen, dass i.A. links- und rechtshändige Fermionen verschiedene Ww'n fühlen

$\hat{\psi}_L \to \hat{\psi}_L' = e^{i\alpha(x)} \hat{\psi}_L$, $\hat{\psi}_R \to \hat{\psi}_R' = e^{i\beta(x)} \hat{\psi}_R$

die entsprechenden (quadratischen) L.-Invarianten verschwinden aber:

$\hat{\bar{\psi}}_L \hat{\psi}_L = \hat{\bar{\psi}} P_R P_L \hat{\psi} = \hat{\bar{\psi}} \frac{1}{4}(1+\gamma_5)(1-\gamma_5)\hat{\psi} = 0$ $\Rightarrow$ <u>NEIN.</u>

((denn $\hat{\bar{\psi}}_L = P_L \bar{\psi} = P_L \psi^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\gamma_0 = \psi^\dagger \gamma_0 \frac{1}{2}(1+\gamma_5) = \bar{\psi} P_R$, s. Ü 34))

$\to$ Massenterme für Vektorbosonen ($W^\pm, Z^0$) und Fermionen (Quarks, Leptonen) also verboten ?! ☹

Nur für Skalarfelder erlaubt ??

$\to$ Kernidee des Standardmodells

[Glashow/Weinberg/Salam, 1967; Nobel '79]

es gibt ein massives Skalarfeld ("Higgs-Boson", s. später), das mit den anderen Feldern wechselwirkt.

dadurch bekommen diese anderen Felder auch Masse (genauer Mechanismus: s. später)

kurze Zusammenfassung der Logik:

Eichinvarianz $\Rightarrow$ Renormierbarkeit $\Rightarrow$ wohldefinierte Theorie

$\hookrightarrow$ erlaubt: keine Massen für z.B. $W^\pm, Z^0$

$\hookrightarrow$ erlaubt: jedoch eine Ww zwischen massivem Skalarfeld und $W^\pm, Z^0$ $\Rightarrow$ brauchen (mind.) <u>ein</u> <u>neues</u> <u>Teilchen</u>

((Erinnerung: um das Verhalten der Integrale auf S. 62 zu untersuchen (vgl. Ü 40, Ü 41), <u>Residuensatz</u>.

<u>z.B.</u> $\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{z^2+1} = \arctan(z)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

<u>oder</u> $= \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{(z-i)(z+i)} = 2\pi i \underbrace{\frac{1}{i+i}}_{\mathrm{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1}} = \pi$

, Bogen trägt nicht bei: da $\sim \frac{R}{R^2} \to 0$))

---

nächste Vorl.: Mo 5.1.2009

Bausteine des Standardmodells (SM)

- Eichsymmetrie

  $U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_c$

  starke Ww'n ; Farbladung (color)

  (linkshändige) schwache Ww'n ; $W^\pm, Z^0$

  "Hyperladung" ; → elektromagnet. Ww'n ; Photon γ

- Renormierbarkeit

  erlaubt sind lorentzinvar. Vertices

  mit drei Bosonen + Fermionen oder vier Bosonen

- Materie-Teilchen

  Leptonen $\quad L_{1L} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad L_{2L} = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad L_{3L} = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$

  $e_R \qquad \mu_R \qquad \tau_R$

  Quarks $\quad Q'_{1L} = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad Q'_{2L} = \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \quad Q'_{3L} = \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$

  $u_R \qquad c_R \qquad t_R$

  $d_R \qquad s_R \qquad b_R$

  Skalarfeld ≡ "Higgs-Feld" Φ

- Quantenzahlen

  jedes Teilchen unter jeder der Eichsymmetrien

  gibt an, ob und mit welcher Ladung Q_i das entsprechende

  Teilchen unter der Eichsymmetrie transformiert wird.

- Kopplungskonstanten

  bei der Konstruktion der allgemeinsten möglichen Lagrangedichte

  nach obigen Prinzipien benötigte freie Parameter

Bem.:
- Prinzipien sehr einfach. "Schönheit" der El.-Teilchen-Physik.
- das SM ist nicht sehr einfach:

  viele Teilchen, viele Parameter
- offene Fragen z.B.: warum genau diese Eichsymmetrie?

  ⋮ Quantenzahlen?

  woher kommen die Parameterwerte?
- Beantwortung dieser Fragen von theoretischer Seite:

  Aufgabe der "Physik jenseits des SM"
- experimentell sind alle diese Werte bekannt ($\pm$ Meßfehler)

Jetzt: genauere Betrachtung einiger Teile der Lagrange-Dichte

((Ww'n zwischen $W^\pm, Z^0, \gamma$, Quarks: s.o.

Gluonen haben keine Ww'n mit dem Higgs-Boson.))

(1) Ww'n zwischen $W^\pm, Z^0, \gamma$ und Higgs-Boson

⇒ Massen für $W^\pm, Z^0$

(2) Dynamik des Higgs-Bosons

⇒ warum hat man es noch nicht experimentell gesehen?

(3) Ww'n zwischen Quarks und Higgs-Boson

⇒ Massen für Quarks ; $\cancel{CP}$

(1) Ww'n zwischen $W^\pm, Z^0, \gamma$ und Higgs

Quantenzahlen des Higgs-Bosons:

neutral unter $SU(3)_c$

transformiert unter $SU(2)_L$ ⇒ $\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^+ \\ \hat{\phi}^0 \end{pmatrix}$

transformiert unter $U(1)_Y$, mit Ladung $-\frac{1}{2}$

((unter $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$, $A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$))

aus Übung, Aufg. 42: allg. eichinvar. Form

$$\sim \left[(\partial_\mu - ieA_\mu)\hat{\phi} \right]^+ \left[(\partial^\mu - ieA^\mu)\hat{\phi} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \delta\hat{\mathcal{L}} = [D_\mu \hat{\Phi}]^+ [D^\mu \hat{\Phi}]$$

wobei $\quad D_\mu \equiv \partial_\mu - i g_w T^a \hat{A}^a_\mu + \frac{1}{2} i g_Y \hat{B}_\mu$

(5.59) $\rightsquigarrow$ schwache Kopplungskonst.

(5.13) $\rightsquigarrow$ 2x2-Matrizen; $T^a \equiv \frac{\sigma^a}{2}$

drei SU(2)-Felder; $a = 1,2,3$

$\Rightarrow W^\pm, Z^0$

Hyperladungs-Feld $\leftrightarrow$ Photon; s. unten, S.69

Hyperladungs-Kopplung $\leftrightarrow$ "e" s. unten, S.69

Hyperladung $= -\frac{1}{2}$

- mehr zu dieser Struktur (Konsequenzen, ..) : s. unten, S.68

(2) Dynamik des Higgs

Terme, die nur das Higgs-Boson enthalten, werden als "Potential" bezeichnet: $\delta\hat{\mathcal{L}} \equiv -V(\hat{\Phi})$

es gibt nur 2 eichinvar. Möglichkeiten: $\quad V(\hat{\Phi}) \equiv \mu^2 \hat{\Phi}^+\hat{\Phi} + \lambda(\hat{\Phi}^+\hat{\Phi})^2$

μ^2, λ: freie Parameter; mehr dazu: s. unten, S.70

(3) Wechselw. zwischen Quarks und Higgs

brauchen jetzt zwei Objekte (vgl. Übung, Aufgabe 45) $\quad \hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^+ \\ \hat{\phi}^0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tilde{\Phi}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\phi}^{0*} \\ -\hat{\phi}^{+*} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \delta\hat{\mathcal{L}} = -h_u \left[\hat{\bar{Q}}'_{1L} \hat{\tilde{\Phi}} \hat{u}_R + \hat{\bar{u}}_R \hat{\tilde{\Phi}}^+ \hat{Q}'_{1L} \right] - h_d \left[\hat{\bar{Q}}'_{1L} \hat{\Phi} \hat{d}_R + \hat{\bar{d}}_R \hat{\Phi}^+ \hat{Q}'_{1L} \right] + 2.+3. \text{ Generation}$$

- wiederum gibt es keinen Grund, genau $\hat{u}_R / \hat{d}_R$ der ersten Generation zuzuordnen. Allgemeiner: $\hat{u}''_R / \hat{d}''_R$ als lin. Komb. aller Quarks mit gleichen Quantenzahlen. Genauer: s. später (S.73 ff)
- Quark-Higgs Ww'n nennt man auch <u>Yukawa-Ww'n</u>.

mehr: s. unten, S.73

Eichbosonen $W^\pm, Z^0, \gamma$ im SM

Eichinvarianz erlaubt keine direkten Massenterme (s. S.63).

Ww zwischen Sm-1 und Sm-0 Feldern jedoch erlaubt (s. S.67):

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}^+ \\ \hat{\phi}^0 \end{pmatrix}, \quad \delta\hat{\mathcal{L}} = [D_\mu \hat{\Phi}]^+ [D^\mu \hat{\Phi}]$$

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_w T^a \hat{A}^a_\mu + \frac{1}{2} i g_Y \hat{B}_\mu$$

$$T^a \equiv \frac{\sigma^a}{2}, \quad \vec{\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} \mathbb{1}_{2\times2} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$$

wie ergibt sich hieraus eine Masse?

