

Anwendung: Mott- und Rutherford-Formel

$$m_\mu \approx 106 \text{ MeV} \gg m_e \approx 0.511 \text{ MeV}$$

→ betrachte den Grenzwert $m_\mu \rightarrow \infty$

((CMS $\approx$ Labor-system ; das Nukon ruht, Rückstoß vernachlässigbar))



$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1), \quad p_2 = (E_2, -\vec{p}_1) = m_\mu \left(\sqrt{1 + \frac{\vec{p}_1^2}{m_\mu^2}}, -\frac{\vec{p}_1}{m_\mu} \right) \approx (m_\mu, \vec{0})$$

$$q_1 = (E_1, \vec{q}_1), \quad q_2 = (E_2, -\vec{q}_1) = m_\mu \left(\sqrt{1 + \frac{\vec{q}_1^2}{m_\mu^2}}, -\frac{\vec{q}_1}{m_\mu} \right) \approx (m_\mu, \vec{0})$$

$$E\text{-Erhaltung: } E_1 + m_\mu + O\left(\frac{1}{m_\mu}\right) = E_1 + m_\mu + O\left(\frac{1}{m_\mu}\right) \Rightarrow \vec{q}_1^2 = \vec{p}_1^2$$

nach Ausführung der Phasenraumintegration hatten wir (S.S. 32)

$$\text{erhalten: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{q}_1|} \frac{|M|^2}{(E_1 + E_2)^2} = 1 \text{ wegen } E\text{-Erhaltung}$$

nun das Ergebnis für $\langle |M|^2 \rangle$ von S.39 einsetzen

$$\text{hier: } (q_1 - p_1)^2 = (E_1 - E_1)^2 - (\vec{q}_1 - \vec{p}_1)^2 = -2\vec{q}_1^2(1 - \cos\theta) = -4\vec{q}_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$q_1 \cdot q_2 = p_1 \cdot p_2 = q_1 \cdot p_2 = q_2 \cdot p_1 = m_\mu E_1$$

$$q_1 \cdot p_1 = E_1 E_1 - \vec{q}_1 \cdot \vec{p}_1 = m_e^2 + \vec{q}_1^2 - \vec{q}_1^2 \cos\theta = m_e^2 + 2\vec{q}_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$q_2 \cdot p_2 = m_\mu^2$$

$$E_1 + E_2 = m_\mu \left(\sqrt{\frac{m_e^2 + \vec{q}_1^2}{m_\mu^2}} + 1 \right) \approx m_\mu + O\left(\frac{1}{m_\mu}\right)$$

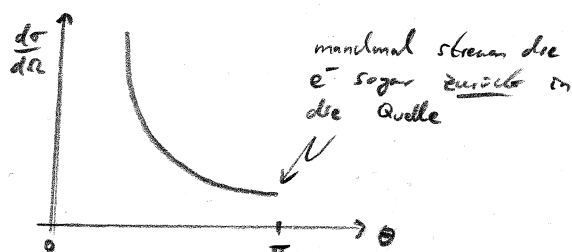
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{1}{m_\mu^2} \frac{e^4}{(-4\vec{q}_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2} \left(2m_e^2 m_\mu^2 + 2m_\mu^2 \vec{q}_1^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \left(\frac{\alpha_{\text{EM}}}{2\vec{q}_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \left(m_e^2 + \vec{q}_1^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{"Mott-Formel"} \end{aligned}$$

Bem: • ist gute Näherung für e-p-Streuung, da $m_p \approx 938 \text{ MeV} \gg m_e$

falls das Elektron nichtrelativistisch ist (also $|\vec{q}_1| = m_e v \ll m_e$),

ergibt sich die "Rutherford-Formel":

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha_{\text{EM}}}{2m_e v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2$$



5. Starke Wechselwirkungen, Quantenchromodynamik (QCD)

Im letzten Kapitel: QED, Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkungen
 konvergiert sehr gut ($\alpha_{em} \approx \frac{1}{137}$)
 experimentell extrem genau verifiziert (z.B. μ_e)
 → "langweilig"

jetzt: komplexere Wechselwirkungen
 viele verschiedene Näherungsmethoden, neue Begriffe
 → "interessant"

Behandlung hier jedoch nur qualitativ.

