Das anomale magnetische Moment des Myons

Einleitung und Motivation

Die magnetischen Momente des Elektrons und des Myons wurden in den letzten Jahren mit erstaunlicher Präzision gemessen. So wurde das magnetische Moment des Elektrons auf zwölf zählende Stellen genau bestimmt, das des Myons auf zehn Stellen. Aus der genauen Bestimmung des magnetischen Moments des Elektrons ergibt sich der mit Abstand beste Wert für die Feinstrukturkonstante α. Das magnetische Moment des Myons hingegen stellt eine ausgezeichnete Möglichkeit dar, das gesamte Standardmodell zu testen, da in höheren Ordnungen alle Teile des Modells einen relevanten Beitrag liefern. Außerdem stellt das magnetische Moment des Myons ein geeignetes Instrument bei der Suche nach Physik jenseits des Standardmodells dar, da wie sich (unter Annahme chiraler Symmetrie) zeigt, der Beitrag neuer Physik zum magnetischen Moment eines Leptons mit der Masse m_l proportional zu m_l^2/Λ^2 ist, wobei Λ die Skala dieser neuen Physik ist. Das Myon ist also für die Suche nach Physik jenseits des Standardmodells $(m_\mu/m_e)^2 \approx 40.000$ mal besser geeignet als das Elektron. Obwohl das magnetische Moment 200 mal des Elektrons genauer bekannt ist als das des Myons, bleibt so immer noch eine 200 mal größere Empfindlichkeit für neue Physik im magnetischen Moment des Myons übrig. Natürlich wäre das Tauon mit seiner großen Masse noch besser geeignet, aufgrund seiner geringen Lebensdauer ist sein magnetisches Moment jedoch nur sehr ungenau gemessen worden.

Magnetische Momente

Das magnetische Moment $\vec{\mu}$ eines Objekts ist ein Maß dafür, welches Drehmoment $\vec{m}$ es spürt, wenn man es in einem magnetischen Feld $\vec{B}$ platziert:

$$\vec{m} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Die zugehörige potentielle Energie ist

$$U = -\vec{\mu}\vec{B}\,. \tag{1}$$

Elementarteilchen haben ein magnetisches Moment, welches von ihrem Spin herrührt. Die beiden Größen sind durch das gyromagnetische Verhältnis g (auch Landé-Faktor genannt) verbunden:

$$\vec{\mu} = g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{s} \tag{2}$$

Wie kommt es zu diesem magnetischen Moment?

Betrachte zum Beispiel ein Myon mit Spin ½ und der Ladung e. In einem sehr naiven klassischen Modell kann man sich den Spin als eine Drehung um die eigene Achse vorstellen. Um das magnetische zu berechnen nimmt man an, dass sich das Myon mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt und lässt dann r gegen Null

gehen. Das Myon bewegt sich dann auf einer Schleife, die das Gebiet $A = \pi r^2$ umschließt und verursacht einen Strom $I = ev/2\pi r$. Das magnetische Moment ist dann

$$\mu = IA = \frac{evr}{2}.$$

Das Drehmoment ist $L = mvr$ und man erhält nun einen von r unabhängigen Ausdruck für das magnetische Moment:

$$\mu = \left(\frac{e}{2m}\right) L$$

In der klassischen Theorie ist also $g = 1$, wie man durch Vergleich mit (2) feststellt.

Wendet man den quantenmechanischen Formalismus an, erhält man ein anderes Ergebnis. Im nichtrelativistischen Grenzfall geht die Dirac-Gleichung in die Schrödinger-Pauli-Gleichung über:

$$\left(\frac{1}{2m}\left(\vec{P} + e\vec{A}\right)^2 + \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\vec{B} - eA^0\right)\Psi_A = (E - m)\Psi_A$$

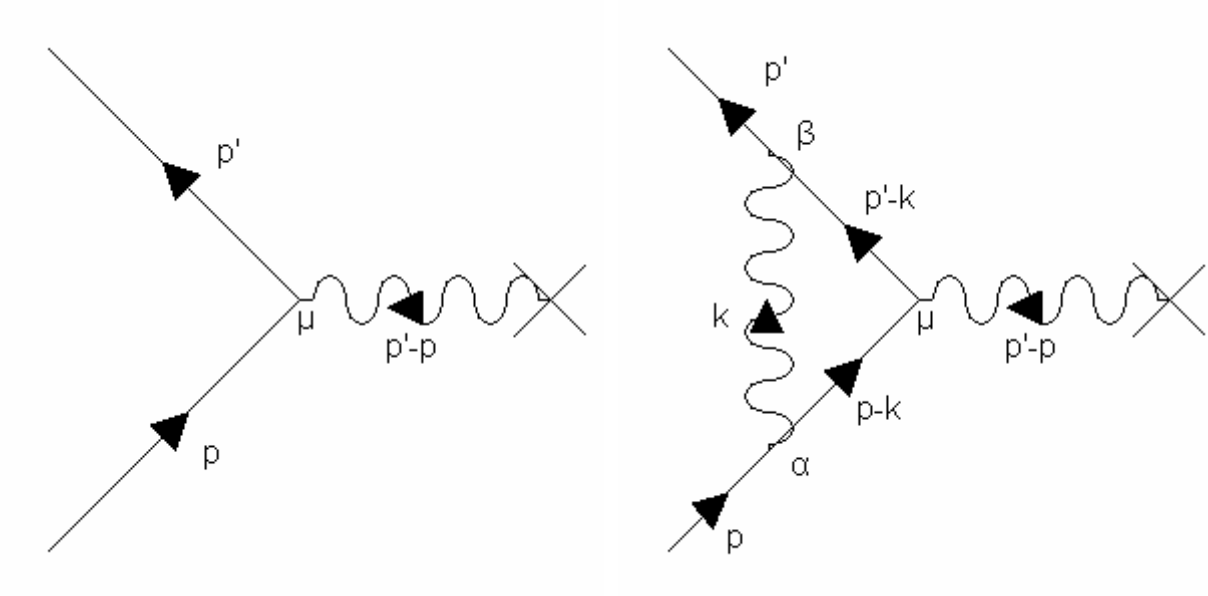
Durch Vergleich mit (1) kann man im Hamiltonoperator den zum magnetischen Moment gehörigen Term identifizieren. Für ein Teilchen mit Spin ½, also $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ erhält man folglich

$$\mu = -\frac{e}{2m}\vec{\sigma} = -2\frac{e}{2m}\vec{S}$$

Aus der Dirac-Gleichung folgt also $g = 2$. Dies ist einer der großen Erfolge der Dirac-Theorie, entsprach dies doch dem damaligen experimentellen Wert.

In der Quantenfeldtheorie erhält man noch ein anderes Ergebnis, da man noch den Beitrag durch Strahlungskorrekturen berücksichtigen muss. Um das magnetische Moment zu berechnen, müssen Feynman-Graphen ausgewertet werden. Das magnetische Moment stellt die Stärke der Wechselwirkung mit einem äußeren Photonfeld dar[1]. Die zugehörigen Graphen in niedrigster Ordnung und mit einer Schleifenkorrektur sind in Abbildung 1 zu sehen.

[1] Dies wird in den Feynman-Graphen manchmal durch ein × am Ende der äußeren Photonlinie angedeutet



a **b**

Abbildung 1: Streuung eines Leptons an einem externen Photonfeld

Wertet man die Amplituden aus, so erhält man für den Graphen a nach einigen Umformungen[2]:

$$M^{(0)} = \bar{u}(p')\left((p'+p)^{\mu} - \frac{e}{2m}\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}\right)u(p)\varepsilon^{\mu}_{(\lambda)}(q)$$

mit

$q = p' - p$

$\sigma^{\mu\nu} = i/2\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right]$

Der linke Teil enthält nur externe Impulse, die nicht zum inneren magnetischen Moment beitragen. Der volle Anteil zu $g = 2$ muss also vom rechten Term stammen. Wertet man die Amplitude von Graph b aus, so erhält man unter anderem einen Term, der dieselbe Struktur wie der rechte Teil von $M^{(0)}$ hat:

$$\bar{u}(p')\left(-\frac{e\alpha}{4\pi m}\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}\right)u(p)\varepsilon^{\mu}_{(\lambda)}(q)$$

mit

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

[2] Entscheidend ist hierbei die Verwendung der Gordon Identität $\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{p'^{\mu}+p^{\mu}}{2m} + \frac{i\sigma_{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}\right]u(p)$.