<u>Annahme</u>: irgendeine Dynamik (genauer: s. unten S.70) bestimmt in guter Näherung $\hat{\Phi} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, v konstant

$$\Rightarrow \delta\hat{\mathcal{L}} \approx \frac{1}{2} \left[\left(-i g_w T^a \hat{A}^a_\mu + \frac{1}{2} i g_Y \hat{B}_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right]^+ \left[\left(-i g_w T^b \hat{A}^{b\mu} + \frac{1}{2} i g_Y \hat{B}^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (0, v^*) \left(\frac{i g_w}{2} \sigma^a \hat{A}^a_\mu - \frac{i g_Y}{2} \hat{B}_\mu \right) \left(-\frac{i g_w}{2} \sigma^b \hat{A}^{b\mu} + \frac{i g_Y}{2} \hat{B}^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \frac{|v|^2}{8} (0,1) \left(g_w^2 \sigma^a \sigma^b \hat{A}^a_\mu \hat{A}^{b\mu} - g_w g_Y \sigma^a \left[\hat{A}^a_\mu \hat{B}^\mu + \hat{B}^\mu \hat{A}^a_\mu \right] + g_Y^2 \hat{B}_\mu \hat{B}^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(s. Ü3, A.11) $\rightarrow$ $\sigma^a \sigma^b \rightarrow \delta^{ab} \mathbb{1}_{2\times2} + i\varepsilon^{abc} \cancel{\sigma^c}$ antisym. in $a \leftrightarrow b$

gleichzeitige Feldq's vertauschen

erfordern: $\quad (0,1)\, \sigma^a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\delta^{a3}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{g_w |v|}{2} \right)^2 \left(\hat{A}^1_\mu \hat{A}^{1\mu} + \hat{A}^2_\mu \hat{A}^{2\mu} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{|v|}{2} \right)^2 \left\{ g_w^2 \hat{A}^3_\mu \hat{A}^{3\mu} + g_w g_Y \left(\hat{A}^3_\mu \hat{B}^\mu + \hat{B}_\mu \hat{A}^{3\mu} \right) + g_Y^2 \hat{B}_\mu \hat{B}^\mu \right\}$$

$$= \left(g_w \hat{A}^3_\mu + g_Y \hat{B}_\mu \right) \left(g_w \hat{A}^{3\mu} + g_Y \hat{B}^\mu \right)$$

$$= \left(g_w^2 + g_Y^2 \right) \left(\underbrace{\boxed{\frac{g_w}{\sqrt{g_w^2 + g_Y^2}}}}_{\equiv \cos(\theta_w)} \hat{A}^3_\mu + \underbrace{\boxed{\frac{g_Y}{\sqrt{g_w^2 + g_Y^2}}}}_{\equiv \sin(\theta_w)} \hat{B}_\mu \right) \left(\frac{g_w}{\sqrt{g_w^2 + g_Y^2}} \hat{A}^{3\mu} + \frac{g_Y}{\sqrt{g_w^2 + g_Y^2}} \hat{B}^\mu \right)$$

$\equiv \hat{Z}_\mu$

$\theta_w \equiv$ <u>Weinberg-Winkel</u>

bzw. "schwacher Mischungswinkel"

aber: können also durch Einführung einer neuen Basis

$$\begin{pmatrix}\hat{Z}_\mu\\ \hat{Q}_\mu\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\cos\theta_W & \sin\theta_W\\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{A}^3_\mu\\ \hat{B}_\mu\end{pmatrix}$$ das $\delta\hat{\mathcal{L}}$ diagonalisieren!

mit den weiteren Bezeichnungen

$$m_W \equiv \frac{g_W|v|}{2}, \qquad m_Z \equiv \frac{\sqrt{g_W^2+g_Y^2}\,|v|}{2}$$

wird das obige $\delta\hat{\mathcal{L}}$ also zu

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}m_W^2\left(\hat{A}^1_\mu\hat{A}^{1\mu}+\hat{A}^2_\mu\hat{A}^{2\mu}\right)+\frac{1}{2}m_Z^2\hat{Z}_\mu\hat{Z}^\mu + 0\cdot\hat{Q}_\mu\hat{Q}^\mu$$

Coulomb-Eichung: $\hat{A}^a_0=\hat{B}_0=0$ $\longrightarrow$ $-\frac{1}{2}m_W^2\left(\hat{A}^1_i\hat{A}^1_i+\hat{A}^2_i\hat{A}^2_i\right)-\frac{1}{2}m_Z^2\hat{Z}_i\hat{Z}_i - 0\cdot\hat{Q}_i\hat{Q}_i$

wir erhalten also zwei Teilchen mit Masse m_W $\Leftrightarrow W^\pm$

ein " " $m_Z > m_W$ $\Leftrightarrow Z^0$

ein masseloses Feld $\hat{Q}_\mu$ $\Leftrightarrow \gamma$

$\Rightarrow$ exakt so wie berücksichtigt !!!

wie sieht D_μ in der neuen Basis aus? ($Q_Y = -\frac{1}{2}$ für Higgs)

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_W T^a\hat{A}^a_\mu - iQ_Y g_Y\hat{B}_\mu$$

$$= \partial_\mu - i\frac{g_W}{2}\begin{pmatrix}0 & \hat{A}^1_\mu - i\hat{A}^2_\mu\\ \hat{A}^1_\mu + i\hat{A}^2_\mu & 0\end{pmatrix} - i\frac{\sqrt{g_W^2+g_Y^2}}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta_W\hat{A}^3_\mu + 2Q_Y\sin\theta_W\hat{B}_\mu & 0\\ 0 & -\cos\theta_W\hat{A}^3_\mu + 2Q_Y\sin\theta_W\hat{B}_\mu\end{pmatrix}$$

Kopplung der $W^\pm$ an "geladene Ströme", vgl. S. 59

Kopplung der Z^0, γ an "neutrale Ströme", vgl. S. 60

$$\left(\left(\begin{pmatrix}\hat{A}^3_\mu\\ \hat{B}_\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{Z}_\mu\\ \hat{Q}_\mu\end{pmatrix}\right)\right) \equiv \begin{pmatrix}\left[\cos^2\theta_W + 2Q_Y\sin^2\theta_W\right]\hat{Z}_\mu + \cos\theta_W\sin\theta_W(-1+2Q_Y)\hat{Q}_\mu & 0\\ 0 & \left[-\cos^2\theta_W + 2Q_Y\sin^2\theta_W\right]\hat{Z}_\mu + \cos\theta_W\sin\theta_W(1+2Q_Y)\hat{Q}_\mu\end{pmatrix}$$

Higgs-Basis: $Q_Y = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ untere Komponente koppelt nicht an $\hat{Q}_\mu$ (also el. neutral)

$\Rightarrow$ obere " koppelt mit $+i\sqrt{g_W^2+g_Y^2}\cos\theta_W\sin\theta_W \equiv ie$

$\Leftrightarrow$ $\underline{e = g_W\sin\theta_W}$ (vgl. Übg. Afg. 43)

SSB: spontane Symmetriebrechung + Higgs

oben: $W^\pm, Z^0, \gamma$ bekommen die beobachteten Massen, falls

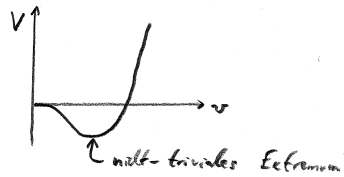
$\hat{\Phi} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}$, $v =$ konst.

↑ hier: wie könnte das passieren?

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = -V(\hat{\Phi}), \quad V(\hat{\Phi}) = \mu^2\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi} + \lambda\left(\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi}\right)^2 \qquad \text{(s. o.)}$$

$\hat{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}$ als Ansatz einsetzen $\Rightarrow$ $V = \frac{1}{2}\mu^2v^2 + \frac{1}{4}\lambda v^4$

$\rightarrow$ falls $\mu^2<0$, $\lambda>0$ gilt, dann $v\neq 0$ durch die Dynamik als "Extremum" bestimmt werden!



$\rightarrow$ dieses Phänomen nennt man "spontane Symmetriebrechung":

$\hat{\mathcal{L}}$ selbst hat viel (Eich-)Symmetrie,

z.B. $V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}\right) = V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ iv\end{pmatrix}\right) = V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}v\\ 0\end{pmatrix}\right) = V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}iv\\ 0\end{pmatrix}\right)$ etc.,

jedoch wählen wir (und die Natur auch!) einen speziellen Wert als Repräsentanten des Extremums aus.

ab jetzt schreiben wir: $\boxed{V(\hat{\Phi}) = -\mu^2\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi} + \lambda\left(\hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi}\right)^2}$

und nehmen an, daß $\mu^2>0$, $\lambda>0$

$\rightarrow$ $V = -\frac{1}{2}\mu^2v^2 + \frac{1}{4}\lambda v^4$, $V' = -\mu^2 v + \lambda v^3 = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}}$

natürlich ist $\hat{\Phi} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}$ keine exakte Ersetzung, sondern eine Näherung. Mehr Genauigkeit: Ableitungen um diesen Punkt

Bei den Ableitungen gibt es einen wichtigen Unterschied, der die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmt:

(der unabhängigen, unabhängigen Ableitungen)

- Theorien mit <u>globaler</u> Symmetrie
  (Symmetrietransformation <u>unabhängig</u> von x)
  Extremum kann als $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}$ gewählt werden
  allg. Ableitung aus $\hat{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\hat{\phi}_2(x) + i\hat{\phi}_3(x)\\ v + \hat{\phi}_0(x) + i\hat{\phi}_1(x)\end{pmatrix}$, ϕ_i : <u>reelle</u> Felder

  → <u>vier</u> neue Teilchen $(\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3)$, vgl. Übungen, Aufgabe 47

- Theorien mit <u>lokaler</u> Symmetrie ≡ Eichsymmetrie
  es gibt weniger unabhängige Ableitungen
  für eine abelsche Symmetrie kann Phase immer weggedreht werden (s. S. 63)
  für $SU(2)_L$ zeigt sich, daß $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3$ weggedreht werden können

  ((denn: $\hat{\Phi}(x) \to \hat{\Phi}'(x) = e^{i\sigma^a\hat{\phi}_a(x)\frac{1}{v}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+\phi_0(x)\end{pmatrix}$, $a = 1,2,3$