QED $\hat{=}$ Wechselwirkungen T.; Vermittlung: Photonen; Stärke: $g_e = \sqrt{4\pi\alpha_{em}}$

QCD $\hat{=}$ Wechselwirkungen T.; Vermittlung: Gluonen; Stärke: $g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s}$
 ← Farb-Einheitsladung

Einheitsladung: e (Positron)

Quarkmodell

historisch: 1959-64; Gell-Mann, Ne'eman, Zweig

siehe [D.W. Greenberg, Am. J. Phys. 50 (1982) 1074]

leichte Quarks: u ($m \approx 2 \text{ MeV}$), d ($\approx 5 \text{ MeV}$), s ($\approx 100 \text{ MeV}$)

schwere Quarks: c ($m \approx 1.25 \text{ GeV}$), b ($\approx 4.2 \text{ GeV}$), t ($\approx 174 \text{ GeV}$)

durch Beobachtung der leichtesten Mesonen (Resonanzen mit $S_{pm} \ j=0,1,\dots$

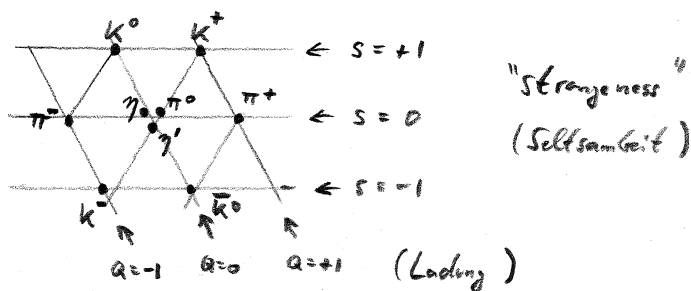
bzw. Baryonen mit $S_{pm} \ j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$) kann man etwas über die leichten Quarks erfahren!

Klassifizierung durch Gell-Mann ("das Periodensystem der Teilchenphysik")

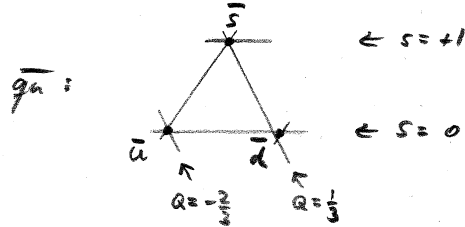
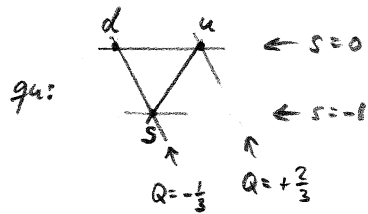
$j=0$ - Resonanzen:

"das achtfache Weg"

(η' schwerer als andere 8)



Systematik: Meson = Quark + Antiquark



alle Kombinationen $\Rightarrow 3 \cdot 3 = 9$ Mesonen!

[Gruppentheorie: $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$, $1 \equiv \eta'$]

funktioniert nicht nur für Spin-0 ($\uparrow\downarrow$, s.o.)

sondern auch für Spin-1 Mesonen ($\uparrow\uparrow$), Spin- $\frac{1}{2}$ Baryonen ($\uparrow\uparrow\downarrow$),
Spin- $\frac{3}{2}$ Baryonen ($\uparrow\uparrow\uparrow$)

Bestätigung des Quarkmodells: experimentell!

es "fehlte" eine Ecke im Baryonendekuplett (das Ω^- , sss).

1964 experimentell entdeckt.

((vgl. Mendelejew: es "fehlten" Gallium, Scandium, Germanium im
seinem Periodensystem $\rightarrow$ Vorhersage!))

Fragen • warum sieht man keine freien Quarks?

• steht z.B. sss nicht im Widerspruch zum Pauli-Prinzip?

$\rightarrow$ neue Eigenschaft: Farbe.

Quarks haben drei Farben / Antifarben (nehmen wir rot/grün/blau
als freie Teilchen treten nur farblose Kombinationen auf
(nehmen wir $r, g, b / \bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$)

dies ist Hypothese! Braucht wieder experimentelle Bestätigung.

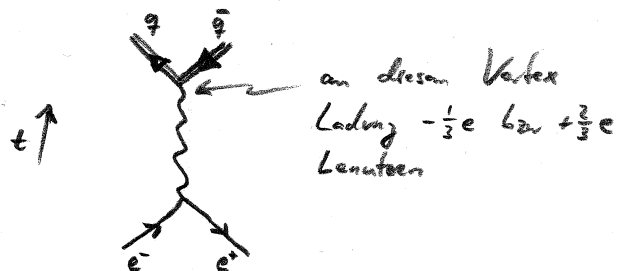
$\rightarrow$ studiere innere Struktur der Hadronen.