Vergleicht man dies mit der Amplitude von a, so kann man die erste Ordnung der Korrektur des Landé-Faktors ablesen:

$$g = 2\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

Diese und höhere Ordnungen von Strahlungskorrekturen führen zum anomalen magnetischen Moment des Myons, welches definiert ist als

$$a_\mu = \frac{1}{2}(g-2).$$

Experimentelle Bestimmung des magnetischen Moments

Das genaueste Experiment zur Messung des anomalen magnetischen Moments des Myons findet am *Brookhaven National Laboratory* (BNL) unter dem Namen E821 statt.
Die Myonen werden in einen Speicherring injiziert. Zu Beginn, sind sie polarisiert, d. h. ihre Spins sind alle in Bewegungsrichtung ausgerichtet. Es kann nun gezeigt werden, dass sich die Spins im Magnetfeld mit einer anderen Frequenz drehen, als die Impulse, die sich mit der Zyklotronfrequenz drehen (siehe Abbildung 2). Die Differenz der beiden Größen definiert die anomale Präzessionsfrequenz $\vec{\omega}_a$. Wenn der Impuls senkrecht zum Magnetfeld steht, so ist diese gegeben durch

$$\vec{\omega}_a = \frac{e}{m}\left(a_\mu \vec{B} - \left(a_\mu - \frac{1}{\gamma^2-1}\right)\left(\vec{\beta}\times\vec{E}\right)\right) \tag{3}$$

mit den relativistischen Faktoren β und γ. Wählt man nun die Zyklotronfrequenz so, dass

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{a_\mu}+1} \approx 29{,}3\ ,$$

so vereinfacht sich (3) zu

$$\vec{\omega}_a = \frac{e}{m} a_\mu \vec{B}\,. \tag{4}$$

Dieser γ-Faktor gehört zum „magischen“ Myon-Impuls von 3,09 GeV/c. Das Experiment wird mit diesem Impuls betrieben, so dass man starke elektrische Quadrupolfelder verwenden kann, um die Myonen im Speicherring zu halten. Die Spin-Ausrichtung kann nun zeitaufgelöst gemessen werden:
Die Myonen zerfallen schwach:

$$\mu^\pm \to e^\pm \nu_\mu \bar{\nu}_e$$

Aufgrund der Paritätsverletzung in schwachen Zerfällen ist die bevorzugte Richtung des $e^{\pm}$ in Spinrichtung des Myons und man kann aus der messbaren Austrittsrichtung auf die Spinausrichtung der Myonen zum Zeitpunkt des Zerfalls schließen.

Man beachte, dass die anomale Präzessionsfrequenz (4) nur vom anomalen magnetischen Moment a_μ abhängt, nicht vom gesamten gyromagnetischen Verhältnis g. Es wird also direkt a_μ bestimmt, weshalb diese Art von Experiment auch *(g-2)*-Messung genannt wird. Dieser Umstand hat zur Folge, dass das anomale Moment um drei Größenordnungen genauer gemessen werden kann als wenn der Landé-Faktor direkt gemessen würde.

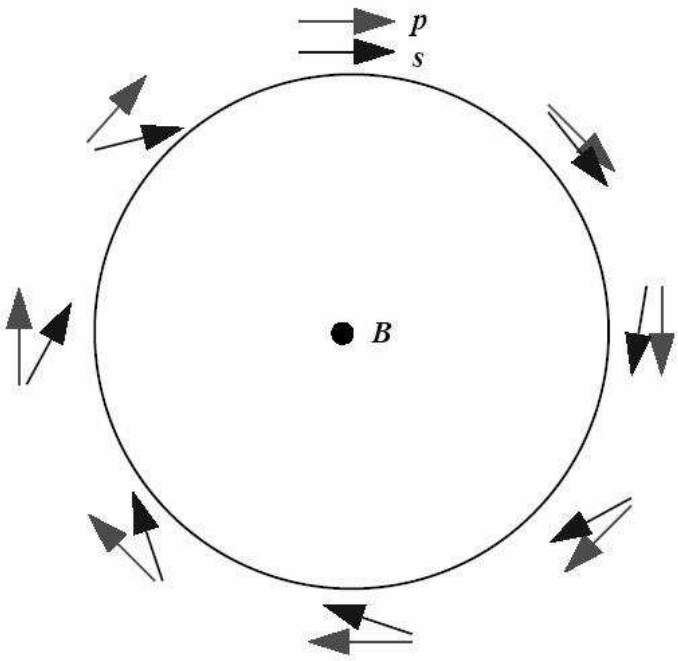


Abbildung 2: Illustration zur Ausrichtung des Spin- und Impulsvektors im Speicherring

Die Vorhersage des Standardmodells für a_μ

Da bei der Berechnung der zur Vorhersage von a_μ nötigen Gesamtamplitude alle Einzelamplituden der Feynman-Graphen addiert werden, ist es auch möglich, a_μ direkt durch Addition der anomalen magnetischen Momente zu bestimmen, die von den einzelnen Graphen vorhergesagt werden. Daher ist es möglich, die einzelnen Teile des Standardmodells getrennt zu betrachten.

QED-Beiträge zu a_μ

Die QED-Beiträge zum anomalen magnetischen Moment stammen aus den Feynman-Diagrammen, die nur Leptonen und Photonen enthalten. Das anomale magnetische Moment ist eine dimensionslose Größe und kann daher folgendermaßen aufgeteilt werden:

$$a_\mu^{QED} = A_1 + A_2\left(m_\mu / m_e\right) + A_2\left(m_\mu / m_\tau\right) + A_3\left(m_\mu / m_e, m_\mu / m_\tau\right)$$

A_1 ist dabei der Term den man aus Diagrammen nur mit Myonen und Photonen erhält, A_2 stellt die Beitrage aus Diagrammen dar, die zusätzlich Elektronen oder Tauonen enthalten und A_3 schließlich enthält Diagramme, in denen Elektronen und Tauonen vorkommen.
Man kann die einzelnen Terme nach Schleifenordnungen entwickeln, wobei man für jede Ordnung einen weiteren Faktor α/π bekommt.

$$A_i = A_i^{(2)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + A_i^{(4)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + A_i^{(6)}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \ldots$$

Erste Schleifenordnung

Das Diagramm niedrigster Ordnung wurde weiter oben in Abbildung 1 schon vorgestellt. Das Ergebnis ist wie schon gezeigt

$$A_1^{(2)} = 1/2 \qquad A_2^{(2)} = 0 \qquad A_3^{(2)} = 0$$

und wurde das erste Mal 1948 von Julian Schwinger berechnet.

Zweite und dritte Schleifenordnung

Die Beiträge aus Diagrammen mit zwei und drei Schleifen sind noch analytisch berechenbar. In zweiter Ordnung gibt es sechs verschiedene Diagrammtopologien (Abbildung 3), wobei einige allerdings doppelt gezählt werden müssen. Die resultierenden Koeffizienten wurden das erste Mal vor knapp 50 Jahren bestimmt.