  $\left(\left(e^{i\vec{\sigma}\vec{a}} \in SU(2),\ \text{s. Übung, A 18f, A 44a}\right)\right)$

  "kleine" Störung $\hat{\phi}_a$ $\approx \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 + i\phi_3/v & i\phi_1/v + \phi_2/v\\ i\phi_1/v - \phi_2/v & 1 - i\phi_3/v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v+\phi_0\end{pmatrix}$

  $= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi_2 + i\phi_1\\ v + \phi_0 - i\phi_3\end{pmatrix}$))

  → <u>ein</u> neues Teilchen $(\hat{\phi}_0)$, das <u>Higgs-Boson</u>

also $\hat{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v + \hat{\phi}_0(x)\end{pmatrix}$ ⇒ $\hat{\Phi}^+\hat{\Phi} = \frac{1}{2}\left(v^2 + 2v\hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_0^2\right)$

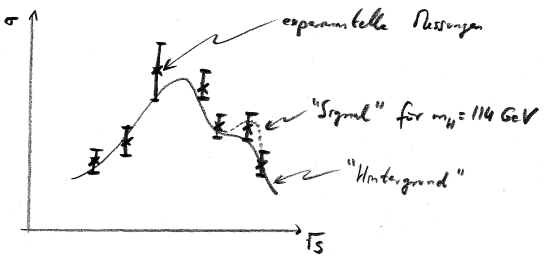
$$\Rightarrow V(\hat{\Phi}) = -\frac{\mu^2}{2}\left(v^2 + 2v\hat{\phi}_0 + \hat{\phi}_0^2\right) + \frac{\lambda}{4}\left(v^4 + 4v^3\hat{\phi}_0 + 2v^2\hat{\phi}_0^2 + 4v^2\hat{\phi}_0^2 + 4v\hat{\phi}_0^3 + \hat{\phi}_0^4\right)$$

$$= \underbrace{-\frac{\mu^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4}_{\text{s. S. 70}} + \underbrace{(-\mu^2 + \lambda v^2)}_{=0\,!}v\hat{\phi}_0 + \underbrace{\frac{1}{2}(-\mu^2 + 3\lambda v^2)}_{m_H^2 = 2\lambda v^2 = 2\mu^2 > 0\ (!)}\hat{\phi}_0^2 + \underbrace{\lambda v\hat{\phi}_0^3 + \frac{\lambda}{4}\hat{\phi}_0^4}_{\text{WW!}}$$

→ haben also <u>keine</u> theoretische <u>Vorhersage</u> für die Higgs-Masse;
wissen aber, daß es ein neues Teilchen mit bestimmten WW's geben muß.

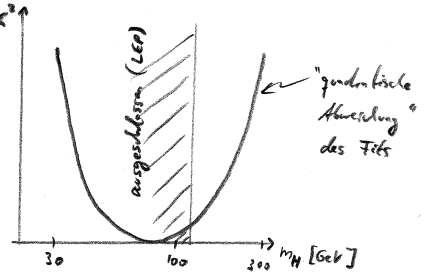
→ experimentell: Higgs-Boson noch nicht entdeckt.

LEP (CERN):
wenn Higgs ex.,
dann $m_H > 114$ GeV
((vgl. hep-ex/0306033,
Ergebnis der direkten
SM-Higgs-Suche am LEP))



→ experimentell: "Hinweise" für "leichtes" Higgs.

Präzisions-Messungen weiterer
Parameter des SM
⇒ mit $\begin{pmatrix}90\\95\\99\end{pmatrix}$% Wahrscheinlichkeit
ist $m_H \leq \begin{pmatrix}155\\167\\195\end{pmatrix}$ GeV



((vgl. arXiv: 0712.0929, bzw. http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG))

Einfluss der Higgs-Masse durch "Schleifen":

<u>Also:</u>
- wenn das Potential des Higgs-Feldes die richtige Form hat (($-\mu^2\phi^2 + \lambda\phi^4$)), wird $SU(2)_L \times U(1)_Y$ Eichinvarianz spontan gebrochen.
  → dann erhalten $W^\pm, Z^0$ Masse, γ nicht.
- das Higgs-Boson muß entdeckt werden, um sicher zu sein, daß dieser Mechanismus wirklich für die Massen verantwortlich ist!

GSI — Aug 3 – Sep 25, 2009

Schwerionenphysik

Erwartung: FdIR ($\bar{p}$ + Ion Resonanz)

3 Jahre Studium, Vorl. in Kernphys / Teilchenphys / Atomphysik

8 Wochen; ~35 Teilnehmer

Vorlesungen; Projekt

Gästezimmer ✓ Reisekostenbeihilfe ✓ per diem ✓

web application: Anmeldung 28 Feb 09

+2 Gutachten (confidential) ← Info, prompt out

+ Transcript

DESY — July 21 – Sep 10, 2009

3 Jahre Studium

DESY HH oder Zeuthen

Vorl. in English, Tour de Beschleuniger + Exp., Mitarbeit in Gruppen

Synchrotronstrahlung: Bio, Medizin, ...

Teilchenphys: Exp, software, hardware, Theorie

7.5 Wochen;

Geld für Lebenshaltungskosten für 1 Person ✓ Zugeld ⇔ Lecg

forms online. Anmeldung 31 Jan 09

+2 Gutachten (conf.) ← Info, prompt out

+ CV

CERN — expt. Teams + Vorl.

8–13 Wochen, Juni 2 – Sep 25

Anmeldung 28 Jan 09

Quark Massen

von S. 67:

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = -h_u\left[\hat{\bar{Q}}'_{1L}\,\hat{\bar{\Phi}}\,\hat{u}''_R + \hat{\bar{u}}''_R\,\hat{\bar{\Phi}}^+\hat{Q}'_{1L}\right] - h_d\left[\hat{\bar{Q}}_{1L}\,\hat{\Phi}\,\hat{d}''_R + \hat{\bar{d}}''_R\,\hat{\Phi}^+\hat{Q}'_{1L}\right] \quad + 2.+3.\ \text{Generation}$$

mit $\hat{Q}'_{1L} = \begin{pmatrix}\hat{u}'_L\\ \hat{d}'_L\end{pmatrix}$ und $\hat{\Phi} = \begin{pmatrix}\hat{\phi}^+\\ \hat{\phi}^0\end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}$

$$\hat{\bar{\Phi}} = \begin{pmatrix}\hat{\phi}^{0*}\\ -\hat{\phi}^{+*}\end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}v\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \delta\hat{\mathcal{L}}\big|_{\text{quadratisch}} = -h_u\frac{v}{\sqrt{2}}\left[\hat{\bar{u}}'_L\,\hat{u}''_R + \hat{\bar{u}}''_R\,\hat{u}'_L\right] - h_d\frac{v}{\sqrt{2}}\left[\boxed{\hat{\bar{d}}'_L\,\hat{d}''_R} + \hat{\bar{d}}''_R\,d'_L\right] \quad + 2.+3.\ \text{Generation}$$

$$= (P_L\hat{d}')^+\gamma^0 P_R\hat{d}'' = \hat{d}'^+P_L^+\gamma^0 P_R\hat{d}'' \quad , \quad \gamma_5^+ = \gamma_5,\ \{\gamma_\mu,\gamma_5\} = 0 \quad \text{s. Übung 10.c}$$

$$= \hat{d}'^+\gamma^0 P_R P_R\hat{d}'' = \hat{\bar{d}}'P_R\hat{d}'' \quad \text{((vgl. Übung, 34.6))}$$

$$= -h_u\frac{v}{\sqrt{2}}\left[\hat{\bar{u}}P_R\hat{u}'' + \hat{\bar{u}}''P_L\hat{u}\right] - h_d\frac{v}{\sqrt{2}}\left[\hat{\bar{d}}'P_R\hat{d}'' + \hat{\bar{d}}''P_L\hat{d}'\right] \quad + 2.+3.\ \text{Generation}$$

benutze jetzt die Freiheit der Definition von $\hat{u}''$, $\hat{d}''$:

wir legen fest, daß $\hat{u}, \hat{d}$ die "Masseneigenzustände" bezeichnen,

d.h. $\delta\hat{\mathcal{L}}\big|_{\text{quadratisch}}$ sollte diagonalisiert sein.

- $\hat{u}'' \equiv \hat{u} \Rightarrow \hat{\bar{u}}\left[P_R + P_L\right]\hat{u} = \hat{\bar{u}}\hat{u} \Rightarrow \delta\hat{\mathcal{L}} = -\boxed{\frac{h_u v}{\sqrt{2}}}\,\hat{\bar{u}}\hat{u}$

  ((etc für c, t Quarks)) Masse des Up-Quarks $\equiv m_u$

- für die d-Quarks ist die Diagonalisierung etwas komplizierter; müssen alle drei Generationen gleichzeitig betrachten.

  schreibe: $\begin{pmatrix}d'\\ s'\\ b'\end{pmatrix} = V\begin{pmatrix}d\\ s\\ b\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}d''\\ s''\\ b''\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}d\\ s\\ b\end{pmatrix}$

  mit V, U unitäre Matrizen

dann ist die untere Zeile von $\delta\hat{\mathcal{K}}$ / grad.

$$\delta\hat{\mathcal{K}} = -\frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\hat{\bar{d}}\\ \hat{\bar{s}}\\ \hat{\bar{b}}\end{pmatrix}\underbrace{V^\dagger\begin{pmatrix}h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b\end{pmatrix}U}_{\overset{!}{=}\,\mathrm{diag}(h_d,h_s,h_b)}P_R\begin{pmatrix}\hat{d}\\ \hat{s}\\ \hat{b}\end{pmatrix} - \frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\hat{\bar{d}}\\ \hat{\bar{s}}\\ \hat{\bar{b}}\end{pmatrix}\underbrace{U^\dagger\begin{pmatrix}h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b\end{pmatrix}V}_{\overset{!}{=}\,\mathrm{diag}(h_d,h_s,h_b)}P_L\begin{pmatrix}\hat{d}\\ \hat{s}\\ \hat{b}\end{pmatrix}$$

gleichzeitige Lsg : $U \equiv \begin{pmatrix}1/h_d & & \\ & 1/h_s & \\ & & 1/h_b\end{pmatrix}V\begin{pmatrix}h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b\end{pmatrix}$

