

Schreibe $\vec{p}_i$ -Integration in Kugelkoordinaten am $\vec{q}_1$



$$d^3\vec{p}_i = s^2 ds d\Omega, \quad s = |\vec{p}_i|$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

substituiere $s \rightarrow E := \sqrt{m_1^2 + s^2} + \sqrt{m_2^2 + s^2}$ in Radialintegration

$$\Rightarrow dE = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{m_1^2 + s^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{m_2^2 + s^2}} \right) 2s ds = E \frac{s ds}{\sqrt{m_1^2 + s^2} \sqrt{m_2^2 + s^2}}$$

$$\text{und } s(E) = \frac{1}{2E} \sqrt{E^4 - 2E^2(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}$$

$$(\text{denn: } E^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2s^2 + 2\sqrt{1} \sqrt{2})$$

$$(E^2 - m_1^2 - m_2^2 - 2s^2)^2 = 4(m_1^2 + s^2)(m_2^2 + s^2)$$

$$\begin{aligned} E^4 + m_1^4 + m_2^4 + 4s^4 - 2E^2 m_1^2 - 2E^2 m_2^2 - 4E^2 s^2 + 2m_1^2 m_2^2 + 4m_1^2 s^2 + 4m_2^2 s^2 \\ = 4m_1^2 m_2^2 + 4m_1^2 s^2 + 4m_2^2 s^2 + 4s^4 \end{aligned}$$

diese Gg nach s^2 auflösen

können auch nach $E_1 + E_2 = \sqrt{s}$ in CMS variieren

$$\frac{d\sigma_{2 \rightarrow 2}}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{1}{|\vec{q}_1| \sqrt{s}} \int_{m_1, m_2}^{\infty} \frac{dE}{E} s(E) |M|^2(|\vec{q}_1|, s(E), \cos\theta) \cdot \delta(E - \sqrt{s})$$

Deltafkt schlägt nur für $\sqrt{s} > m_1 + m_2$ zu!

$$= \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{1}{|\vec{q}_1| \sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s}} s(\sqrt{s}) |M|^2(|\vec{q}_1|, s(\sqrt{s}), \cos\theta) \cdot \Theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2)$$

aber $s = |\vec{p}_i|^2$, s.o., so daß $s(\sqrt{s})$ das durch E-p-Erhaltung fixierte $|\vec{p}_i|$ ist

$$= \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{|\vec{p}_i|}{|\vec{q}_1|} \frac{|M|^2(|\vec{q}_1|, |\vec{p}_i|, \cos\theta)}{(E_1 + E_2)^2}$$

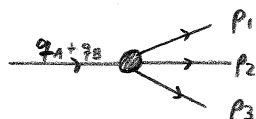
Bem.: • konnten für $2 \rightarrow 2$ Streuung also Phasenraumintegration ohne explizite Kenntnis von $|M|^2$ ausführen!

• im Allgemeinen geht das nicht bei $2 \rightarrow n > 2$

• haben in CMS gearbeitet, und $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ durch Variablen in diesem System ausgedrückt.

• manchmal bequemer: Lorentz-Invariante Variablen $\begin{cases} s = (q_1 + q_2)^2 \\ t = (q_1 - p_1)^2 \\ u = (q_1 - p_2)^2 \end{cases}$
 $L-mv: m_1, m_2, m_1, m_2$; Mandelstam-Variablen
 $\hookrightarrow$ s. Übung, Aufgabe 21

- bei $2 \rightarrow n > 2$ Streuung ist die Klammerung etwas komplizierter, z.B.



$\Rightarrow$

$$s_{12} := (p_1 + p_2)^2$$

$$s_{13} := (p_1 + p_3)^2$$

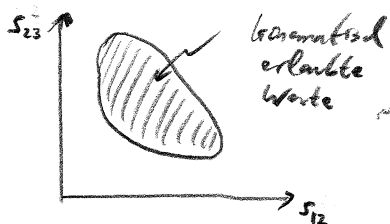
$$s_{23} := (p_2 + p_3)^2$$

$$s_{12} + s_{13} + s_{23} =$$

$$= (q_1 + q_2)^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$$

$$= s + m_1^2 + m_1^2 + m_2^2 = \text{const.}$$

$\Rightarrow$ zwei genügen!



