

Elementarteilchen sind meist sehr leicht und bewegen sich schnell

→ relativistische Beschreibung! $\exists$ Inertialsysteme ...

→ wichtig! [E Theorie I] [hier: Vdh.]

alle (verallg.) Koord. werden als 4-Vektoren zusammengefasst:

Ortsvektor x^μ , $\mu = 0, \dots, 3$, $x^0 := t$, $x^1 := x$, $x^2 := y$, $x^3 := z$
 $\Rightarrow x^\mu = (t, \vec{x})$

Vierermoment p^μ , $p^0 := E$, $p^1 := p_x$, $p^2 := p_y$, $p^3 := p_z$
 $\Rightarrow p^\mu = (E, \vec{p})$

Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau)$
 $\uparrow$ Eigenzeit des Teilchens
 "Weltlinie" des Teilchens

$u^\mu = \gamma(1, \vec{v})$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dt}{d\tau}$ im Laborsystem

massive Teilchen: $p^\mu = m u^\mu$ (Def. der Masse)

Relevanz: $(p^\mu)_{\text{vorher}} = (p^\mu)_{\text{nachher}}$ Vierermoment-Erhaltung

Ableitungen $\partial_\mu := \partial_{x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu := \partial_{x_\mu}$

mit Hilfe des metrischen Tensors

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

bildet man die Skalarprodukte von 4-Vektoren:

$$a \cdot b := a_\mu b^\mu := g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu := a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Einstein'sche Summenkonvention! $\sum_{\alpha=0}^3 a^\alpha$

$$\text{z.B. } a^2 = a \cdot a = (a^0)^2 - \vec{a}^2 \quad (\text{kann auch } < 0 \text{ sein!})$$

$a^2 < 0$ heißt "raumartig"
 > 0 zeit
 $= 0$ Licht

$$\text{z.B. } u^2 = \gamma^2 (1^2 - \vec{v}^2) = 1$$

$$p^2 = m^2$$

$$\square := \partial^\mu \partial_\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$$

Relevanz: Skalarprodukte sind invariant

jaja: 

d.h. sie haben in allen Inertialsystemen den gleichen Wert

lineare Transformationen Λ^μ_ν , unter denen die Skalarprodukte invariant bleiben, bilden die Lorentzgruppe

$$\text{Lorentz trf: } a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$$

$$\text{Invariant: } a' \cdot b' = g_{\mu\nu} a'^\mu b'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\sigma a^\sigma \Lambda^\nu_\tau b^\tau \\ \stackrel{!}{=} g_{\sigma\tau} a^\sigma b^\tau = a \cdot b$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau = g_{\sigma\tau}$$

$$\text{bzw. } \Lambda^T g \Lambda = g$$

$$(\text{Det } \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \text{Det } \Lambda = \pm 1$$

$$\text{und (00-Komp.) } g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \Lambda^0_0 \geq 1 \text{ oder } \Lambda^0_0 \leq -1$$

haben also vier "Klassen" von Lorentztransformationen (LT)

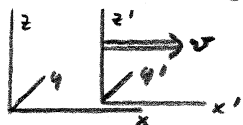
$$\text{"eigentliche" LT} := \{ \text{Det } \Lambda = +1, \Lambda^0_0 \geq 1 \} =: \Lambda_E$$

$$(\text{die anderen drei: } \Lambda_P, \Lambda_T, \Lambda_{PT})$$

$$\text{mit Zeitumkehr } \Lambda_T := \text{diag}(-1, 1, 1, 1) : x^0 \rightarrow -x^0, \vec{x} \rightarrow \vec{x}$$

$$\text{und Raumspiegelung } \Lambda_P := \text{diag}(1, -1, -1, -1) : x^0 \rightarrow x^0, \vec{x} \rightarrow -\vec{x} \quad))$$

konkret: boost z.B. in x-Richtung



Uhren synchron $t = t' = 0$ bei $x = x' = 0$

Ereignis (t, x, y, z) in gestrichelten Koordinaten?

$$t' = \gamma(t - vx), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

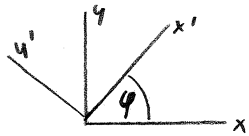
$$\text{bzw. } x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (\Lambda^\mu_\nu)_{x\text{-boost}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine bequemere Parametrisierung (γ, v nicht unabhängig):

setze $v = \tanh \theta \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \cosh \theta$

so daß $(\Lambda^\mu_\nu)_{x\text{-boost}} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\cosh \theta \equiv \cosh \theta$
 $\sinh \theta \equiv \sinh \theta$

in Analogie zu den Rotationen z.B. um z-Achse [vgl. EITP I]



$t' = t, x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi, z' = z$

bzw. $(\Lambda^\mu_\nu)_{z\text{-Rot.}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $C \equiv \cos \varphi$
 $S \equiv \sin \varphi$

weitere Vokabeln:

a_μ heißt "kovariant", $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$ "kontravariant"

ein "Vektor" transformiert unter LT: $a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$

ein "Tensor" auch: $a'^{\mu\nu\sigma\ldots} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\tau \Lambda^\sigma_\xi \ldots a^{\rho\tau\xi\ldots}$

((Skalar: Tensor nullter Stufe

Vektor erster

Matrix zweiter

))

((Physik muß sich als (Komp. eines) Tensor(s) beschreiben lassen !!!))

z.B. $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} := \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutation von } 0123 \\ -1 & \text{für ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

ist invariant unter eigentlichen LT's

Relevanz: oft sinnvoll ins "Schwerpunkt-System" (CMS)

zu transformieren, $\sum_i \vec{p}_i = \vec{0}$

center-of-mass-system