V beliebig

$$= -\underbrace{\boxed{\frac{h_d v}{\sqrt{2}}}}_{\equiv m_d}\hat{\bar{d}}\hat{d} - \underbrace{\boxed{\frac{h_s v}{\sqrt{2}}}}_{\equiv m_s}\hat{\bar{s}}\hat{s} - \underbrace{\boxed{\frac{h_b v}{\sqrt{2}}}}_{\equiv m_b}\hat{\bar{b}}\hat{b}$$

CKM - Matrix

die Matrix V ist eine Verallgemeinerung der Cabibbo-Matrix (s.S.57), und wird Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) - Matrix genannt (1973). [Nobelpreis 2008]

schreibe: $V \equiv \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$

die Matrixelemente V_{ij} (($\in \mathbb{C}$, aber $V^\dagger V \overset{!}{=} \mathbb{1}$)) sind Parameter des SM ; können gemessen werden ; Resultat (vgl. PDG Booklet, S.169 ff) : $|V| \approx \begin{pmatrix} 0.97 & 0.23 & 0.004 \\ 0.23 & 0.97 & 0.04 \\ 0.01 & 0.04 & 0.999 \end{pmatrix}$

→ in der Natur ist V "fast diagonal" !

CP-Verletzung

Die CKM-Matrix hat etwas mit diesem wichtigen Phänomen zu tun. Erinnerung:

(Übg. Aufgabe 33): $|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overset{d\bar{s}}{|K^0\rangle} - \overset{s\bar{d}}{|\bar{K}^0\rangle}\right)$; $\hat{C}\hat{P}\,|K_S^0\rangle = +\,|K_S^0\rangle$

$|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\right)$; $\hat{C}\hat{P}\,|K_L^0\rangle = -\,|K_L^0\rangle$

(Skript, S.54): $\hat{C}\hat{P}\,|\pi^+\rangle|\pi^-\rangle = +\,|\pi^+\rangle|\pi^-\rangle$

$\hat{C}\hat{P}\,|\pi^0\rangle|\pi^+\rangle|\pi^-\rangle = -\,|\pi^0\rangle|\pi^+\rangle|\pi^-\rangle$

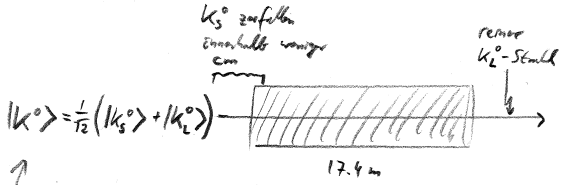
also sind die folgenden Zerfälle erlaubt:

$K_S^0 \to \pi^+\pi^-$ (PDG-Booklet: $\pi^+\pi^- \approx 69\%$) ; $\tau \approx 0.9\cdot 10^{-10}\,s$ ⇒ $c\tau \approx 2.7\,cm$

$K_L^0 \to \pi^0\pi^+\pi^-$ 13% ; $\tau \approx 5.1\cdot 10^{-8}\,s$ ⇒ $c\tau \approx 15.34\,m$

häufiger: $\pi e \nu$

Cronin + Fitch - Experiment (1964) → [Nobel-Preis 1980]



$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_S^0\rangle + |K_L^0\rangle\right)$

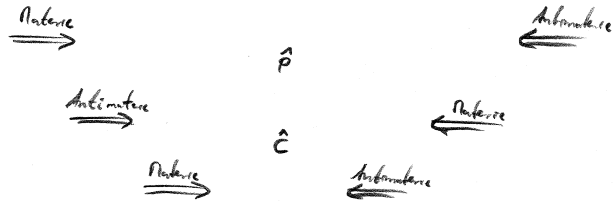
Beobachtung:
22700 Zerfälle
45 davon $\pi^+\pi^-$ oder $\pi^0\pi^0$

((erzeugt durch starke Ww, als EZ der Seltsamkeit ($K^0\bar{K}^0$);
Zerfall durch schwache Ww, als EZ von CP ; Analogon: Polarisation zur Darstellung nützlich))

⇒ d.h.: CP wird verletzt !!!
"$\cancel{CP}$"

→ also ist die Natur nicht spiegelsymmetrisch !

Relevanz: $\cancel{CP}$ ist wichtig, weil es somit einen grundsätzlichen Unterschied zwischen Materie + Antimaterie gibt!



wird CP verletzt, ist der untere Zustand ungleich dem oberen ; d.h. nach der Paarvernichtung kann es einen Rest geben !

→ wichtige Rolle in der Kosmologie (?!)

kann das SM CP-Verletzung beschreiben? JA!

- die CKM-Matrix hat i.A. komplexe Matrixelemente (vgl. Übg, A.50).
  - → die meisten davon können durch Phasendrehungen der Quark-Felder als reelle Zahlen undefiniert werden
  - → aber für drei Generationen bleibt mindestens eine Phase übrig.
  - → diese Phase führt zu $\not{CP}$ im SM.
- eigentlich hätten die Parameter h_u, h_d etc (vgl. S. 73) auch komplex sein können
  - → im Prinzip können diese Phasen wieder wegdefiniert werden (vgl. Übung, Aufgabe 52), durch sog. "chirale Transformationen"
  - → Bem.: in der QFT führen diese Transformationen zu Problemen ("Anomalien"; "starke CP-Verletzung")
  - → jedenfalls ist hier die zweite Möglichkeit zu $\not{CP}$ im SM.

weitere Terme in $\hat{\mathcal{L}}_{SM}$

haben nun die wichtigsten Mechanismen kennengelernt, wie den (S. 66/67) versprochen: $(W^\pm, Z^0, \gamma) \leftrightarrow H$, H-Dynamik, Qu. $\leftrightarrow$ H

in Analogie zur Yukawa (Qu-H) kann bekommen auch die Leptonen ihre Masse:

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = -h_1^e\left[\hat{\bar{L}}_{1L}\,\hat{\Phi}\,\hat{e}_R + \hat{\bar{e}}_R\,\hat{\Phi}^+\hat{L}_{1L}\right] + 2.+3.\ \text{Gen.}$$

jetzt wieder $\hat{\Phi} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$: $\xrightarrow{\text{SSB grad.}}$ $-\frac{h_1^e v}{\sqrt{2}}\left[\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L\right] + 2.+3.\ \text{Gen.}$

$L+R=1$, S. 5.73 $\equiv -m_e\,\bar{e}e + 2.+3.\ \text{Gen.}$

((und im Prinzip auch $\delta\hat{\mathcal{L}} = -h_1^\nu\left[\hat{\bar{L}}_{1L}\,\hat{\tilde{\Phi}}\,\hat{\nu}_R + h.c.\right] + \dots$)) aber ν_R nicht nötig

Zusammenfassung aller Terme $\hat{\mathcal{L}}_{SM} = \hat{\mathcal{L}}_{starke} + \hat{\mathcal{L}}_{elektroschwach}$

s. unten

$= \hat{\mathcal{L}}_{Eich} + \hat{\mathcal{L}}_{Higgs} + \hat{\mathcal{L}}_{Fer} + \hat{\mathcal{L}}_{Yuk}$

8. Ideen jenseits des SM

bisher gesehen: Struktur des SM beinhaltet einige willkürliche Festlegungen; es hat viele freie Parameter

Vereinfachungen möglich? → es gibt sicherlich viele Ideen.

hier: ein wichtiges Beispiel

Vereinheitlichung

die erste Teilchen-Generation (vgl. S. 65): $\begin{pmatrix}\nu\\e\end{pmatrix}_L\ e_R\ \begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}_L\ u_R\ d_R$

Anzahl der Freiheitsgrade: 3 Leptonen + $4\cdot 3$ Quarks ($N_c = 3$ Farben) $= 15$

die Kernidee (Georgi/Glashow '74): $15 = 5 + 10$

- bilde einen Spaltenvektor der SU(5) aus 5 Freiheitsgraden $(\nu_L, e_L, d_R\cdot 3)$
- bilde eine antisymm. 5x5-Matrix aus 10 Freiheitsgraden $(e_R, u_L\cdot 3, d_L\cdot 3, u_R\cdot 3)$

der Vorteil:

- haben statt 5 verschiedenen Strukturen nur 2
- haben statt 3 verschiedenen W's nur 1

dies nennt man "große Vereinheitlichung", "GUT"

↳ grand unified theories

Bem.:
- es gibt viele "größere" Eichgruppen, in deren Repräsentationen die Freiheitsgrade der SU(2) × U(1) untergebracht werden können; populär ist z.B. auch SO(10): 16 Freiheitsgrade, $15 + \underline{\underline{\nu_R}}$
- keine der vielen möglichen GUT's ist momentan universell akzeptiert; daher hier: weiter mit SU(5)

Was geschieht mit den Eichbosonen (Gluonen, $W^\pm, Z^0, \gamma$)?

$SU(N)$ hat N^2-1 Parameter $\rightarrow$ N^2-1 Generatoren T^a, $a = 1, \dots, N^2-1$

also $D_\mu = \partial_\mu - i g_{GUT} A^a_\mu T^a$

$\rightarrow$ 24 Vektorfelder A^a_μ für $N=5$

$\underbrace{8}_{(N_c^2-1)=3^2-1}$ Gluonen $+ 1 W^+ + 1 W^- + 1 Z^0 + 1 \gamma = 12$

$+ 12$ "X-Bosonen" $\left(\left(12 = 4 \cdot \underbrace{3}_{\text{Farben}},\ 4 \text{ Ladungen } \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{4}{3} \right)\right)$

neue Teilchen ?!

in der Natur (noch) nicht beobachtet

$\rightarrow$ m_X sehr groß!

