

Zweite Quantisierung

die Lsg der Dirac-Gly werden durch Teilchen- und Antiteilchenzustände interpretiert. [→ s. QFT-Vorlesung]

Hier: die wichtigsten Resultate der QFT-Behandlung als "Zitat"

Feldern $\psi(x) \rightarrow$ Feldoperatoren

$$\hat{\psi} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} u(\vec{p}, s) e^{-ipx} + \hat{b}_{\vec{p}}^{+ (s)} v(\vec{p}, s) e^{+ipx} \right)$$

$$\frac{1}{\bar{\psi}} = \hat{a}^{+} \bar{u} e^{+ipx} + \hat{b} \bar{v} e^{-ipx}$$

Vertauschungsrelationen sind Antikommutatoren

$$\{ \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{+ (s')} \} = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ss'} = \{ \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)}, \hat{b}_{\vec{p}'}^{+ (s')} \} ; \text{ Rest} = 0$$

⇒ Dirac-Felder gehorchen der Fermi-Dirac-Statistik

$$\text{z.B. 1- Elektron-Zustand } |e\rangle \sim \hat{a}_{\vec{p}}^{+ (s)} |0\rangle$$

2- "

$$|2e\rangle \sim \hat{a}_{\vec{p}}^{+ (s)} \hat{a}_{\vec{p}}^{+ (s)} |0\rangle = 0 \quad \text{Pauli-Prinzip}$$

Ges.-Energie → Hamilton-Operator (wie bei KG-Gly, s.S. 18)

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3\vec{p} E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^{+ (s)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} - \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} \hat{b}_{\vec{p}}^{+ (s)} \right) \\ &= \int d^3\vec{p} E_{\vec{p}} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^{+ (s)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} + \hat{b}_{\vec{p}}^{+ (s)} \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} - \delta^{(3)}(\vec{0}) \right) \end{aligned}$$

erhaltene Gesamtladung

$$\hat{Q} = \int d^3\vec{x} \frac{1}{4} \gamma_0 \hat{\psi} = \int d^3\vec{p} \sum_{s=\pm} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^{+ (s)} \hat{a}_{\vec{p}}^{(s)} - \hat{b}_{\vec{p}}^{+ (s)} \hat{b}_{\vec{p}}^{(s)} \right)$$

völlig analog zur Lsg der KG-Gly (s.S. 8) interpretiert man

die Operatoren $\hat{a}, \hat{b}$ wieder als ein/aus-laufende Teilchen/Antiteilchen:

	Teilchen	Antiteilchen
einlaufendes	$\hat{a}_{\vec{p}}^{(s)}$	$\hat{b}_{\vec{p}}^{(s)}$
auslaufendes	$\hat{a}_{\vec{p}}^{+ (s)}$	$\hat{b}_{\vec{p}}^{+ (s)}$

Im Zusammenhang mit Dreh- Feldern ist es nützlich,
zwei Konzepte zur Klassifizierung des "Eigendrehimpulses" einführen:

Helizität

Def (physikalisch; analog Polarisation des Photons)

$$\text{Helizität } h = (\text{Projektion des Spins auf Bewegungsrichtung}) \cdot 2$$

z.B.  $s_z = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow h = \pm 1$

Beschreibung (mathematisch; s. auch Übung, Aufgabe 15)

$$\text{Helizität } h(\vec{p}) := \vec{e}_{\vec{p}} \cdot \vec{S}, \quad \vec{S} := \left(\frac{\vec{p} \times \vec{p}}{|\vec{p}|} \right), \quad \vec{e}_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Spin entlang Bewegungsrichtung $\vec{e}_{\vec{p}}$ ist dann $S_{\vec{e}_{\vec{p}}} = \frac{1}{2} h(\vec{p})$

es gilt: $h^2(\vec{p}) = 1 \Rightarrow \text{EW} = \pm 1$

Projektoren $P_{\pm}^{(h)} := \frac{1 \pm h}{2}$ (denn $(P_{\pm}^{(h)})^2 = P_{\pm}^{(h)}$, $P_{+}^{(h)} P_{-}^{(h)} = 0$, $P_{+}^{(h)} + P_{-}^{(h)} = 1$)