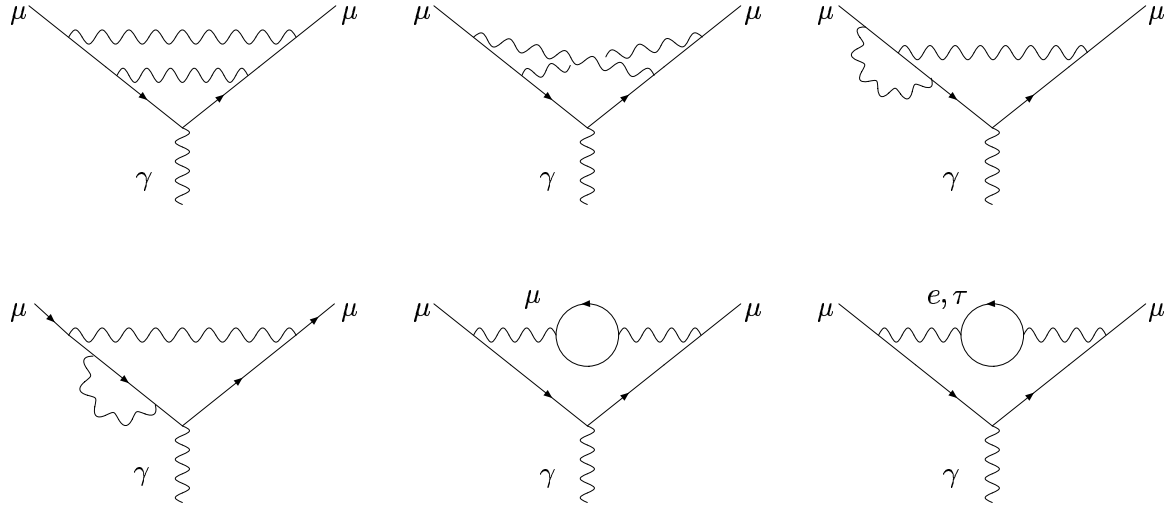


Abbildung 3: Diagramme zweiter Schleifenordnung in der QED

Die Analyse der über 100 Diagramme dritter Schleifenordnung dauerte über 30 Jahre und wurde erst 1999 abgeschlossen. In dieser Ordnung treten auch erstmals Diagramme mit Elektronen und Tauonen auf und liefern einen Beitrag zu A_3. Die Diagrammtopologien lassen sich in verschiedene Klassen einteilen, die in Abbildung 4 beispielhaft dargestellt sind.

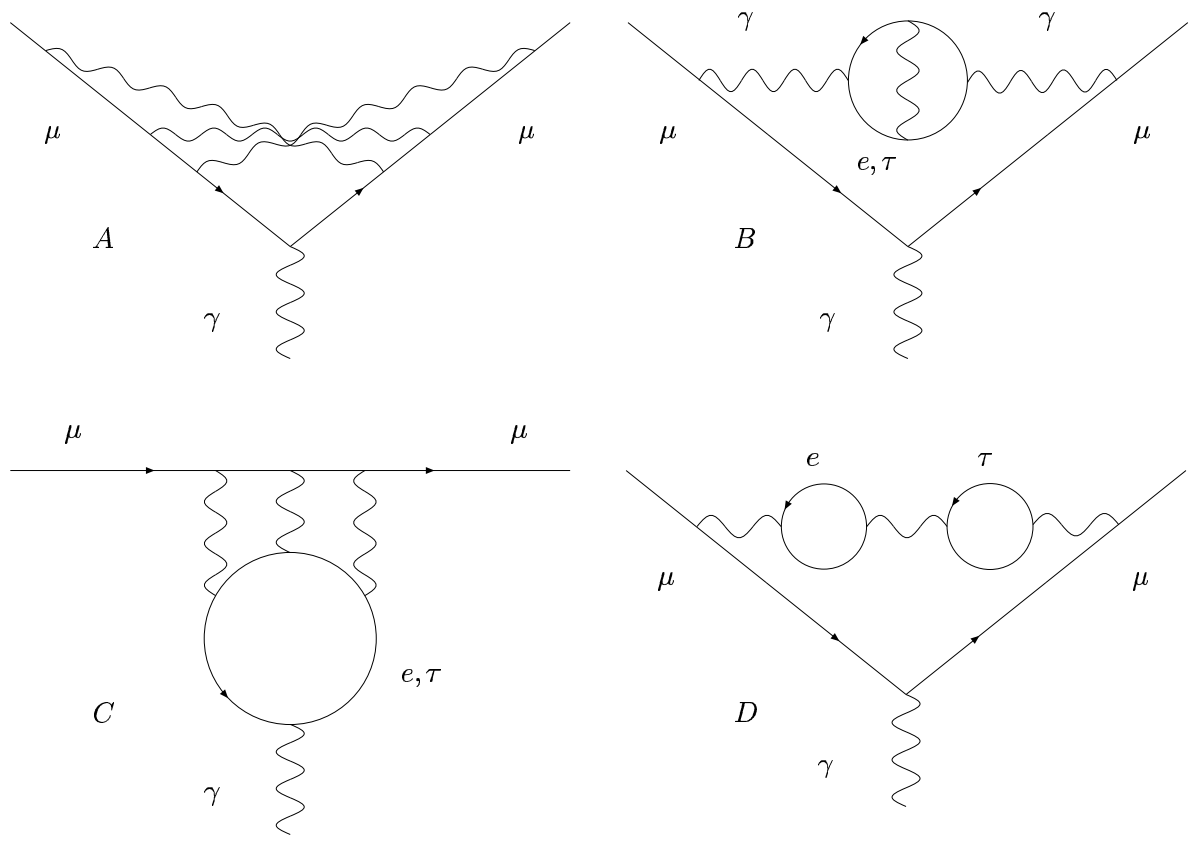


Abbildung 4: QED-Diagramme dritter Schleifenordnung: A ein Dreifach-Kreuz-Diagramm, B Diagramm mit e, τ Schleife aufgrund von Vakuumpolarisation, C Licht-an-Licht-Streuung, D ein Diagramm mit e und τ

Vier und fünf Schleifenordnungen

Auch wenn einige der über 1000 Diagramme vierter Schleifenordnung analytisch berechnet wurden, ist der gesamte Beitrag durch diese Ordnung bisher nur numerisch bekannt. Die ersten Ergebnisse wurden in den frühen 1980ern veröffentlicht, seitdem wurde durch gesteigerte Rechenleistung die Genauigkeit des Ergebnisses verbessert.
Die numerischen Rechnungen zu den 9080 Diagrammen fünfter Ordnung laufen noch, es sind nur einige vorläufige Abschätzungen bekannt (Stand September 2004).

Gesamter QED-Beitrag

Nimmt man alle bekannten Werte und die vorläufigen Ergebisse zur 5. Schleifenordnung zusammen und setzt den besten bekannten Wert für die Feinstrukturkonstante α ein, so erhält man einen Wert für den QED-Beitrag von

$$a_\mu^{QED} = 116584718,8(0,5)\times 10^{-11}$$

Der Fehler ist dabei eine Kombination aus dem numerischen Fehler, Ungenauigkeiten bei den Massenverhältnissen der Leptonen und dem Fehler von α.

Elektroschwache Beiträge

Selbst die größten elektroschwachen Beiträge zum anomalen magnetischen Moment sind um einen Faktor $(m_\mu/m_W)^2$ kleiner als die führenden QED-Beiträge. Jedoch ist dies noch im Bereich des Auflösungsvermögens der neuesten Experimente, weshalb auch diese Beiträge berücksichtigt werden müssen.

Beiträge erster Schleifenordnung

Die Berechnungen hierzu wurden schon vor über 30 Jahren durchgeführt, damals um die Endlichkeit dieser Beiträge und damit die Renormierbarkeit der Theorie zu bestätigen. Die beiden dafür wichtigsten Prozesse sind in Abbildung 5 gezeigt.
Dabei steht Φ für ein Goldstone-Boson, das sind jene Skalarteilchen, die im Rahmen des Higgsmechanismus aufgrund lokaler Eichsymmetrie weggeeicht werden konnten. Bei der Berechnung der Schleifenkorrekturen ist es aber günstiger eine Eichung zu wählen, in der die Goldstone-Bosonen wieder Masse haben.
Es gibt noch weitere Diagramme mit einer Schleife, nämlich eines mit zwei Goldstone-Bosonen und eines mit einer Higgs-Schleife. Es zeigt sich jedoch, dass diese um einen weiteren Faktor $(m_\mu/m_H)^2$ unterdrückt sind, weshalb sie bei der hier angestrebten Genauigkeit keine Rolle spielen.