Wie konnten die X-Bosonen eine so hohe Masse bekommen?

$\rightarrow$ SSB, genau wie bei $W^\pm, Z^0$?!

nicht ganz; wichtiger Unterschied:

- bei $SU(2)_L$ - Brechung bekommen alle Vektorbosonen eine Masse. dies nennt man "vollständige Symmetriebrechung".
- bei $SU(5)$ - Brechung müssen

Gluonen, Photon	masselos bleiben
$W^\pm, Z^0$	"kleine" Massen bekommen
X-Bosonen	"große" Massen bekommen

dies erfordert eine "partielle Symmetriebrechung"

erzielt soll, wenn das Higgs-Feld nicht als ein 5-komponentiger Spaltenvektor, sondern durch eine spurlose hermitesche 5x5-Matrix dargestellt wird

Wie unterscheidet man aber solch ein GUT-Modell vom SM?

$\rightarrow$ brauchen experimentell verifizierbare Konsequenzen!

(1) Vereinheitlichung der Eichkopplungen

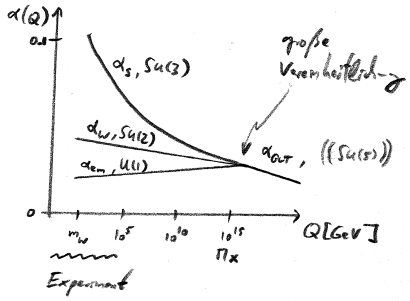
$\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$

haben anstelle von 3 Eichkopplungen ($\alpha_s, \alpha_w, \alpha_{em}$)

jetzt nur eine: α_{GUT}

bei niedrigen Energien: Sy. gebrochen

bei hohen Energien: Sy. sollte wiederhergestellt sein!



Bem.: die Vereinheitlichungs-Skala, $M_X \approx 10^5$ GeV, ist sehr groß!

Gravitationskraft $\sim \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$ $\Rightarrow$ kann sie bei solch kleinen Abständen immer noch vernachlässigt werden!

Abschätzung: Grav. ist wichtig, wenn Potential $\approx$ Ruhemasse

$\frac{\gamma M^2/r}{Mc^2} \approx 1$, $r \approx \frac{\hbar}{Mc}$ $\Rightarrow$ $M \approx \sqrt{\frac{\hbar c}{\gamma}} \approx 10^{19}$ GeV

"natürliche Längeneinheit" — Planck-Masse

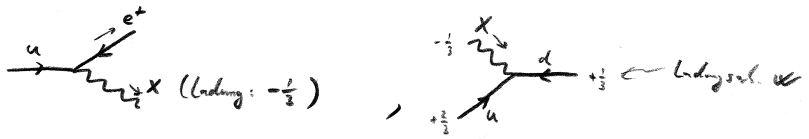
$\rightarrow$ Grav. ist wahrscheinlich immer noch ok.

man ist aber bei M_X schon "in der Nähe" der Planck-Masse.

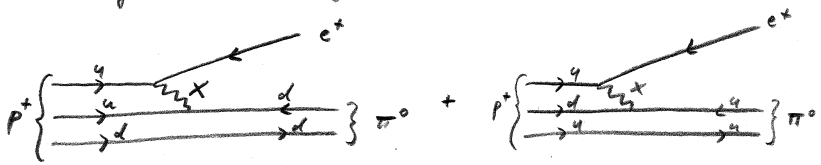
(2) Proton-Zerfall

sehr wichtige GUT-Vorhersage: Proton zerfällt!

Ursache: Quarks und Leptonen sind in gleichen Vektor; bekommen dann gleichartige Ströme durch X-Boson-Austausch:



dies führt zu der Möglichkeit $p^+ \to e^+ \pi^0$ ← LU($d\bar{d}, u\bar{u}$)



Abschätzung der Zerfallsrate für diesen Kanal: s. Übung, Aufg. 55

aber (PDG Booklet): Lebensdauer des Protons $\tau_p \gtrsim 10^{33}$ Jahre

→ man bekommt untere Grenze für m_X (vgl. Abbildung oben)

→ falls m_{GUT} also endlich ist, sollte dieser Zerfall eines Tages beobachtet werden!

(3) Neutrino-Massen

eine "fundamentale" Theorie muß renormierbar sein.

das gilt jetzt also für die GUT.

das SM ist jetzt eine "effektive Theorie" die nur bei niedrigen Energien die Natur genau beschreibt.

→ können in $\hat{\mathcal{L}}_{SM}$ auch 4-Vertices mit Fermionen, oder Vertices mit ≥ 5 Teilchen unterbringen, wenn diese Operatoren durch die große Skala m_{GUT} unterdrückt sind, so daß sie für $m_{GUT} \to \infty$ verschwinden.

→ wichtiges Bsp: $\delta\hat{\mathcal{L}} = -\frac{h_\nu^2}{m_{GUT}} \hat{L}_{1L} \hat{\tilde{\Phi}} \hat{\tilde{\Phi}}^\dagger \hat{L}_{1L}$ + 2. + 3. Generation

führt zu Massentermen für Neutrinos, s. unten

der obige Massenterm (mit $\hat{L}_{1L} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$) genügt noch nicht [da $\bar{\nu}_L \nu_L = 0$]. Es gibt aber einige Varianten dazu (s. z.b. [Cottingham/Greenwood, Kap. 19-21]) ...

Resultat: nach $\hat{\tilde{\Phi}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ bekommen Neutrinos eine Masse $m_\nu \sim \frac{h_\nu^2 v^2/2}{m_{GUT}}$

bisher kennen wir die leichtesten / schwersten Fermionmassen als $m_e = \frac{h_e v}{\sqrt{2}} \approx 0.5$ MeV, $m_t = \frac{h_t v}{\sqrt{2}} \approx 175$ GeV

Vermutung: h_ν sollte in diesem Bereich der Yukawakopplungen liegen, also $h_e \lesssim h_\nu \lesssim h_t$

aus Übung, Aufg. 55: $m_{GUT} \gtrsim 10^{15}$ GeV

also $\frac{(0.5\ \text{MeV})^2}{10^{15}\ \text{GeV}} \approx \frac{10^{11}\ \text{eV}^2}{10^{24}\ \text{eV}} \lesssim m_\nu \lesssim \frac{(175\ \text{GeV})^2}{10^{15}\ \text{GeV}} \approx \frac{10^{22}\ \text{eV}^2}{10^{24}\ \text{eV}}$

$$10^{-13}\ \text{eV} \lesssim m_\nu \lesssim 10^{-2}\ \text{eV}$$

Experimentelle Bestimmung der Neutrinomassen

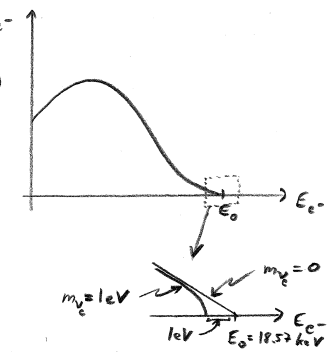
wie kann man so kleine Massen messen?

(a) direkt

Tritium β^--Zerfall ($\tau_{1/2} = 12.32$ Jahre)

$^3H \to {}^3He + e^- + \bar{\nu}_e$

sehr schwierige Messung!



Mainzer Experiment 1997-2001:

$m_{\nu_e} < 2.2$ eV

KATRIN (Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment) 2009 - ...

Ziel: $m_{\nu_e} < 0.2$ eV "präzisteste Waage der Welt"

(6) <u>indirekt</u>

<u>Massendifferenzen</u> sind leichter zu messen, da sie zu <u>Neutrino-Oszillationen</u> führen:

in Analogie zu den Quarks sind die in schwachen Wechselw. erzeugten ν's (falls massiv) LK's von Masseneigenzuständen.

(hier: betrachte der Einfachheit halber nur 2 Generationen)

schwache EZ $\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix} \nu_1' \\ \nu_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ Massen-EZ

Erzeugung von ν_i' durch schwache Wechselw.