"Dalitz-Plot": stellt die erlaubte Region dar. Jeder Punkt $\hat{=}$ einer Geometrie des Endzustandes

- eine tiefgehende Behandlung der Phasenraumintegration ist z.B. in [Feynman/Kinematik, "Modern Intro. to Particle Phys.", s. 3-body phase space]

jetzt fehlt uns nur noch eine Methode, um M^2 zu berechnen!

das geht am besten mit "Feynman-Diagrammen", die graphisch sehr anschaulich sind, und sich daher als eine "Sprache" in der Teilchenphysik durchgesetzt haben.

3.3 Feynman-Regeln

$\hat{=}$ Algorithmen zur Berechnung der Amplitude M in quantenfeldtheoretischen Prozessen

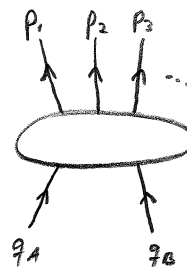
mathematischen Ausdrücken werden graphische Bausteine zugeordnet

① externe Linien

werden durch ihren Viererimpuls bezeichnet

Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen: zusätzlich Helizität s

Spin 1-Teilchen: zusätzlich Polarisation λ



auslaufende T.

$\uparrow t$

einlaufende T.

$\Rightarrow$ $P \cdots$ Spin-0-T., Viererimpuls $p \Rightarrow$

$\Rightarrow$ P^μ Spin-1-T. (Photon) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ P, s Spin- $\frac{1}{2}$ -T. (Elektron) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ P, s Spin- $\frac{1}{2}$ -Antit. (Positron) $\Rightarrow$

$$\delta M = 1$$

$$\delta M = \varepsilon_{(\lambda)}^\mu(\vec{p})$$

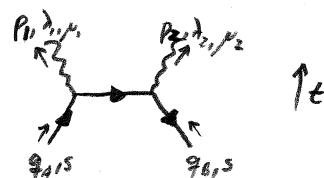
$$\delta M = u(\vec{p}, s), \quad \delta M = \bar{u}(\vec{p}, s)$$

einlaufend

auslaufend

$$\delta M = \bar{v}(\vec{p}, s), \quad \delta M = v(\vec{p}, s)$$

Bsp: $e^-(q_1, s) + e^+(q_2, s) \rightarrow \gamma(p_1, \lambda_1, p_1) + \gamma(p_2, \lambda_2, p_2)$



② Vertices: sind durch $\hat{V}$ in $\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$ bestimmt.

genauer: im Zeitentwicklung-Operator kommt $-i \int dt' g \hat{V}_I(t')$ vor.

im Lagrange-Formalismus ist das $+i \int dt' \int d^3x \hat{\mathcal{L}}_I$

mit Lagrange-Dichte $\hat{\mathcal{L}}_I$ (= Polynom in Feldoperatoren)

allgemein: $\hat{\mathcal{L}}_I = g_{ijk} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \hat{\phi}_k + g_{ijkl} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \hat{\phi}_k \hat{\phi}_l + \dots$

wir schreiben
(malen)



3-er Vertex

$$\Rightarrow \delta \mathcal{M} = i g_{ijk}$$



4-er Vertex

$$\Rightarrow \delta \mathcal{M} = i g_{ijkl}$$

usw.

③ interne Linien: falls ein Feynman-Diagramm (s.o.) interne Linien hat, entspricht jede dieser Linien einem "Propagator".

Dieser hängt von Impuls/Masse/Art des Teilchens ab, hat aber keinen Spin- bzw. Polarisations-Zustand: es ist über alle Möglichkeiten summiert.

$$\rightarrow P \text{ --- } \Leftrightarrow \delta \mathcal{M} = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$\mu \rightarrow P \text{ --- } \nu \Leftrightarrow \delta \mathcal{M} = \frac{i}{p^2} (-g_{\mu\nu})$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow P \\ \leftarrow P \end{array} \Leftrightarrow \delta \mathcal{M} = \frac{i}{p^2 - m^2} (\not{p} + m)$$

$\Leftarrow$ Vollständigkeitsrelation
vgl. Skript S. 21

((Herleitung: die genauen Ausdrücke für Propagatoren folgen aus $\hat{H}_0$))

④ E-p-Erhaltung an jedem Vertex muß der Viererimpuls erhalten sein

⑤ interne Impulse werden per $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$ überintegriert

⑥ Antisymmetrisierung (-1) für jede geschlossene Fermion-Schleife.
(-1) zwischen Diagrammen, die sich nur durch Austausch von zwei externen Fermionen unterscheiden.

⑦ Gesamtphase alles mit (+i) multiplizieren ((für M^2 egal))