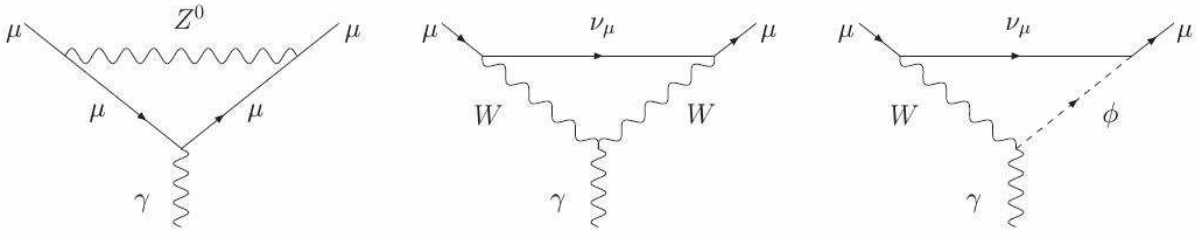


Abbildung 5: Wichtigste elektroschwache Beiträge erster Schleifenordnung

Höhere Ordnungen

Die elektroschwachen Beiträge zweiter Schleifenordnung zum anomalen magnetischen Moment wurden erstmals 1995 berechnet. Es war die erste vollständige Zwei-Schleifen-Berechnung die mit der elektroschwachen Theorie durchgeführt wurde, und bis heute sind nur wenige andere durchgeführt worden. Eigentlich hätte man erwarten können, dass die Beiträge dieser Ordnung ungefähr um einen Faktor α/π kleiner sind als die erster Schleifenordnung (und damit vernachlässigbar), jedoch zeigte es sich, dass einige Terme mit Faktoren $\ln(m_{Z,W}/m_f)$ (wobei m_f Massen von Fermionen sind) multipliziert werden, wodurch sie dieselbe Größenordnung wie die Beiträge aus der ersten Schleifenordnung bekommen.
In zweiter elektroschwacher Ordnung können auch hadronische Schleifen auftauchen. Die beiden zugehörigen Feynman-Graphen sind in Abbildung 6 dargestellt. In beiden Fällen steht man vor dem Problem, dass man es mit nicht-pertubativer QCD zu tun hat. Das linke Diagramm kann man jedoch auswerten, indem man experimentelle Daten zur Hilfe nimmt, wie genau das geht, wird im nächsten Kapitel beschrieben. Alternativ kann man auch mit einem Modell mit freien Quarks rechnen, der Unterschied zwischen den beiden Ergebnissen hat sich als unbedeutend erwiesen.

Das rechte Diagramm kann auch durch ein Modell mit freien Quarks angenähert werden, ist jedoch sehr viel schwieriger zu berechnen.
Insgesamt sind in der zweiten Schleifenordnung 1678 Diagramme auszuwerten und man stellt fest, dass der Beitrag durch die erste Schleifenordnung bei Berücksichtigung der zweiten Schleifenordnung um 21 % verringert werden muss.

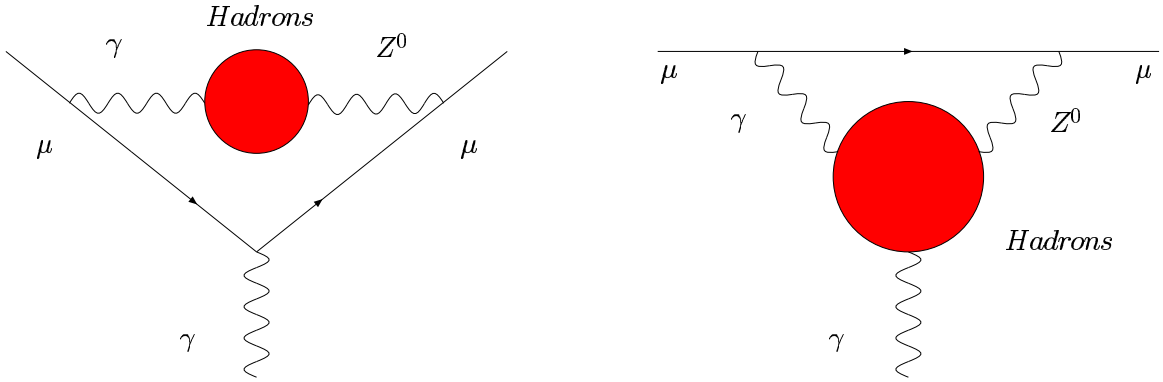


Abbildung 6: Hadronische Effekte in elektroschwachen Diagrammen zweiter Schleifenordnung

Aufgrund der überraschend großen Beiträge aus der zweiten Schleifenordnung ist es natürlich nötig, auch die dritte Ordnung abzuschätzen. Dies wurde mittels einer Renormierungsgruppenanalyse durchgeführt, wobei sich zeigte, dass diese Beiträge extrem klein (sogar konsistent mit Null) sind.

Wenn man alle diese Ergebnisse zusammenfasst, ergibt sich für eine Higgsmasse $m_H = 150$ GeV ein Wert von

$$a_\mu^{EW} = 154(1)(2)\times 10^{-11}.$$

Die erste Unsicherheit bei der Berechnung des elektroschwachen Anteils am anomalen magnetischen Moment ergibt sich dabei aus den Unsicherheiten bei der Berechnung der hadronischen Schleifen und die zweite aus der unbekannten Higgsmasse die man als zwischen 114 GeV und 250 GeV liegend einschätzt.

Hadronischer Anteil

Als letzter Anteil sollen Beiträge aus hadronischen Schleifen in QED-Diagrammen betrachtet werden. Hadronische Effekte in schwachen Wechselwirkungsbeiträgen wurden schon im letzten Kapitel einbezogen.

Effekte führender Ordnung

Der führende hadronische Anteil a_μ^{HLO} am magnetischen Moment ist auf Vakuumpolarisation des internen Photonpropagators im QED-Diagramm erster Schleifenordnung zurückzuführen. Dies ist in Abbildung 7 dargestellt.

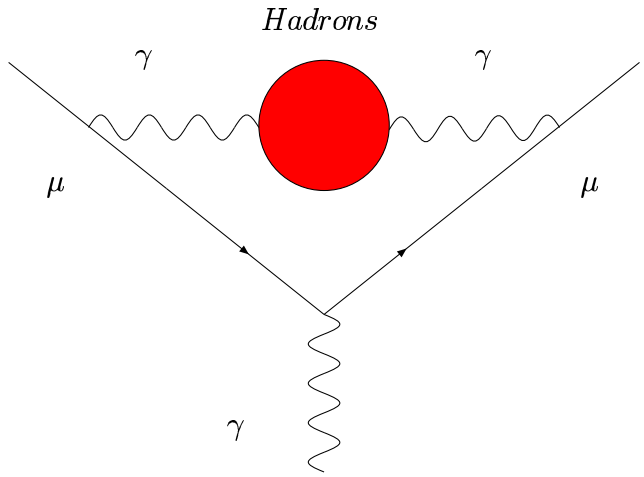


Abbildung 7: Führender hadronischer Anteil an a_μ

Das Problem ist, dass in der hadronischen Schleife beliebige QCD-Prozesse stattfinden können, auch solche mit geringen Energien oder großen Abständen, für welche die QCD-Störungsreihe nicht konvergiert. Jedoch gelang es Bouchiat und Michel 1961 zu zeigen, dass sich dieser Anteil aus experimentellen Daten berechnen lässt:

$$a_\mu^{HLO} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \mathrm{d}s\, K(s)\sigma^{(0)}(s)$$

Dabei ist $\sigma^{(0)}(s)$ der experimentelle Wirkungsquerschnitt von e^+e^--Paarvernichtung in hadronische Endzustände und *K(s)* ist der so genannte QED-Kernel, gegeben durch die Funktion

$$K(s) = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)s/m_\mu^2} \ .$$

Diese geht für große *s* wie 1/*s*, was bedeutet, dass die Daten $\sigma^{(0)}(s)$ für kleine *s* besonders wichtig sind. Leider gibt es bisher nur ein Beschleunigerexperiment, bei dem dieser Bereich mit hoher Präzision vermessen wurde. Für Bereiche hoher Energie kann auch wieder pertubative QCD angewendet werden.
Ein Problem ergibt sich dabei in der Datenaufbereitung, da mit $\sigma^{(0)}(s)$ der reine hadronische Wirkungsquerschnitt gemeint ist. Deshalb müssen die Daten aus den Beschleunigerexperimenten korrigiert werden. Das bedeutet, dass man die Strahlungskorrekturen bei den einlaufenden Elektronen/Positronen und dem internen Photonpropagator berechnen und abziehen muss. Dies ist zwar nicht einfach, das weitaus größere Problem sind aber Strahlungskorrekturen der hadronischen Endzustände. Diese werden mit Hilfe von skalarer QED (d.h. unter der Annahme punktförmiger Pionen) kalkuliert. Dieses Verfahren ist theoretisch umstritten, da so eine Modellannahme einfließt, die für die hier gewünschte Anwendung unerwünscht ist.