Propagation als Massen-Eigenzustände ebene Wellen, $p_\mu = (E, \vec{p})$, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

Beobachtung durch schwache Wechselw. Distanz: L

betrachte z.B. Propagation eines ν_1'

$$|\nu_1'(t,L)\rangle = \cos\theta\, |\nu_1\rangle e^{-iEt + ip_1 L} + \sin\theta\, |\nu_2\rangle e^{-iEt + ip_2 L}$$

$$\langle \nu_2' | = -\sin\theta \langle \nu_1 | + \cos\theta \langle \nu_2 |$$

$$\Rightarrow \langle \nu_2' | \nu_1'(t,L)\rangle = \underbrace{\cos\theta \sin\theta}_{=\frac{1}{2}\sin(2\theta)} e^{-iEt} \underbrace{\left(e^{ip_2 L} - e^{ip_1 L}\right)}_{= e^{i(p_1+p_2)\frac{L}{2}} \underbrace{\left(e^{i(p_2-p_1)\frac{L}{2}} - e^{i(p_1-p_2)\frac{L}{2}}\right)}_{= 2i \sin\left((p_2-p_1)\frac{L}{2}\right)}}$$

$$= i \sin(2\theta)\, e^{-iEt}\, e^{i(p_1+p_2)\frac{L}{2}} \sin\left((p_2-p_1)\frac{L}{2}\right)$$

also ist die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang

$$P(1' \to 2') = |\langle \nu_2' | \nu_1'(t,L)\rangle|^2 = \sin^2(2\theta) \sin^2\left((p_2-p_1)\frac{L}{2}\right)$$

für $E \gg m_i$ ist $p_i = \sqrt{E^2 - m_i^2} \approx E - \frac{1}{2}\frac{m_i^2}{E} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{E^3}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{P(1' \to 2') = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\underbrace{\boxed{(m_1^2 - m_2^2)}}_{\equiv \Delta m^2} \frac{L}{4E}\right)}$$

setzen wir nun "typische" Einheiten in den 2. Sinus ein:

$$\frac{L}{4E}\Delta m^2 = \frac{L[\mathrm{km}]\ \Delta m^2[\mathrm{eV}^2]}{E[\mathrm{GeV}]} \underbrace{\frac{10^3\,\mathrm{m} \cdot 10^{-18}\,\mathrm{GeV}^2}{4 \cdot \mathrm{GeV}}}_{= \frac{1}{4}\,\mathrm{fm}\cdot\mathrm{GeV} \approx \frac{\pi}{4} \approx 1.25}$$

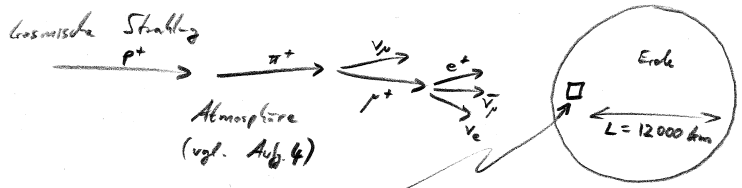
$\rightarrow$ eine Oszillation kann für $\frac{L}{4E}\Delta m^2 \sim 1$ beobachtet werden;

für $E \sim \mathrm{GeV}$ und $\Delta m \ll \mathrm{eV}$ braucht man also $L \gg \mathrm{km}$.

$\Rightarrow$ ~~große~~ Abstände nötig im Experiment!

mehrere Möglichkeiten:

(1) Atmosphärische Neutrinos



ν-Detektor Super-Kamiokande$_{96-}$ (in stillgelegter Mine, unter den japanischen Alpen; 50 000 Tonnen reines Wasser; Photomultiplier) 11200 Stück 0.5 m Durchmesser

ν-Nachweis über Streuung von geladenem Strom:

$\nu_\mu + N \to \mu + N$, $\nu_e + N \to e + N$

geladenes Lepton nachweisbar (Photonen; Cherenkov-Strahlung)

atmosphärische ν's werden auf allen Seiten der Erde erzeugt!

man findet aber: $\frac{\text{Fluß von } \nu_\mu \text{ nach oben}}{\text{" unten}} = 0.54 \pm 0.04$

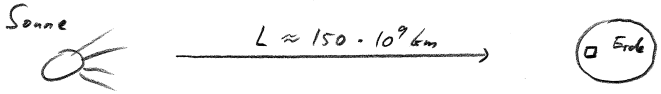
hier: $E \approx$ einige GeV; $L \approx 12\,000$ km

Interpretation: $\nu_\mu \to \nu_\tau$ Oszillation

$$|m_{\nu_\mu}^2 - m_{\nu_\tau}^2| \approx (2 \pm 1) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{eV}^2$$

$$\sin^2\theta_{\mu\tau} > 0.9$$

(2) Sonnen-Neutrinos



Stern der "Hauptreihe"
verbrennt Wasserstoff : Fusion

SNO (Sudbury Neutrino Observatory)
Kanada, '99-

$4p^+ + 2e^- \to {}^4He^{++} + 2\nu_e + 26.1$ MeV

${}^8B \to 2\,{}^4He + e^+ + \nu_e$

brauchen ν-Fluss an der Quelle (= Kern der Sonne)

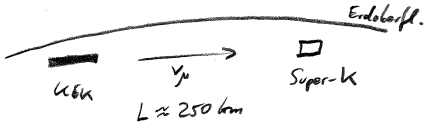
→ "SSM" solar standard model [Bahcall et al, 1963-2005]

→ $E_\nu \sim 0.01 - 10$ MeV ; nur ν_e werden erzeugt

Messung: $\dfrac{\text{Fluss}(\nu_e)}{\text{Fluss}(\nu_e+\nu_\mu+\nu_\tau)} \approx 0.31 \pm 0.03$

Interpretation: $|m_{\nu_e}^2 - m_{\nu_\mu}^2|$ oder $|m_{\nu_e}^2 - m_{\nu_\tau}^2| \approx (7\pm3)\cdot 10^{-5}\,\text{eV}^2$

(3) Beschleuniger-Neutrinos



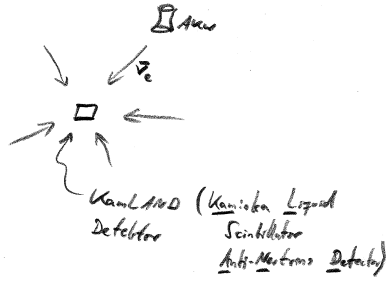
Distanz kleiner als bei (1), also verschwinden weniger als 50% der ν_μ, aber man kann E_ν kontrollieren!

→ viele ähnliche Experimente, z.B. CERN → Gran Sasso (Italien, 730 km)
Tevatron → Soudan (USA, 735 km)

(4) Reaktor-Neutrinos

Japan: ~ 50 Kernkraftwerke
Leistungen genau bekannt
ca. 20% der Energie
verschwindet als $\bar{\nu}_e$

Ergebnisse: stimmen mit (2) überein.



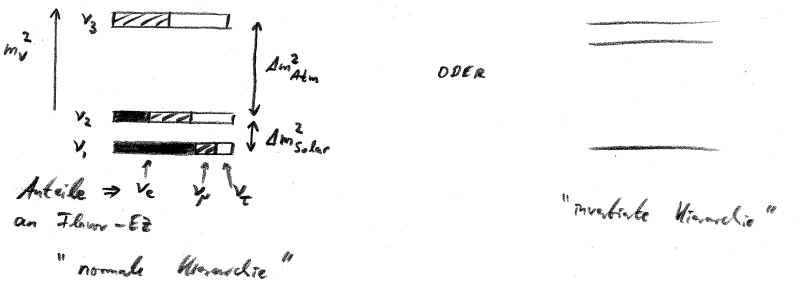
1000 Tonnen Scintillations-Flüssigkeit
1879 Photomultiplier, 0.5m ⌀

Neutrino-Fazit:

direkte Messung von m_ν sehr schwer:
bisher nur obere Schranken, z.B. $m_{\nu_e} \leq 2.2$ eV
evtl Erkenntnisse aus Kosmologie / Astroteilchenphysik nützlich,
z.B. $\sum_i m_{\nu_i} < 45$ eV (s. z.B. [Fayyazuddin, Introd. To Particle Physics])

Messung von Massendifferenzen durch ν-Oszillation

es ergibt sich das folgende Bild für die Massenzustände ν_i



über die Mischungsmatrix weiß man (momentan) auch erst sehr wenig; für $\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\end{pmatrix} = U \begin{pmatrix}\nu_e\\ \nu_\mu\\ \nu_\tau\end{pmatrix}$ sind $|U_{ij}|$ oben skizziert.
Jedenfalls ist sie (im Ggs. zu V_{CKM}) überhaupt nicht ≈ diagonal
(s. z.B. [Griffiths, §11.5])

interessante Variation: es ist (noch) nicht klar,

ob U mit 3 Mischungswinkeln und 1 Phase (wie V_{CKM})

oder " " 3 Phasen

parametrisiert werden muß; im zweiten Fall: $U \sim V_{CKM} \cdot \mathrm{diag}(e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, 1)$

wobei α_1, α_2 zusätzliche CP-verletzende Phasen sind,

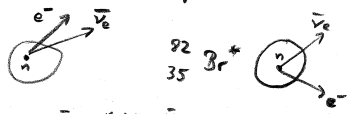
und für $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ die Neutrinos "Majorana"-Teilchen sind,

also ihre eigenen Antiteilchen: $\bar{\nu} = \nu$

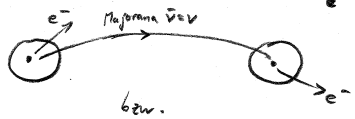
Um zu entscheiden, ob $\bar{\nu} = \nu$ ist, kann man nach

"neutrinolosem doppelten Betazerfall" experimentell suchen

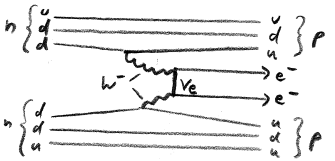
z.B.: $^{82}_{34}Se$ $\bar{\nu}_e$ $^{82}_{35}Br^*$ $\bar{\nu}_e$ $^{82}_{36}Kr$: $2e^- + 2\bar{\nu}_e$



vs. : $2e^- + 0\nu$



bzw.



