

[ Abgabe 12.6. in der Vorlesung; Besprechung 15.6. in den Übungen ]  
 [ Ü: 8-10 (D01-249); 10-12 (D01-112A, D2-240, D3-203); 12-14 (C01-252, D6-135) ]

**\*Aufgabe\* 30:** ((3+3)+4=10 Punkte)

(a) Ein Teilchen befinde sich in einem Zustand mit Wellenfunktion  $\psi(\vec{r}) = C(x + y + 2z)e^{-\alpha r}$ , wobei  $C, \alpha$  Konstanten sind und  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

(a1) Ist die Wellenfunktion  $\psi$  ein Eigenzustand von  $\hat{L}^2$ ? Wenn ja, zu welchem Eigenwert?

(a2) Zeigen Sie, dass sich bei Messung der z-Komponente des Drehimpulses die Werte  $m\hbar$  mit Wahrscheinlichkeiten  $P(m = 0) = \frac{2}{3}$  und  $P(m = \pm 1) = \frac{1}{6}$  ergeben.

[Hinweis: Die Kugelflächenfunktionen aus Aufgabe 27b könnten hilfreich sein:

$$Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(\vartheta), \quad Y_{1\pm 1}(\vartheta, \varphi) = \mp \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\varphi} \sqrt{\frac{3}{4}} \sin(\vartheta) .]$$

(b) Betrachten Sie ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, das sich im Zustand  $|\psi\rangle = \alpha|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  befindet (wobei  $\alpha, \beta$  Konstanten sind). Was ist  $\langle \hat{S}_2^2 \rangle$ , falls in diesem Zustand  $\langle \hat{S}_3 \rangle = 0$  gilt?

**Aufgabe 31:**

Der Hamilton-Operator eines Systems sei

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) .$$

Wie in der Vorlesung erwähnt, nennt man in der Quantenmechanik ein System kugelsymmetrisch, falls  $\hat{H}$  mit allen Generatoren der Drehungen vertauscht, also  $[\hat{H}, \hat{L}_j] = 0$  für  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Unter welchen Bedingungen ist dies der Fall?

**Aufgabe 32:**

Betrachten Sie ein System aus zwei Spin-1 Teilchen, mit Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \alpha + \beta \hat{S} \cdot \hat{S}' + \gamma(\hat{S}_3 + \hat{S}'_3) ,$$

wobei  $\alpha, \beta, \gamma$  Konstanten sind. Finden Sie die Energie-Eigenwerte des Systems.

[Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Menge der Operatoren, die mit  $\hat{H}$  vertauschen.]

Gibt es Entartung (also mehrfach vorkommende Eigenwerte)?