Vor einigen Jahren wurde gezeigt, dass man unter Annahme von Isospinsymmetrie a_μ^{HLO} auch mit den Spektralfunktionen von hadronischen Tauon-Zerfällen berechnen kann. Mit den

zusätzlichen Daten könnte man dann den Fehler verringern. Da Isospinsymmetrie aber nicht exakt gilt, müssen auch hier die Daten korrigiert werden.

Überraschenderweise geben die beiden Datensätze aber kein konsistentes Ergebnis! Abbildung 8 zeigt die beiden Datensätze im Vergleich. Angesichts der Übereinstimmung von verschiedenen Experimenten zu den einzelnen Datensätzen ist es wohl auszuschließen, dass Fehler in den Messergebnissen für die Diskrepanzen verantwortlich sind. Man vermutet jedoch, dass bei der Isospinkorrektur der τ-Daten nicht alle Effekte berücksichtigt wurden. Es wird aber auch spekuliert, dass vielleicht neue Physik der Grund für die Unterschiede sein könnte.
Wenn es um die Berechnung des anomalen magnetischen Moments des Myons geht, werden üblicherweise die Daten aus den Elektron-Positron-Wirkungsquerschnitten als die bessere Wahl betrachtet, da hier die theoretische Ableitung direkter ist und man der Korrektur der Messdaten stärker vertraut.

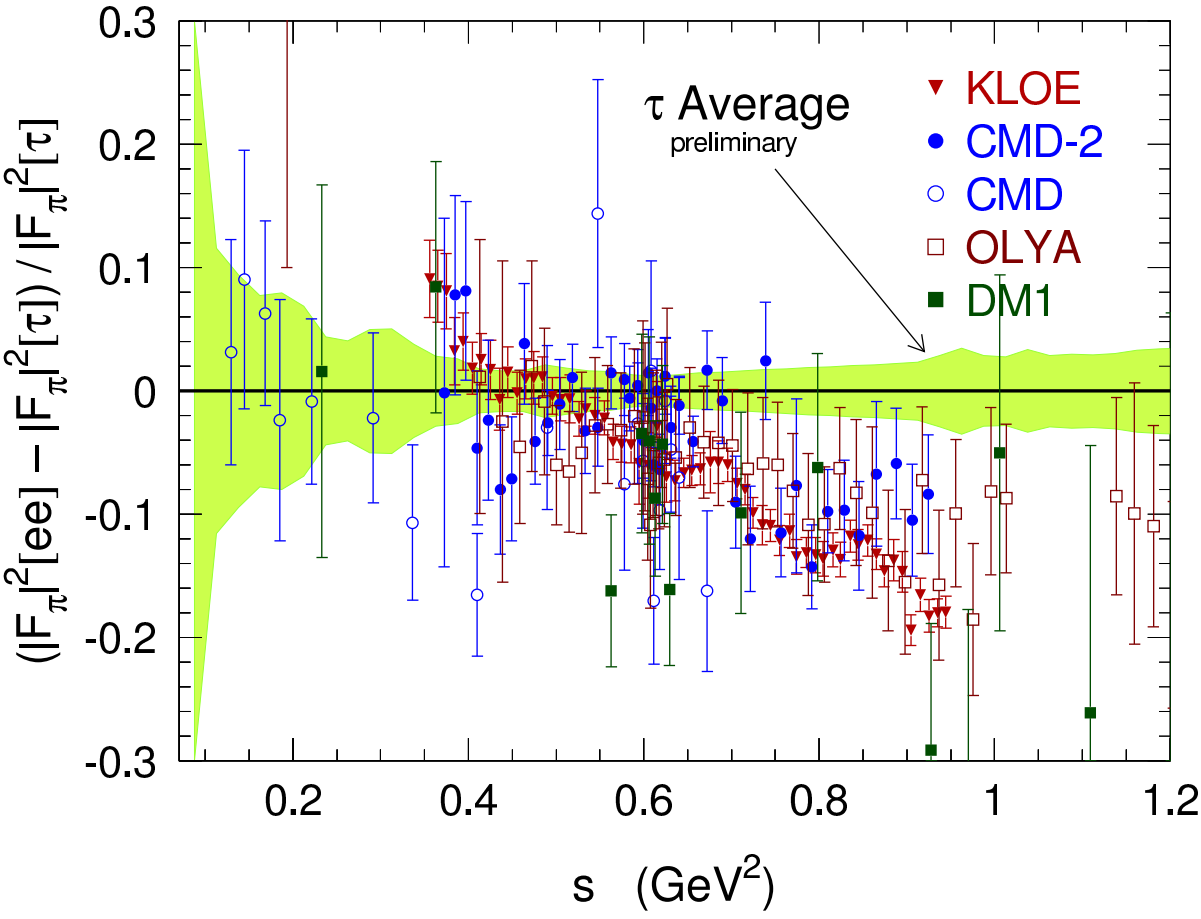


Abbildung 8: Vergleich zwischen Strukturfunktionen von e^+e^--Paarvernichtung und τ-Zerfällen

Setzt man die e^+e^--Daten an, so erhält man als numerisches Ergebnis

$$a_\mu^{HLO} = 6935(53)(35)\times 10^{-11}.$$

Dabei ist der erste Fehler experimentell und der zweite ist auf die Strahlungskorrekturen zurückzuführen.

Nimmt man die Daten aus den Tauon-Zerfällen, so erhält man hingegen

$$a_\mu^{HLO} = 7110(50)(8)(28)\times 10^{-11}.$$

Hier sind die ersten beiden Fehler wie oben, der dritte geht auf Unsicherheiten in der Korrektur der Isospinsymmetrie zurück.

Effekte höherer Ordnung

Beispiele für hadronische Diagramme höherer Ordnung sind in Abbildung 9 dargestellt. Die Diagramme A und B zeigen hadronische Vakuumpolarisationseffekte, die genauso behandelt werden können wie es im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde. Das Diagramm D zeigt zwar eine Topologie höherer Ordnung, jedoch sind solche Effekte bereits im vorherigen Abschnitt berechnet worden und zwar handelt es sich hier um eine der Strahlungskorrekturen die damals noch abgezogen wurden. Alle drei Diagramme bringen vom Prinzip der theoretischen Behandlung also nichts Neues. Anders jedoch Graph C, welcher hadronische Licht-an-Licht-Streuung zeigt.
Dieser Beitrag lässt sich nicht aus experimentellen Daten bestimmen, und man ist daher auf rein theoretische Überlegungen angewiesen. Die notwendigen Überlegungen sind überaus komplex und in frühere Berechnungen haben sich zudem auch einige Rechenfehler eingeschlichen, die dann zu spektakulären Unterschieden zwischen Theorie und Experiment führten. Im Laufe der Zeit hat der theoretische Beitrag aus dieser Sorte Diagramm schon dreimal das Vorzeichen gewechselt.
In Zahlen ausgedrückt ergibt sich für die Diagramme mit Vakuumpolarisation

$$a_\mu^{HHO}(vp) = -97,9(0,9)(0,3)\times 10^{-11}.$$

Wieder ist der erste Fehler experimentell und der zweite ist auf die Strahlungskorrekturen der e^+e^--Daten zurückzuführen. Der neueste Wert für die Licht-an-Licht-Streuung ist

$$a_\mu^{HHO}(lbl) = +163(25)\times 10^{-11}.$$

Man hofft in Zukunft die hadronischen Beiträge mit Gitter-QCD berechnen zu können. Die bisher mit dieser Methode erreichte Genauigkeit ist jedoch viel zu gering.