→ mehrere Experimente, z.B. Heidelberg-Moskau: $m_{\beta\beta} \approx 0.2 - 0.5$ eV (sehr umstritten...)

viele andere in Planung / Bau

→ Zerfallsrate $\Gamma \sim |\underbrace{m_i U_{ei}}_{\equiv m_{\beta\beta}}|^2$

9. Zusammenfassung SM

lokale Eichtheorie, $SU(3)_{Color} \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ← Hyperladung

$$\hat{\mathcal{L}}_{SM} = \hat{\mathcal{L}}_{stark} + \hat{\mathcal{L}}_{elektroschwach}$$

$$= \hat{\mathcal{L}}_{stark} + \hat{\mathcal{L}}_{Eich} + \hat{\mathcal{L}}_{Higgs} + \hat{\mathcal{L}}_{Fer} + \hat{\mathcal{L}}_{Yukawa} \qquad \text{(vgl. S. 76)}$$

① $\mathcal{L}_{stark}$ QCD SU(3)

$$= -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \sum_q \bar{q}_\alpha i\gamma^\mu \left[\partial_\mu \delta_{\alpha\beta} + \frac{ig_s}{2} \lambda^a_{\alpha\beta} G^a_\mu\right] q_\beta$$

starke Eichkopplung

$q \in \{u, d, c, s, t, b\}$ Farbe: $\alpha \in \{r, b, g\}$

Gluonfelder, $a = 1..8$ ← 3²-1

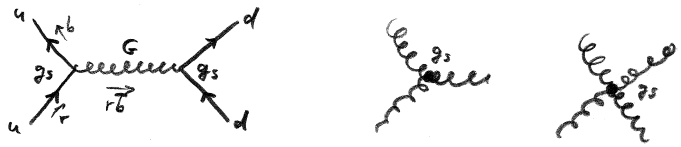
(Gluon-)Feldstärketensor, $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g_s f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu$

↑ Zahlen, s.u.

SU(3) Matrizen $\lambda^{1..3} = \begin{pmatrix} \sigma^{1..3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda^{4..5} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{1..2} & 0 \\ \sigma^{1..2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda^{6..7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{1..2} \\ 0 & \sigma^{1..2} & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $[\lambda^a, \lambda^b] = 2i f^{abc} \lambda^c$

z.B.



Farbladung der Quarks gemischt

Wir ist diagonal in Quark-(Massen-)Eigenzuständen

Kopplung $\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}$

(vgl. Ü 31)

② $\mathcal{L}_{Eich} = -\frac{1}{4} \underbrace{A^i_{\mu\nu}}_{} A^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} \underbrace{B_{\mu\nu}}_{} B^{\mu\nu}$

Struktur: $[A^2, A^3, A^4]$

$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ ← $U(1)$ Eichfeld

$A^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu - g_w \varepsilon^{ijk} A^j_\mu A^k_\nu$ ← $SU(2)$ Eichkopplung

$SU(2)$ Eichfeld, $i = 1..3$ ((später: $B + A^3$ mischen zu γ, Z^0))

③ $\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu \Phi)^+ (D^\mu \Phi) - V(\Phi)$, $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ komplexes Skalarfeld

$[A^2, A^2 H, H^2, H^3, H^4]$

$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i g_w}{2} \sigma^i A^i_\mu - i g_Y Q_Y B_\mu$

← Hyperladung ; $Q_Y = -\frac{1}{2}$ für Φ

← $U(1)$ Eichkopplung

Higgs-Potential $V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda (\Phi^+ \Phi)^2$

$\mu^2 > 0, \lambda > 0 \Rightarrow$ SSB

④ $\mathcal{L}_{Fer} = \sum_{i=1}^{3} \Big\{ \bar{Q}'_{iL}\, i\gamma^\mu \big[\partial_\mu - \frac{i g_w}{2} \vec{\sigma} \vec{A}_\mu - i g_Y (-\frac{1}{6}) B_\mu \big] Q'_{iL}$

$[f^2, f^2 A]$ Generationen

$+ \bar{L}'_{iL}\, i\gamma^\mu \big[\partial_\mu - \frac{i g_w}{2} \vec{\sigma} \vec{A}_\mu - i g_Y (\frac{1}{2}) B_\mu \big] L'_{iL}$

$+ \sum_{\ell_i} \bar{\ell}''_{iR}\, i\gamma^\mu \big[\partial_\mu - i g_Y Q_Y^{\ell} B_\mu \big] \ell''_{iR} \Big\}$

← $\ell_i \in \{u_i, d_i, e_i, (\nu_i)\}$; $Q_Y^{\ell_i} = \{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0\}$

mit $Q'_{iL} = \begin{pmatrix} u'_i \\ d'_i \end{pmatrix}_L$, $L'_{iL} = \begin{pmatrix} \nu'_i \\ e'_i \end{pmatrix}_L$

Quark-Farb-Indizes hier unterdrückt: alles diagonal ⇒ $\sum_\alpha$

⑤ $\mathcal{L}_{Yukawa} = -\sum_{i,j=1}^{3} \Big\{ \Gamma^u_{ij}\, \bar{Q}'_{iL} \tilde{\Phi}\, u''_{jR} + \Gamma^d_{ij}\, \bar{Q}_{iL} \Phi\, d''_{jR}$

$[f^2, f^2 H]$ Generationen

$+ \Gamma^\nu_{ij}\, \bar{L}'_{iL} \tilde{\Phi}\, \nu''_{jR} \Big) + \Gamma^e_{ij}\, \bar{L}'_{iL} \Phi\, e''_{jR} \Big\} + h.c.$

mit $\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ \phi^{+*} \end{pmatrix} = i\sigma^2 \Phi^*$

$\mathcal{L}_{SM}$ ist nun spezifiziert.

müssen nun etwas "Buchhaltung" betreiben:

SSB im Higgs-Sektor → Massenterme

Identifikation der Massen-Eigenzustände → Mischungsmatrizen

Erinnerung: (s.S.71) SSB,

, $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 + \phi_2 + i\phi_1 \\ v + \phi_0 - i\phi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\vec{\sigma}\vec{\phi}}{v}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \phi_0 \end{pmatrix}$

$\to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$ "unitäre Eichung"

③' $\Rightarrow \mathcal{L}_{Higgs} = m_w^2 W^{+\mu} W^-_\mu \left(1 + \frac{H}{v}\right)^2 + \frac{1}{2} m_z^2 Z^\mu Z_\mu \left(1 + \frac{H}{v}\right)^2 + 0 \cdot Q^\mu Q_\mu$

$+ \frac{1}{2} (\partial_\mu H)(\partial^\mu H) - \Big[-\frac{1}{4} \lambda v^4 + \frac{1}{2} m_H^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4 \Big]$

← Minimum des Higgs-Potentials, Konstante. irrelevant im SM; problematisch mit Gravitation! (("kosmologische Konstante", aber viel größer und mit anderen Vorzeichen als Beobachtet))

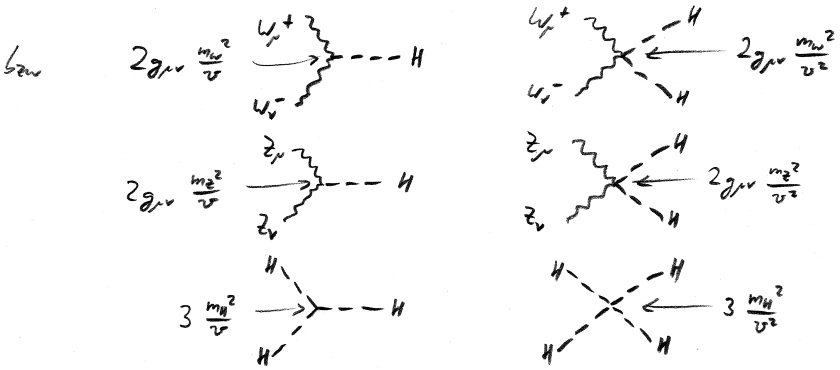
wobei $W^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (A^1 \mp i A^2)$, $Z \equiv \sin(\theta_w) B + \cos(\theta_w) A^3$

Photon $Q \equiv \cos(\theta_w) B - \sin(\theta_w) A^3$

schwacher Mischungswinkel $\tan(\theta_w) = \frac{g_Y}{g_w} \Rightarrow \sin^2\theta_w = 1 - \frac{m_w^2}{m_z^2}$

$m_w = \frac{g_w v}{2}$, $m_z = \frac{\sqrt{g_w^2 + g_Y^2}\, v}{2} = \frac{m_w}{\cos(\theta_w)}$

bzw

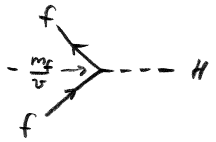


⑤' $\Rightarrow \mathcal{L}_{Yukawa} = -\sum_f m_f \bar{\psi}_f \psi_f \left(1 + \frac{H}{v}\right)$

Fermionen — Massen-Eigenzustände der Fermionen

Erinnerung: benötigt wurden 3×3 Mischungsmatrizen zur Diagonalisierung, vgl. S. 73/74

bzw.



Fermionen koppeln an Higgs mit Stärke $\frac{m_f}{v} = \frac{g_w m_f}{2 m_W}$

→ sehr schwache Kopplung, bis auf Top-Quark + Higgs!

④'$_a$ $\Rightarrow \mathcal{L}_{Fer} \ni \mathcal{L}_{geld.\,Strom} = -\frac{g_w}{\sqrt{2}}\left[J_+^\mu W_\mu^- + (J_+^\mu)^+ W_\mu^+\right]$

geladener Strom (vgl. S. 59)

$= \sum_D \bar{D}_L \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_L$, $D_L \in \{Q'_{iL}, L'_{iL}\}$, $i = 1..3$ ← Gen.

