1.5 Reminder: QM

Klassische Mechanik : $E = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ — hier 1D, der Einfachheit halber

Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$

Schrödinger-Glg $i\partial_t |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ — Zustandsvektor — diktiert Zeitentwicklung

Vertauschungsrelation $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$ — Kronecker-Delta ((= 1 für i=j , 0 sonst))

Energie-Eigenzustände $\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$

$\Rightarrow |n(t)\rangle = e^{-iE_n t} |n(0)\rangle$

Übergang zur Ortsdarst. $\psi(x,t) = \langle x | \psi(t)\rangle$ (Projektion auf Ortseigenvektor)

$\hat{x}_i \to x_i$ und $\hat{p}_i \to -i\partial_i$

$\to$ Schrödinger Glg: $i\partial_t \psi(x,t) = \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(x)\right)\psi(x,t)$

konkretes Beispiel: harmonischer Oszillator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$$

algebraische Lsg: $\hat{H}$ als Absolutquadrat eines Operators darstellen

$\to$ Leiteroperatoren $\hat{a}$ (Vernichtungs-Op.) $:= \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}$

$\hat{a}^+$ (Erzeugungs-Op.) $:= \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}}$

$\Rightarrow [a, a^+] = 1$

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}(a^+a + aa^+) = \omega\left(\frac{1}{2} + a^+a\right)$$

$a^+a \equiv \hat{N}$ Besetzungszahl-Op.

mit Eigenzuständen $|n\rangle$ von $\hat{N}$

$\Rightarrow \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle$

$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle$

oft kann man ein System aber nicht vollständig lösen!

→ wichtiges Werkzeug für Näherungs-Lösungen: Störungstheorie

z.B. $\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{V}$ wobei $g \ll 1$

Energie-Eigenwerte? Reihe!

$$E_n = E_n^{(0)} + g E_n^{(1)} + g^2 E_n^{(2)} + \dots$$

$$|n\rangle = |n\rangle^{(0)} + g\,|n\rangle^{(1)} + \dots$$

$$\rightarrow \quad \hat{H}_0 |n\rangle^{(0)} = E_n^{(0)} |n\rangle^{(0)}$$

$$E_n^{(1)} = {}^{(0)}\langle n | \hat{V} | n\rangle^{(0)}$$

$$\vdots$$

es werden oft verschiedene Darstellungen der Zeitabhängigkeit benutzt:

- Schrödinger-Darstellung

  Zustände sind zeitabhängig, Operatoren zeitunabhängig z.B. $\hat{x}, \hat{p}, \hat{L}, \dots$

  $$i\partial_t |\psi\rangle_s = \hat{H} |\psi\rangle_s$$

  formale Lsg: $|\psi(t)\rangle_s = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle_s$

  Mittelwerte: $\langle \hat{A}_s \rangle = {}_s\langle \psi(t) | \hat{A}_s | \psi(t)\rangle_s$

- Heisenberg-Darstellung

  Operatoren folgen einer Bewegungsglg, Zustände zeitunabhängig (sind also zeitabhängig)

  def. $\hat{A}_H(t) := e^{i\hat{H}t} \hat{A}_s e^{-i\hat{H}t}$; $|\psi\rangle_H = e^{i\hat{H}t} |\psi(t)\rangle_s = |\psi(0)\rangle_s$

  $$\rightarrow \quad i\partial_t \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}]$$

  $$\langle \hat{A}_H(t) \rangle = {}_s\langle \psi(0) | \hat{A}_H(t) | \psi(0)\rangle_s$$

- <u>Wechselwirkungs - Darstellung</u> (oder Dirac-Darst.)

(liegt gewissermaßen zwischen Schröd.- + Heis.-Darst.)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\,\hat{V}$$

$$|\psi(t)\rangle_I := e^{i\hat{H}_0 t}\,|\psi(t)\rangle_S$$

$$\hat{A}_I(t) := e^{i\hat{H}_0 t}\,\hat{A}_S\,e^{-i\hat{H}_0 t}$$

$$\hat{V}_I(t) := e^{i\hat{H}_0 t}\,\hat{V}\,e^{-i\hat{H}_0 t}$$

so daß $\quad i\partial_t\,|\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t}\,[-\hat{H}_0 + \hat{H}]\,|\psi(t)\rangle_S = g\,\hat{V}_I(t)\,|\psi(t)\rangle_I$

und $\quad i\partial_t\,\hat{A}_I(t) = [\hat{A}_I(t), \hat{H}_0]$

mit Zeitentwicklungs-Operator $\hat{U}_I(t,t_0)$

$$|\psi(t)\rangle_I := U_I(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle_I$$

folgt dann $\quad i\partial_t\,\hat{U}_I(t,t_0) = g\,\hat{V}_I(t)\,\hat{U}_I(t,t_0)$

und natürlich $\quad \hat{U}_I(t_0,t_0) = \mathbb{1}$ als "Anfangsbedingung"

2. Beschreibung freier Teilchen. Rel. QM

relativistische Teilchen $\Rightarrow$ QFT.

zunächst jedoch freie Teilchen $\Rightarrow$ relativistische "klassische" QM etc.