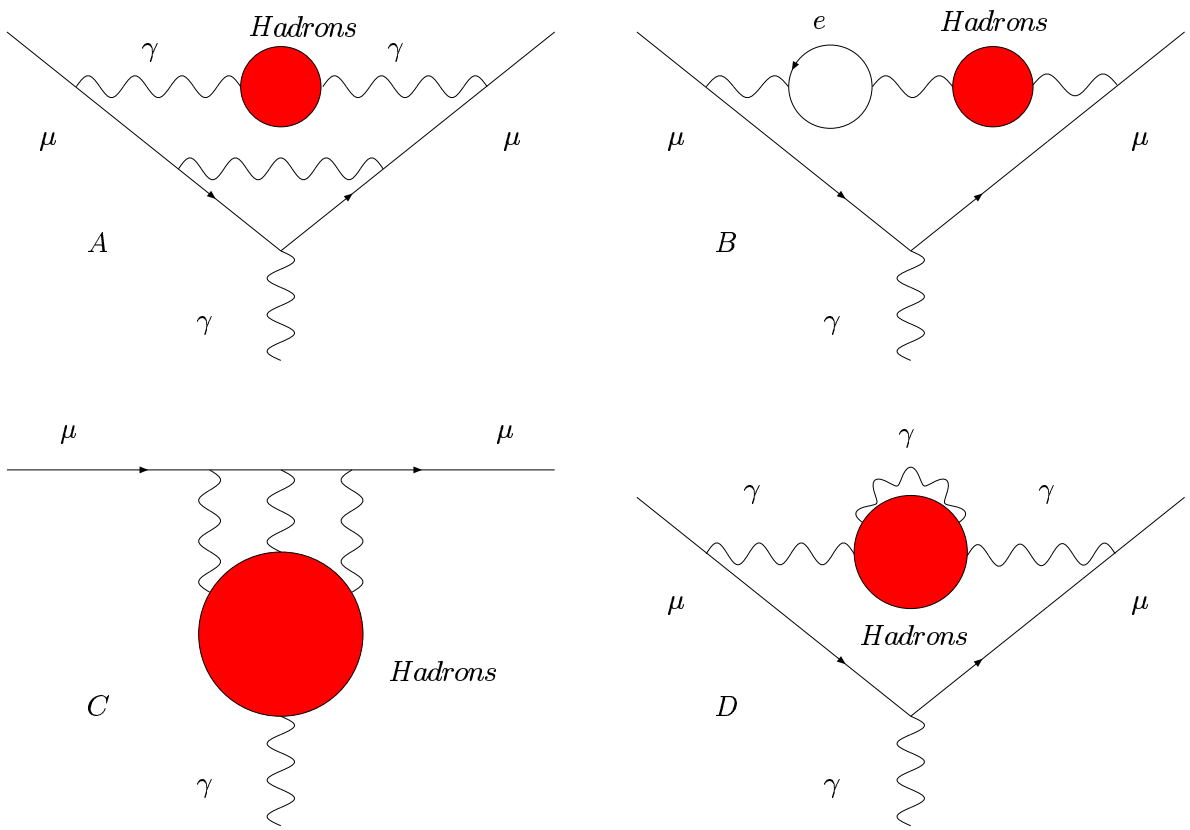


Abbildung 9: Diagramme höherer Ordnung mit Hadronen

Vergleich zwischen Theorie und Experiment

Nun sind also alle Beiträge des SM zum anomalen magnetischen Moment des Myons berechnet worden und man erhält eine Gesamtvorhersage durch

$$a_\mu^{SM} = a_\mu^{QED} + a_\mu^{EW} + a_\mu^{HLO} + a_\mu^{HHO}(vp) + a_\mu^{HHO}(lbl).$$

Das letzte Ergebnis (Februar 2004) der Messung am BNL ergab ein anomales magnetisches Moment von

$$a_\mu(\text{exp}) = 116592080(60) \times 10^{-11} (0{,}5\text{ppm}).$$

Dabei ist der erste Fehler statistisch, der zweite systematisch. Ein Vergleich mit den besten theoretischen Werten ergibt:

$a_\mu^{SM} \times 10^{11}$	$(a_\mu^{EXP} - a_\mu^{SM}) \times 10^{11}$	σ	Datensatz
116591845(69)	235 (91)	2,6	e^+e^-
116592018(63)	62 (87)	0,7	τ
116591938(54)	142(81)	1,8	e^+e^-, τ

Die dritte Spalte gibt dabei den Unterschied in Standardabweichungen an, die vierte Spalte zeigt, mit welchem experimentellen Material der hadronische Anteil kalkuliert wurde. Die

Ergebnisse sind auch noch einmal graphisch in Abbildung 10 zu sehen. Man erkennt eine Übereinstimmung von Experiment und Theorie für den Fall, dass man die τ Daten benutzt. Allerdings wird wie schon erwähnt der Wert aus den e^+e^--Daten als der direktere und damit bessere angesehen. Und hier ergibt sich ein deutlicher Unterschied von 2,6 Standardabweichungen, d.h. die Wahrscheinlichkeit für eine zufällige Abweichung ist geringer als 1%. Dies scheint also ein deutliches Anzeichen für Physik jenseits des Standardmodells zu sein.
Das Experiment am BNL ist noch nicht ganz ausgereizt, man könnte durch eine weitere Messreihe den Fehler weiter verringern, wodurch sich deutlicher zeigen sollte, ob man hier tatsächlich um eine Abweichung vom Standardmodell gefunden hat. Eine weitere Messung ist zwar geplant, aber es wurden bisher nicht die nötigen finanziellen Mittel bewilligt.

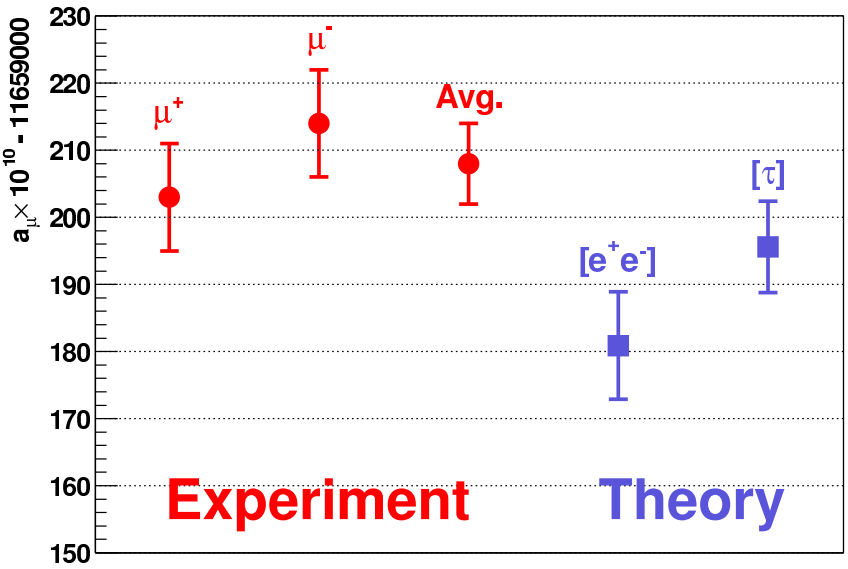


Abbildung 10: Vergleich von Experiment und Theorie

Mögliche Beiträge zu a_μ aus neuer Physik

Woher könnten die beobachteten Abweichungen stammen? Es sollen hier aus den möglichen Erklärungen drei genauer vorgestellt werden: Myon-Substruktur und elektrisches Dipolmoment, da sie lehrreiche sind und Supersymmetrie, da diese eine sehr beliebte Theorie ist.