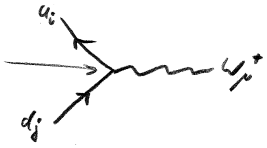
falls ν masse, Dirac

$= (\bar{u}\,\bar{c}\,\bar{t})\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} + (\bar{\nu}_e\,\bar{\nu}_\mu\,\bar{\nu}_\tau)\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} V_\ell \begin{pmatrix} e^- \\ \mu^- \\ \tau^- \end{pmatrix}$

(V-A)-Form

$= \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$, $|V_{CKM}| \approx \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \approx \sin\theta_c \approx 0.22$

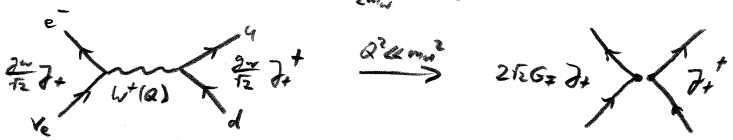
bzw. $\frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} V_{ij}^{CKM}$



Bem.: Im Limes $Q^2 \ll m_W^2$ erhält man das Fermi-Modell (vgl. S. 57):

$\mathcal{L}^{eff.}_{gel.\,Strom} = -\boxed{2\sqrt{2}G_F} J_+^\mu (J_{+\mu})^+$

$= \frac{g_w^2}{2m_W^2} = \frac{2}{v^2}$



④'$_b$ $\Rightarrow \mathcal{L}_{Fer} \ni \mathcal{L}_{QED} = -e J^\mu_{em.} Q_\mu$

$= \frac{g_w g_Y}{\sqrt{g_w^2 + g_Y^2}} = g_Y \cos\theta_w = g_w \sin\theta_w$

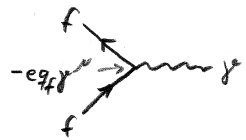
Photon $= \cos\theta_w B_\mu - \sin\theta_w A_\mu^3$

el. mag. Strom $= \sum_{i=1}^{3} \left\{ \frac{2}{3}\bar{u}_i \gamma^\mu u_i - \frac{1}{3}\bar{d}_i \gamma^\mu d_i - \bar{e}_i \gamma^\mu e_i \right\}$

Generationen

hat dieselbe Form für schwache und Massen-EZ ((da die mischenden Fermionen die gleiche Ladung haben))

bzw.



, eq_f = Ladung von f

④'$_c$ $\Rightarrow \mathcal{L}_{Fer} \ni \mathcal{L}_{neutr.\,Strom} = -\frac{g_w}{2\cos\theta_w} J_0^\mu Z_\mu$

$\sin\theta_w B_\mu + \cos\theta_w A_\mu^3$

neutraler Strom (vgl. S. 60)

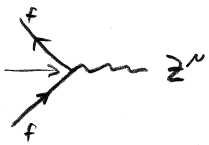
$= \sum_D \bar{D}_L \begin{pmatrix} \gamma^\mu(c_V^u + c_A^u\gamma^5) & 0 \\ 0 & \gamma^\mu(c_V^d + c_A^d\gamma^5) \end{pmatrix} D_L$

$= \sum_{i=1}^{3} \left\{ \bar{u}_{iL}\gamma^\mu u_{iL} - \bar{d}_{iL}\gamma^\mu d_{iL} + \bar{\nu}_{iL}\gamma^\mu \nu_{iL} - \bar{e}_{iL}\gamma^\mu e_{iL} \right\}$

$- 2\sin^2\theta_w J^\mu_{em.}$

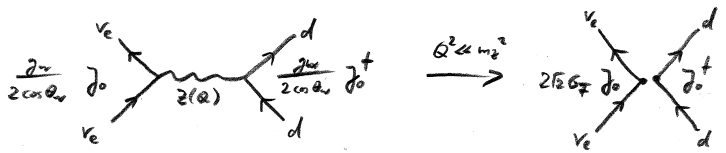
hat wieder dieselbe Form für schwache und Massen-EZ

bzw.



$-\frac{g_w}{2\cos\theta_w}\gamma^\mu(c_V^f + c_A^f\gamma^5)$

Bem.: wieder $Q^2 \ll m_Z^2 \Rightarrow \mathcal{L}^{eff.}_{neutr.\,Strom} = -2\sqrt{2}G_F J_0^\mu (J_{0\mu})^+$

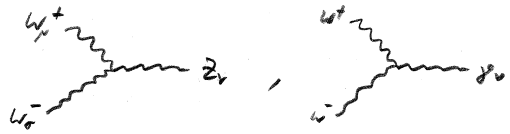


(($\frac{g_w^2}{4\cos^2\theta_w m_Z^2} = \frac{g_w^2}{4m_W^2} = \sqrt{2}G_F$; Faktor 2 ?))

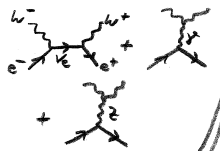
$$②'_a \Rightarrow \mathcal{L}_{Eich} \ni \mathcal{L}_{A^3} = -ig_w \Big\{ (\partial_\mu A^3_\nu) W^+_\rho W^-_\sigma + A^3_\mu (\partial_\nu W^+_\rho) W^-_\sigma + A^3_\mu W^+_\rho (\partial_\nu W^-_\sigma) \Big\} \left[g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{14} g^{23} \right]$$

$$A^3_\mu = \cos\theta_w \, Z_\mu - \sin\theta_w \, Q_\mu$$

bzw.

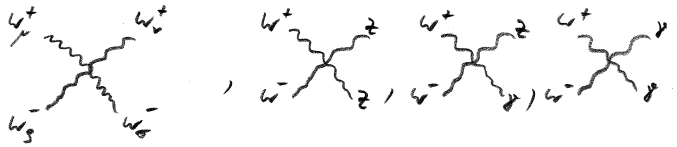


(wichtiger Prozess bei LEP: $e^+e^- \to W^+W^-$)



$$②'_b \Rightarrow \mathcal{L}_{Eich} \ni \mathcal{L}_{A^4} = \frac{g_w^2}{4} \Big\{ W^+_\mu W^+_\nu W^-_\rho W^-_\sigma - 2 W^+_1 W^-_2 A^3_3 A^3_4 \Big\} * \left[2 g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{13} g^{24} - g^{14} g^{23} \right]$$

bzw.



→ haben nun alle W_w-Terme explizit aufgeschrieben.

was bleibt? restliche quadratische Terme: ((in "Feynman-Eichung", $\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$))

- $②'_c \Rightarrow \mathcal{L}_{Eich,A^2} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu)(\partial^\mu W^-_\nu - \partial^\nu W^-_\mu) - \frac{1}{2}(\partial_\mu Q_\nu)^2$
- $④'_d \Rightarrow \mathcal{L}_{Fer,f^2} = \sum_f \bar{\psi}_f \, i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_f$

→ freie Parameter des SM: messen! (s. PDG); verstehen?? (s. BSM)

wir können sie hier zumindest zählen:

(3 Teilchen-Generationen)

2	:	g_s, θ ; 2 Parameter der starken WW
$3\cdot(2+1)$	:	m_u, m_d, m_e + 2.+3. Gen. ; 9 Fermion-Massen
4	:	g_w, g_Y, v, λ ; 4 Kopplungen aus elektroschwach + Higgs Sektor
$(3-1)^2$	:	4 Parameter in V_{CKM}
$3\cdot 1$	:	m_{ν_e} + 2.+3. Gen ; 3 Neutrino-Massen
$(3-1)^2$	:	4 Parameter in V_ℓ ((falls Majorana: +2 Phasen))
26		zuviele ?!↯ (beschreibt tausende hochpräzise Experimente!)

... und jetzt?

Ausblicke / Herausforderungen / offene Fragen

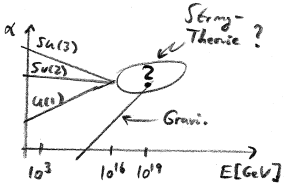
- Majorana ($\bar{\nu} = \nu$) vs. Dirac-Neutrinos?
  → experimentell beantworten! $0\nu 2\beta$-Zerfall; selten: $\tau \sim 10^{26}$ Jahre
- SUSY (Supersymmetrie)?
  theor. Argument: Teilchenmassen ändern sich durch Schleifen-Quantenkorrekturen
  Skalarfeld (Higgs): $m_H \xrightarrow{\text{Schleifen}} 10^{16}$ GeV ?! H---$\overset{t}{\bigcirc}$---H
  fordere Symmetrie! Bos ↔ Fer, H---$\bigcirc$---H ($\tilde{t} \sim$ "stop") } Summe = 0
- (Kein) Higgs? $\Delta\hat{\mathcal{L}}_{SM}$? GUT-, SUSY-, ...-Teilchen entdecken?

aktuell: SLAC (USA), KEK (Japan): B-Physik
Fermilab (USA): 1+1 TeV $p+\bar{p}$; Higgs-Suche
Brookhaven (USA): $\frac{100\,\text{GeV}}{\text{Nukleon}}$ Au+Au; QCD-Materie

fast fertig: LHC (CERN, Sui.): 7+7 TeV $p+p$; 3+3 $\frac{\text{TeV}}{\text{Nukleon}}$ Pb+Pb; Ø 8.5 km

zukünftig (?): ILC [International Linear Collider]: 1 TeV e^+e^-, Länge 30 km
VLHC [Very Large Hadron Collider]: 60 TeV $p+p$, Ø 20 km
Myon-Collider, $\mu^+\mu^-$ @ 1 TeV
...

- BSM. woher kommen die 4 Kräfte?
  warum sehen wir die verschiedenen Teilchen?
  woher kommen deren Massen und Ladungen?
  warum leben wir in 4D?
  was ist die Struktur von Raumzeit + Gravi.?



- Gravi-Expt.: Gravitations-Wellen! z.B. LISA (NASA, ESA), ≳ 2018 [Shuttle?]
  (5 Mkm Interferometer

[Vorlesung: WS] ↓

- Kosmologie / Astroteilchenphysik
  "Kosmol. Standard-Modell" ((konsistente Beschreibung aller Beobachtungsdaten))

Energie-/Massen-Dichte des Universums:
- ≈ 5% "normale" Materie
- ≈ 25% "dunkle" Materie ← "sieht" man nur via Gravi.; ν's: ≲ 1%; → WIMPs? Neutralinos? (SUSY)
- ≈ 70% "dunkle Energie"

wie geht es konkret weiter?

- Theorie: Quantenfeldtheorie! [Vorlesung: SS]
- Teilchenphysik-Prüfungen: Termin mit VS absprechen
  (9.2. - 20.3.
  2.4. - 9.4.
  PDG-Booklet mitbringen
- BA-Arbeiten