Hadronerzeugung in e^+e^- -Kollisionen

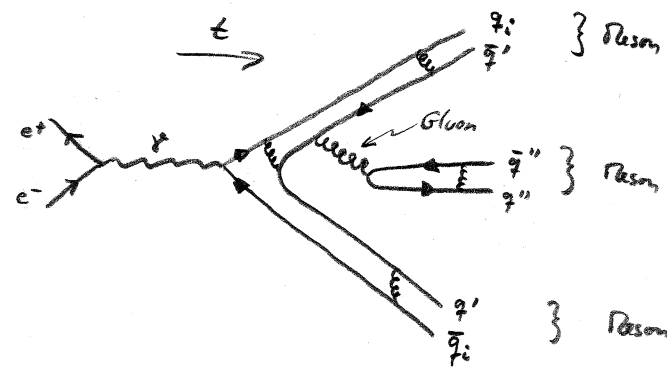
Quarks sind (el-) geladen (s.o.)

$\rightarrow$ Spüren em. WW, $\hat{= QED}$

Idee: $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow q\bar{q}$



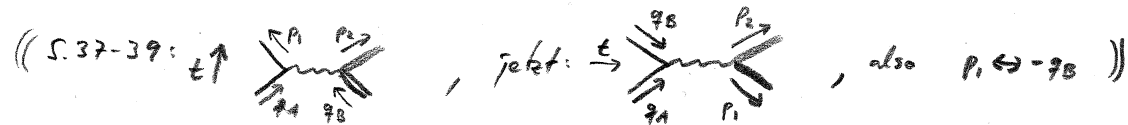
generell:
[z.B. SLAC, LEP]



Können die erste Stufe dieses Prozesses mit den QED-Regeln aus Kapitel 4 berechnen, analog zu " $e^+ + e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ ":

Wähle CMS, $E \equiv$ Energie des einl. e^-

$Q_i \equiv$ Ladung des q_i (in Einheiten von e), $m_i \equiv$ Masse des q_i



$$\Rightarrow \langle |M|^2 \rangle \stackrel{(S.39)}{=} \sum_{\text{Farben, Flavours } i} \frac{8 Q_i^2 e^4}{(q_1 + q_2)^4} \left\{ q_1 p_1 q_2 p_2 + q_1 p_2 q_2 p_1 + m_i^2 q_1 q_2 + m_i^2 p_1 p_2 + 2 m_e^2 m_i^2 \right\}$$

CMS: $\vec{q}_2 = -\vec{q}_1, \vec{p}_2 = -\vec{p}_1$

E-Erhaltung: $2E = E_1 + E_2 = 2E, \Rightarrow E_1 = E_2 = E, \Rightarrow E_1 = E_2 = E$
 $\vec{q}_1^2 + m_e^2 = \vec{p}_1^2 + m_i^2$

$$= \sum \frac{8 Q_i^2 e^4}{(2E)^4} \left\{ (E^2 - \vec{q}_1 \cdot \vec{p}_1)^2 + (E^2 + \vec{q}_1 \cdot \vec{p}_1)^2 + m_i^2 (E^2 + \vec{q}_1^2) + m_e^2 (E^2 + \vec{p}_1^2) + 2 m_e^2 m_i^2 \right\}$$

$$= \sum \frac{Q_i^2 e^4}{E^4} \left\{ E^4 + m_e^2 E^2 + m_i^2 E^2 + (E^2 - m_e^2)(E^2 - m_i^2) \cos^2 \theta \right\}$$

$\leftarrow \propto \vec{q}_1 \cdot \vec{p}_1$

also folgt insgesamt für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \underbrace{\frac{1}{(8\pi)^2} \frac{\sqrt{E^2 - m_i^2}}{\sqrt{E^2 - m_e^2}}}_{= \int_{-1}^1 du, u = \cos \theta} \frac{\langle |M|^2 \rangle}{(2E)^2} \Theta(E - m_i)$$

$$= \sum_{\text{Farben, Flavours } i} \frac{\pi}{3} \frac{Q_i^2 \alpha_{\text{EM}}^2}{E^2} \frac{\sqrt{1 - m_i^2/E^2}}{\sqrt{1 - m_e^2/E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_e^2}{E^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{E^2} \right) \Theta(E - m_i)$$

$$\approx N_c \cdot \sum_i Q_i^2 \cdot \frac{\pi}{3} \left(\frac{\alpha_{\text{EM}}}{E} \right)^2 \quad \text{für } E \gg m_i \gg m_e$$

$\uparrow$
 $N_c \equiv \sum_{\text{Farben}}$