Myon-Substruktur

Die anomalen magnetischen Momente von Neutron und Proton kommen zustande, da diese aus Quarks zusammengesetzt sind. Man kann nun ein Modell entwerfen, in dem die verschiedenen Leptongenerationen zustande kommen, da die Leptonen aus sogenannten Preonen zusammengesetzt sind. Analog zu den Hadronen sollte man Beiträge zum magnetischen Moment durch diese Substruktur erwarten.
Es zeigt sich jedoch dass sich in einem solchen Modell Effekte führender Ordnung wegkürzen müssen, da diese sonst zu unphysikalischen Massen des Myons führen würden. Dies kann erreicht werden, indem man eine Wellenfunktion mit chiraler Symmetrie konstruiert, in der sich die links- und rechtshändigen Wechselwirkungsterme exakt kürzen.

Abbildung 11 zeigt mögliche Feynman-Graphen, die aus einer Myon-Substruktur folgen. In (a) ist der Effekt niedrigster Ordnung zu sehen, der wegfallen muss. Teil (b) zeigt einen Graphen, in dem man einen Formfaktor für jeden Myon-Photonvertex bekommt. In (c) wird die Möglichkeit angeregter Myonzustände μ* gezeigt und (d) veranschaulicht, dass auch Vertizes mit vier Myonen möglich sind.

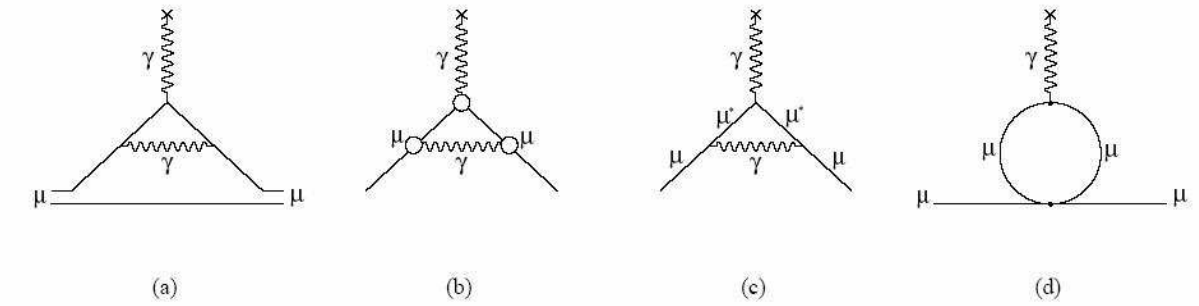


Abbildung 11: Feynman-Graphen für ein Preonenmodell

Durch Experimente hat man feststellen können, dass die typische Massenskala für die verantwortliche Wechselwirkung (wenn es sie denn gibt) mehr als einige TeV betragen muss.

Supersymmetrie

Um gewisse Schwierigkeiten bei der Feineinstellung von Parametern im Standardmodell zu vermeiden, wurde das Modell der Supersymmetrie entwickelt. Es wird eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen postuliert, was zu ungefähr doppelt so vielen Teilchen wie im Standardmodell führt und wodurch sich die angedeuteten Schwierigkeiten von alleine auflösen. Bis jetzt gibt es keinerlei experimentelle Befunde, die supersymmetrische Teilchen nachweisen, weshalb die Symmetrie gebrochen sein muss, damit die supersymmetrischen Teilchen viel schwerer sind als die des bisherigen Standardmodells.
Trotz ihrer großen Masse können supersymmetrische Teilchen natürlich in Schleifenkorrekturen auftauchen. Abbildung 12 zeigt die beiden Beiträge niedrigster Ordnung. Die Teilchen $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\nu}$ sind die Partner des Myons und des Neutrinos, das SMyon und das Sneutrino. Die Symbole $\tilde{\chi}^{\pm}$ und $\tilde{\chi}^{0}$ sind so genannte Charginos und Neutralinos, welche Linearkombinationen der Bosonpartner Photino, Zino, Wino und Higgsino darstellen.
In Supersymmetrischen Modellen gibt es sehr viele freie Parameter. So hat das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM) 105 Parameter mehr als das Standardmodell. Zum Glück werden davon nur wenige für die Korrekturen niedrigster Ordnung gebraucht, so dass die präzisen Messergebnisse am BNL Grenzen für diese Parameter festlegen.

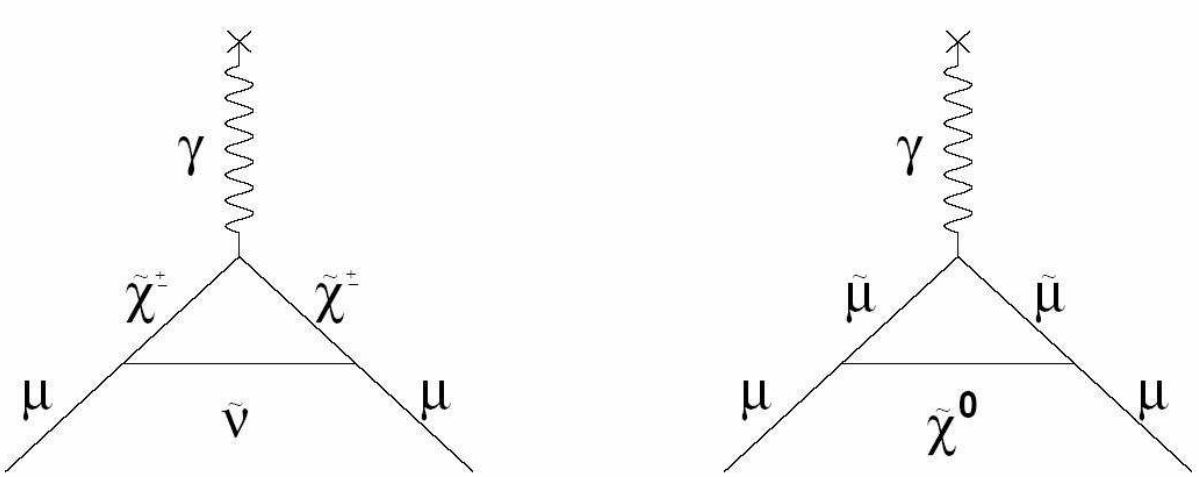


Abbildung 12: Supersymmetrische Beiträge niedrigster Ordnung

Elektrisches Dipolmoment

Wenn das Myon ein elektrisches Dipolmoment d_μ hätte, würde dies die Präzessionsfrequenz (4) beeinflussen. Man müsste einige Terme hinzufügen:

$$\Delta\vec{\omega}_a = -2d_\mu\vec{\beta}\times\vec{B} - 2d_\mu\vec{E}$$

Der zweite Term sollte zwar vernachlässigbar klein sein, da die elektrischen Felder sehr schwach sind, der erste sollte jedoch einen Beitrag liefern, außerdem ist $\beta \approx 1$. Daher ergibt sich insgesamt

$$\omega_a = B\sqrt{\left(\frac{e}{m}a_\mu\right)^2 + \left(2d_\mu\right)^2}\,.$$

Man würde beim Experiment also gar nicht a_μ messen, sondern einen gestörten Wert.
Um elektrisches Dipolmoment für ein Elementarteilchen zu erklären, benötigt man sowohl P-, als auch T-Verletzung. Dies liegt daran, dass der Dipoloperator als vektorielle Größe geschrieben werden kann. Im Ruhesystem des Teilchens ist der Spin die einzige andere vektorwertige Eigenschaft. Die beiden müssen also proportional sein. Nun ist der Spin aber antisymmetrisch unter T und symmetrisch unter P, wohingegen man zeigen kann, dass dies beim elektrischen Dipolmoment genau anders herum ist.
Da CPT in Quantenfeldtheorien nicht gebrochen ist, ist die T-Verletzung gleichbedeutend mit einer CP-Verletzung. Eine mögliche Quelle für CP-Verletzung im Standardmodell sind die komplexen Phasen in der CKM-Mischmatrix. Dieser Effekt wurde theoretisch berechnet und es ergab sich der sehr kleine Wert von

$$d_\mu^{SM} = -3\times10^{-36}\,e\cdot cm\,.$$

Der Wert ist so klein, da CP-verletzende Diagramme erst ab drei Schleifenordnungen auftreten. In supersymmetrischen Modellen allerdings gibt es auch schon mögliche CP-Verletzung in Ein-Schleifen-Diagrammen. Tatsächlich wurde experimentell ein Wert von