2.1. Grundgleichungen

Klein-Gordon-Glg. (Spin 0)

Erinnerung: nichtrel. Beziehung $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

setze $E \to i\partial_t$ und $\vec{p} \to -i\vec{\nabla}$

$\Rightarrow$ Schrödinger-Glg für freies Teilchen mit Masse m

relativistische Verallgemeinerung?

Physik muß Lorentzinvariant sein!

$p_\mu p^\mu = m^2 \quad \Leftrightarrow \quad E^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[-\partial_t^2 + \vec{\nabla}^2 - m^2\right]\psi = 0$

also $\boxed{\left[\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right]\psi = 0}$ "Klein-Gordon-Glg"

Relevanz: beschreibt Eigenschaften freier $J=0$ Teilchen (z.B. π, ...)

Lösungen: später..

Dirac-Glg. (Spin $\frac{1}{2}$) 1927

Idee: Dgl 2. Ordnung $\to$ (Dgl 1. Ordnung)^2

geht sofort für $\vec{p} = \vec{0}$:

$$0 = p_\mu p^\mu - m^2 \overset{\vec{p}=\vec{0}}{=} (p^0)^2 - m^2 = (p^0 - m)(p^0 + m)$$

$\Rightarrow (p^0 - m) = 0$ oder $(p^0 + m) = 0$: 1. Ordnung in p^0

Ansatz für allgemeines $\vec{p} \neq \vec{0}$

$$p_\mu p^\mu - m^2 =: (\beta^\varsigma p_\varsigma - m)(\gamma^\sigma p_\sigma + m)$$

mit 8 zu bestimmenden Koeffizienten: $\beta^\varsigma, \gamma^\sigma$

kein Term $\sim p$ auf rhs $\Rightarrow \beta^\mu \overset{!}{=} \gamma^\mu$

quad. Term: $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \overset{!}{=} \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu$ (4)

auf beiden Seiten der Glg (*) steht eine Summe von Termen die quadratisch in p-Komponenten sind:

Koeff-Vergleich $p_0p_0, p_1p_1, \ldots$: $1 \stackrel{!}{=} \gamma^0\gamma^0$, $-1 \stackrel{!}{=} \gamma^1\gamma^1 = \gamma^2\gamma^2 = \gamma^3\gamma^3$

Koeff-Vergleich $p_\mu p_\nu$, $\mu \neq \nu$: $0 \stackrel{!}{=} \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$ für $\mu \neq \nu$

Lösungsversuch: $\gamma^0 = \pm 1$, $\gamma^k = \pm i$ $(k = 1,2,3)$

$\rightarrow$ erfüllt die ersten vier Rels ✓

aber nicht die letzte ↯

Idee (Dirac!): γ könnten Matrizen sein

Def. Antikommutator $\{A, B\} := AB + BA$

dann ist Glg. (*) $\Leftrightarrow$ $\boxed{2g^{\mu\nu} = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}$

Lösungsversuch: γ könnten 2×2-Matrizen sein

z.B. Pauli-Matrizen $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

diese erfüllen $2\delta_{kl} = \{\sigma_k, \sigma_l\}$

aber die vierte unabh. 2×2-Matrix $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

erfüllt $\{\mathbb{1}, \sigma_k\} = 2\sigma_k$ ↯

Lösungsversuch: γ könnten 3×3-Matrizen sein

wegen $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$ $(\mu \neq \nu)$

oder N bei N×N-Matrizen

ist $\mathrm{Det}(\gamma^\mu)\,\mathrm{Det}(\gamma^\nu) = (-1)^3\,\mathrm{Det}(\gamma^\nu)\,\mathrm{Det}(\gamma^\mu)$

wir fordern $\mathrm{Det}(\gamma^\mu) \neq 0$ $\Rightarrow$ $N\times N$-Matrizen mit ungeradem N ↯

Lösungsversuch: γ als 4×4-Matrizen

$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\gamma^k := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$ ✓✓ (Standard-Darstellung)

((alles 2×2 Blöcke: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ etc))