Behandlung der Spinabhängigkeit:

Annahme ($\hat{=}$ den meisten Experimenten): Spinorientierungen des Anfangszustandes seien zufällig verteilt, und im Endzustand wird die Spinorientierung der einzelnen Teilchen nicht gemessen.

→ Mittelwert über alle Spinkonfigurationen im Anfangszustand
Summe ——"—— Endzustand

$$\to |\mathcal{M}|^2 \to \langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{1}{4}\sum_{s_1=\pm1}\sum_{s_2=\pm1}\sum_{s_3=\pm1}\sum_{s_4=\pm1}|\mathcal{M}|^2$$

in unserem Bsp ist

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(q_1-p_1)^4}\sum_{\mu\nu}\bar u(\vec p_1,s_1)\gamma^\mu u(\vec q_1,s_3)\underbrace{\left[\bar u(\vec p_1,s_1)\gamma^\nu u(\vec q_1,s_3)\right]^*}\,\bar u(\vec p_2,s_2)\gamma_\mu u(\vec q_2,s_4)\left[\bar u(\vec p_2,s_2)\gamma_\nu u(\vec q_2,s_4)\right]^*$$

= ein Skalar (keine Matrix; oder: 1x1-Matrix)

$$= \left[\bar u(\vec p_1,s_1)\gamma^\nu u(\vec q_1,s_3)\right]^\dagger = \left[u^\dagger(\vec p_1,s_1)\gamma^0\gamma^\nu u(\vec q_1,s_3)\right]^\dagger$$

$$= u^\dagger(\vec q_1,s_3)\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{0\dagger}u(\vec p_1,s_1) = \bar u(\vec q_1,s_3)\gamma^\nu u(\vec p_1,s_1)$$

$$\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=\mathbb{1}}\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu \quad \text{(s. Übung, Aufgabe 106)}$$

also mit Mittelwert und Summe:

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{4(q_1-p_1)^4}\sum_{s_i=\pm1}\bar u(\vec p_1,s_1)\gamma^\mu u(\vec q_1,s_3)\,\bar u(\vec q_1,s_3)\gamma^\nu u(\vec p_1,s_1)\,*$$
$$*\,\bar u(\vec p_2,s_2)\gamma_\mu u(\vec q_2,s_4)\,\bar u(\vec q_2,s_4)\gamma_\nu u(\vec p_2,s_2)$$

Spinsumme? Vollständigkeitsrelation (s. S.21)! $\sum_s u(\vec p,s)\bar u(\vec p,s) = \not p + m\mathbb{1}$

außerdem gilt (für irgendeine 4x4-Matrix M)

$$\sum_s \bar u(\vec p,s)Mu(\vec p,s) = \sum_s \bar u_\alpha(\vec p,s)M_{\alpha\beta}u_\beta(\vec p,s) = \sum_s M_{\alpha\beta}u_\beta(\vec p,s)\bar u_\alpha(\vec p,s)$$
$$= \sum_s \mathrm{Sp}\left(Mu(\vec p,s)\bar u(\vec p,s)\right) = \mathrm{Sp}\left(M(\not p+m)\right)$$

also ist insgesamt

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{4(q_1-p_1)^4}\,\mathrm{Sp}\left[\gamma^\mu(\not q_1+m_e)\gamma^\nu(\not p_1+m_e)\right]\,\mathrm{Sp}\left[\gamma_\mu(\not q_2+m_\mu)\gamma_\nu(\not p_2+m_\mu)\right]$$

Bem:
- faktorisiert in e^-- und μ^--Anteil
- keine Spinoren mehr!
- brauchen jetzt Spuren über γ-Matrizen

Spuren über γ-Matrizen:

es gilt (s. Übungen, Aufgabe 25)

$$Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4 g^{\mu\nu}$$

$$Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\varsigma) = 0$$

$$Sp(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\varsigma \gamma^\sigma) = 4\left(g^{\mu\nu} g^{\varsigma\sigma} - g^{\mu\varsigma} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\varsigma}\right)$$

((und, natürlich, $Sp(A+B) = Sp(A) + Sp(B)$; $Sp(cA) = c\,Sp(A)$;
$Sp(AB) = Sp(BA)$; für Matrizen A, B und Zahl c))

so daß für unser Bsp gilt

$$Sp\left[\gamma^\mu (\not{q}_A + m_e)\gamma^\nu (\not{p}_1 + m_e)\right] = (q_A)_\alpha (p_1)_\beta \, Sp\left[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta\right] + \ldots \overset{0}{\cancel{Sp[(\gamma)^3]}} + m_e^2 Sp\left[\gamma^\mu \gamma^\nu\right]$$

$$= 4 (q_A)_\alpha (p_1)_\beta \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu}\right) + 4 m_e^2 g^{\mu\nu}$$

$$= 4\left(q_A^\mu p_1^\nu + q_A^\nu p_1^\mu + g^{\mu\nu}(m_e^2 - q_A \cdot p_1)\right)$$

also insgesamt

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{4e^4}{(q_A - p_1)^4} \Big\{ \left[q_A \cdot q_B \; p_1 \cdot p_2 + q_A \cdot p_2 \; q_B \cdot p_1 + q_A \cdot p_1 (m_\mu^2 - q_B \cdot p_2)\right] \cdot 2$$

$$+ (m_e^2 - q_A \cdot p_1)\Big(q_B \cdot p_2 \cdot 2 + \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{= g^\mu{}_\mu \,=\, Sp\left(\begin{smallmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \,=\, 4} (m_\mu^2 - q_B \cdot p_2)\Big)\Big\}$$