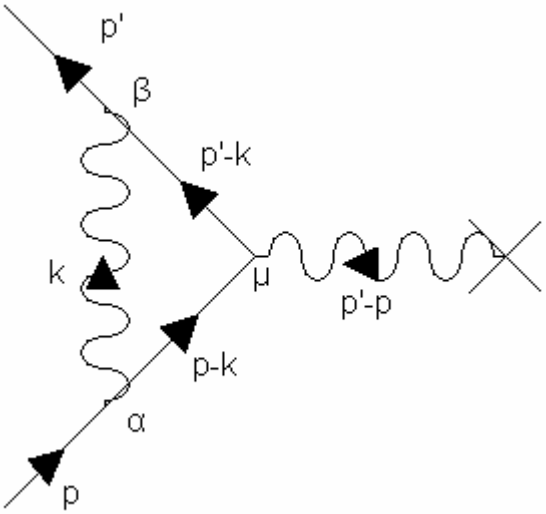
$$d_\mu = (3,7 \pm 3,4) \times 10^{-19} e \cdot cm$$

gefunden. Man beachte jedoch, dass der Wert sich nur um 1,09 Standardabweichungen von Null, bzw. dem theoretischen Standardmodellwert unterscheidet. Das bedeutet, dass es sich mit 27 % Wahrscheinlichkeit auch um eine zufällige Abweichung von diesen Werten handeln könnte.

Anhang: Dimensionale Regularisierung

Motivation

Der zur ersten Schleifenordnung des magnetischen Moments eines Leptons gehörige Graph:



Wendet man die Feynman-Regeln an, erhält man für die Amplitude den Ausdruck

$$M = ie^3 \overline{u}(p') I^\mu(p', p) u(p) \varepsilon^\mu_{(\lambda)}(p' - p)$$

mit dem Integral

$$I^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 k \frac{1}{k^2} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\alpha$$

Dieses Integral ist gleich auf zwei Weisen divergent. Zum einen befinden sich Pole auf der reellen Achse, diese kann man aber durch komplexe Integration umgehen:

$$I^{\mu}(p',p)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\gamma^{\alpha}\,\frac{1}{\not p'-\not k-m+i\varepsilon}\gamma^{\mu}\,\frac{1}{\not p-\not k-m+i\varepsilon}\gamma_{\alpha}$$

Zum anderen geht der Nenner des Integrals wie k^4, der Zähler geht aber wie k^3 (um dies zu sehen denke man sich die Integration in Kugelkoordinaten über den Minkowskiraum), das heißt der Integrand geht insgesamt wie $1/k$ und das Integral ist daher logarithmisch divergent. Solche Divergenzen sind ganz typisch für Schleifenkorrekturen in der QED. Eine Möglichkeit damit zurechtzukommen wird im folgenden beschrieben.

Dimensionale Regularisierung

Ziel dieser Methode ist es, den divergenten Teil des Integrals I zu separieren, so dass zumindest Differenzen von zwei Integralen dieser Art endlich werden. Die nötigen Schritte sollen hier anhand eines sehr konstruierten aber dadurch auch sehr einfachen Beispiels erklärt werden.

Betrachte dazu folgendes Standardintegral:

$$\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\left(k^2+s+i\varepsilon\right)^n}=i\pi^2\frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)}\frac{1}{s^{n-2}}\qquad \text{für } n\geq 3$$

Man kann dieses Integral auch für eine allgemeine Dimension D schreiben als

$$\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{\left(k^2+s+i\varepsilon\right)^n}=i\pi^{D/2}\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}D\right)}{\Gamma(n)}\frac{1}{s^{n-D/2}}\ . \tag{5}$$

Angenommen man möchte nun folgendes Integral lösen:

$$\Pi(s)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{\left(k^2+s+i\varepsilon\right)^2}$$

Diese vierdimensionale Integration ist wieder logarithmisch divergent. Daher verringert man die Dimension nun ein klein wenig und wendet (5) an. Es ergibt sich:

$$\Pi_{\eta}(s)=\int\frac{\mathrm{d}^{4-\eta}k}{\left(k^2+s+i\varepsilon\right)^2}=i\pi^{2-\eta/2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\eta\right)}{\Gamma(2)}s^{-\eta/2}$$

Nun lässt man η klein werden und kann entwickeln:

$$s^{-\eta/2} = 1 - \tfrac{1}{2}\eta \ln(s) + \ldots$$
$$\Gamma\left(\tfrac{\eta}{2}\right) = \tfrac{\eta}{2} - \gamma + \ldots$$

mit der Euler-Konstante $\gamma = 0{,}5772\ldots$
Somit erhält man

$$\Pi_\eta(s) = i\frac{2\pi^2}{\eta} - i\pi^2\left(\gamma + \ln(s)\right)$$

und hat somit das Ziel erreicht. Denn nun sind Differenzen auch für $\eta \to 0$ definiert:

$$\lim_{\eta\to 0}\left(\Pi_\eta(s) - \Pi_\eta(s_0)\right) = -i\pi^2 \ln\left(s/s_0\right)$$

Dieses Beispiel war natürlich sehr einfach, da das zu lösende Integral schon mit dem bekannten Standardintegral identisch war. Für allgemeine Rechnungen (z.B. für die Einschleifen-Korrektur des magnetischen Moments) braucht man weitere Standardintegrale. Diese haben alle die Eigenschaft im Nenner eine Summe zu haben mit der quadrierten Integrationsvariable als einem Summanden, die im ganzen hoch n genommen wird. Normalerweise sind die Amplituden die man mit den Feynmanregeln erstellt natürlich nicht in solch einer Form, doch mit einem kleinen mathematischen Kunstgriff kann man sie leicht umformen.

Feynman-Parametrisierung

Man geht von folgender Gleichung aus:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{d}t\,\frac{1}{t^2} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{ab} \tag{6}$$

Führt man den Feynman-Parameter

$$z = \frac{t-b}{a-b}$$

ein, kann man (6) auch so schreiben:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \mathrm{d}z\,\frac{1}{\left(b + (a-b)z\right)^2}$$

Mittels Induktion kann man zeigen, dass sich diese Formel auch für n Faktoren schreiben lässt:

$$\frac{1}{a_0 a_1 a_2 ... a_n} = \Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 ... \int_0^{z_{n-1}} dz_n \frac{1}{\left(a_0 + (a_1 - a_0) z_1 + ... + (a_n - a_{n-1}) z_n\right)^{n+1}}$$

Zur Illustration wie einem diese Umformung helfen soll, obwohl sie auf den ersten Blick verkomplizierend erscheint, ein Beispiel:

Gegeben sei das Integral

$$\int d^D k \frac{1}{\left(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon\right)\left((p'-k)^2 - m + i\varepsilon\right)\left((p-k)^2 - m + i\varepsilon\right)} .$$

Dieses Integral passt überhaupt nicht zu dem Standardintegral (5). Verwendet man aber nun die Feynman-Parametrisierung für den Fall $n = 3$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{\left(a + (b-a)x + (c-a)z\right)^3} ,$$

so erhält man

$$\int d^D k \frac{1}{\underbrace{\left(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon\right)}_{a} \underbrace{\left((p'-k)^2 - m + i\varepsilon\right)}_{b} \underbrace{\left((p-k)^2 - m + i\varepsilon\right)}_{c}}$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int d^D k \frac{1}{\left(k^2 - 2k(p'x + pz) - r + i\varepsilon\right)^3}$$

mit

$$r = \lambda^2 (1 - x - z) - x\left(p'^2 - m^2\right) - z\left(p^2 - m^2\right)$$

und man kann wieder (5) anwenden.

Für eine Liste der Standardintegrale, einige Worte zu ihrer Herleitung, detailliertere Beispiele und eine Erklärung des Zusammenhangs zwischen dem hier zuletzt verwendeten Beispiel mit der Amplitude der Einschleifen-Korrektur des magnetischen Moments, empfehle ich die Lektüre von Mandl, Shaw: **Quantum Field Theorie**, John Wiley & Sons Ltd. 1984.