$\rightarrow$ können jeden Zustand als $u = (P_{+}^{(h)} + P_{-}^{(h)})u =: u_{+}^{(h)} + u_{-}^{(h)}$ schreiben!

z.B. $\vec{p} = p \vec{e}_z \Rightarrow h(\vec{p}) = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$

$$h(\vec{p}) u(\vec{p}, s) = h(\vec{p}) \frac{1}{\sqrt{E_{\vec{p}} + m}} \begin{pmatrix} E_{\vec{p}} + m & 0 & -p & 0 \\ 0 & E_{\vec{p}} + m & 0 & p \\ p & 0 & -E_{\vec{p}} + m & 0 \\ 0 & -p & 0 & -E_{\vec{p}} + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = h(\vec{p}) \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\vec{p}} + m} \xi_s \\ \sqrt{E_{\vec{p}} + m} \xi_s \\ \frac{sp}{\sqrt{E_{\vec{p}} + m}} \xi_s \\ \frac{sp}{\sqrt{E_{\vec{p}} + m}} \xi_s \end{pmatrix} = s u(\vec{p}, s)$$

$\Rightarrow$ Helizitäts-EW ist s !

Chiralität

Def (mathematisch; s. auch Üb., Aufgabe 15)

$$\text{Chiralitätsoperator } \gamma_5 := i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es gilt: $\gamma_5^2 = 1 \Rightarrow \text{EW} = \pm 1$

Projektoren $P_{R,L} := \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$ (denn $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $P_L P_R = 0$, $P_L + P_R = 1$)

$\rightarrow$ können jeden Zustand als $u = (P_L + P_R)u =: u_L + u_R$ schreiben!

$\uparrow$ "rechts-händig"
"links-händig"

Beschreibung (physikalische Relevanz)

- die schnelle Wechselwirkung wirkt nur auf linkshändige Teilchen (s. später)
- masselose Teilchen: Chiralität $\hat{=}$ Helizität

z.B. $\vec{p} = p\vec{e}_z$, $m=0 \Rightarrow u(\vec{p}, s) = \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \xi_s \\ s\xi_s \end{pmatrix}$

$$p_5 u(\vec{p}, s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \xi_s \\ s\xi_s \end{pmatrix} = \sqrt{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} s\xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} = s u(\vec{p}, s)$$

$\Rightarrow$ Chiralitäts-EW ist s !

- Neutrinos werden nur im schnellen W's'n erzeugt, sind also links'händig. $m_\nu = 0 \Rightarrow s = -1$: $\leftarrow \begin{array}{c} \bullet \\ \hline \end{array} \rightarrow \vec{p}$
 $\uparrow$ (ü 15d) $s_2 = -\frac{1}{2}$

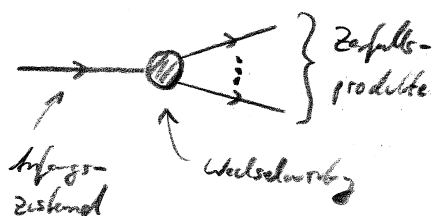
3. wechselwirkende Teilchen

besteht: Beschreibung freier relativistischer Teilchen
 (mit Inputs $\vec{p}$; Polarisation λ ; Helizität s)

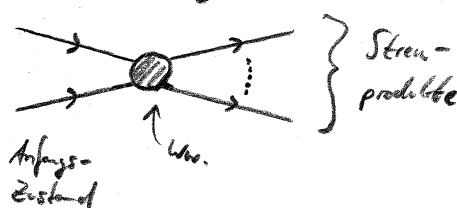
Setzt: Wechselwirkungen abh. v.

haben zwei grundlegende Arten von Prozessen:

Zerfälle



Streuung



3.1 Zerfälle

einige wichtige Vorkablen:

- Lebensdauer τ

wird meist für ein ruhendes Teilchen angegeben (vgl. ü 4)

$Q\pi \rightarrow$ für ein energisches T. keine genaue Vorhersage

$\rightarrow \tau$ ist "mittlere" Lebensdauer

- Zerfallsrate $\Gamma \hat{=}$ Wahrscheinlichkeit (pro Zeiteinheit) daß Zerfall stattfindet

$$T\text{-Zahl } N, \quad dN = -\Gamma N dt \quad \Rightarrow \quad N(t) = N(0) e^{-\Gamma t}$$

$$\text{es gilt } \Gamma = \frac{1}{\tau}$$

$$\left(\text{denn: } \tau = \langle t \rangle = \frac{\int_0^\infty dt \, t \, N(t)}{\int_0^\infty dt \, N(t)} = \frac{-\partial_\Gamma \int_0^\infty dt \, e^{-\Gamma t}}{\int_0^\infty dt \, e^{-\Gamma t}} \stackrel{x=\Gamma t}{=} \frac{-\partial_\Gamma \frac{1}{\Gamma}}{\frac{1}{\Gamma}} = \frac{1}{\Gamma} \right)$$

- Zerfallskanal i (i beschreibt Art der Zerfallsprodukte; s. PDG)

z.B. Zerfallsrate in diesem Kanal = Γ_i

- Gesamtzerfallsrate $\Gamma_{\text{tot}} = \sum_i \Gamma_i$

- Verzweigungsverhältnis $\frac{\Gamma_i}{\Gamma_{\text{tot}}}$

je größer also das Verzweigungsverhältnis, desto mehr Zerfälle im Kanal

Berechnung der Zerfallsrate

per zeitabhängiger Störungstheorie im W -Bild (s. S. 11 und 19)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g \hat{V} \quad ; \quad \begin{array}{l} \hat{H}_0 \\ \uparrow \\ \text{freie T.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \hat{V} \\ \uparrow \\ \text{C.W.} \end{array}$$

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I$$

$$\text{Zeitentwicklungs-Op.} = \mathbb{1} - i g \int_{t_0}^t dt' \hat{V}_I(t') + O(g^2)$$

def Streumatrix $S_{fi} := \langle f | \hat{U}_I(+\infty, -\infty) | i \rangle_I$

$\uparrow$ Endzust. ("final") $\uparrow$ Anfangszustand ("initial")

$\rightarrow$ für $g=0$ ist S_{fi} diagonal

z.B.

$$s \xrightarrow{\begin{array}{l} q = (E_q, \vec{q}) \\ E_q = \sqrt{\vec{q}^2 + m_q^2} \end{array}} \begin{array}{l} p_1 = (E_1, \vec{p}_1) \rightarrow \pi^+ \\ E_1 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_\pi^2} \\ p_2 = (E_2, \vec{p}_2) \rightarrow \pi^- \\ E_2 = \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_\pi^2} \end{array}$$

hier Annahme: Spin 0
(ergibt sich Spin 1)

Wov. nutzt die Form $g \hat{V}_I(t') = \int d^3x \, \mathcal{M} \hat{\phi}^\dagger(t', \vec{x}) \hat{\phi}(t', \vec{x}) \hat{S}(t', \vec{x})$

$\uparrow$ Konstante

mit $\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \left(\hat{a}_{\vec{p}_1} e^{-ip_1 x} + \hat{b}_{\vec{p}_1}^\dagger e^{+ip_1 x} \right)$ erzeugt Antiteilchen, $\hat{=}$ auslaufendes π^+

$\hat{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \left(\hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger e^{+ip_2 x} + \hat{b}_{\vec{p}_2} e^{-ip_2 x} \right)$ erzeugt Teilchen, $\hat{=}$ auslaufendes π^-

$\hat{S}(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \left(\hat{a}_{\vec{q}}^\dagger e^{-iqx} + \hat{a}_{\vec{q}} e^{+iqx} \right)$ vernichtet Teilchen, $\hat{=}$ einlaufendes g