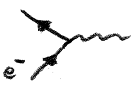
$$= \frac{8e^4}{(q_A - p_1)^4} \left\{ q_A \cdot q_B \; p_1 \cdot p_2 + q_A \cdot p_2 \; q_B \cdot p_1 - m_\mu^2 \, q_A \cdot p_1 - m_e^2 \, q_B \cdot p_2 + 2 m_e^2 m_\mu^2 \right\}$$

<u>Bem:</u>
- haben L-invariantes Resultat für $\langle |M|^2 \rangle$ gefunden
- können dieses jetzt z.B. auf S.32 einsetzen
  $\rightarrow \dfrac{d\sigma_{2\to 2}}{d\Omega} = \ldots$
  (oder in den L-invarianten Ausdruck von Aufgabe 22!)
- für $m_\mu \gg m_e$ ((vgl. $m_\mu \approx 106$ MeV, $m_e \approx 0.511$ MeV)) folgt dann der Wirkungsquerschnitt für "Mott-Streuung" und daraus für $v_e \ll 1$ die "Rutherford-Formel"

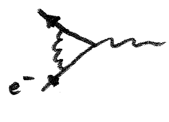
Einschub: mehr zum magnetischen Moment der Leptonen

(s. S. 36/37) ; magn. Moment der anderen Leptonen verschieden von μ_e?

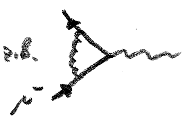
Masse $(e^-, \mu^-, \tau^-) \approx (0.511,\ 105.7,\ 1780)$ MeV

1. Ordnung:  $\Rightarrow \mu_e = \frac{e}{2m_e} \equiv \mu_B$, $\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1$ (in 1. Ordn.)

also  $\Rightarrow \mu_\mu = \frac{e}{2m_\mu}$,  $\Rightarrow \mu_\tau = \frac{e}{2m_\tau}$

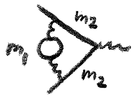
3. Ordnung: wichtigstes Diagramm  $\Rightarrow$ Korrektur $\frac{\delta\mu_e^{(1)}}{\mu_B} = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha_{EM}}{2\pi}$

((diese Korrektur kommt vom Schleifenintegral (vgl. Regel 5), in dessen Integrand die Propagatoren (vgl. Regel 3) stehen. Propagatoren enthalten Massen (hier: m_e), da als Korrektur (zu $\frac{\mu_e}{\mu_B} = 1$) aber dim.-lose Zahl herauskommen muss, kann das Ergebnis nicht von m_e abhängen $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_{EM}}{\pi}$))

also z.B.  $\Rightarrow$ Korrektur $\frac{\delta\mu_\mu^{(1)}}{e/2m_\mu} = \frac{\alpha_{EM}}{2\pi} = \frac{\delta\mu_\tau^{(1)}}{e/2m_\tau}$!

5. Ordnung: wichtigstes Diagramm:  $\{e, \mu, \tau\}$ $\Rightarrow$ $\frac{\delta\mu_e^{(2)}}{\mu_B} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2 \sum_{i \in \{e,\mu,\tau\}} a\left(\frac{m_i}{m_e}\right)$

((wobei die Korrektur vom Zwei-Schleifenintegral kommt:

 m_1, m_2 $\sim a\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$ muß wieder Zahl sein, kann also nur vom Verhältnis der Massen abhängen

dieses Integral ist berechnet [Li/Mendel/Samuel, PRD 47 (1993) 1723],

wobei z.B. $a(1) = \frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3} \approx 0.016$

$a(\varepsilon) = -\frac{1}{3}\ln(\varepsilon) - \frac{25}{36} + O(\varepsilon)$; $a\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right) \approx a\left(\frac{1}{207}\right) \approx 1.08$

$a\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon^2}{45} + O(\varepsilon^4)$; $a\left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right) \approx a(17) \approx 7.7 \cdot 10^{-5}$))

(Fazit: Schleife mit dem leichtesten Teilchen, hier: e^-, gibt den größten Beitrag)

also

$$\frac{\delta\mu_e^{(2)}}{e/2m_e} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2 \left[a(1) + a(207) + a(3483) \right] \approx 0.016 + 5.2\cdot 10^{-7} + 1.8 \cdot 10^{-9}$$

$$\frac{\delta\mu_\mu^{(2)}}{e/2m_\mu} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2 \left[a\left(\frac{1}{207}\right) + a(1) + a(17) \right] \approx 1.08 + 0.016 + 7.7\cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\delta\mu_\tau^{(2)}}{e/2m_\tau} = \left(\frac{\alpha_{EM}}{\pi}\right)^2 \left[a\left(\frac{1}{3483}\right) + a\left(\frac{1}{17}\right) + a(1) \right] \approx 2.02 + 0.25 + 0.016$$