

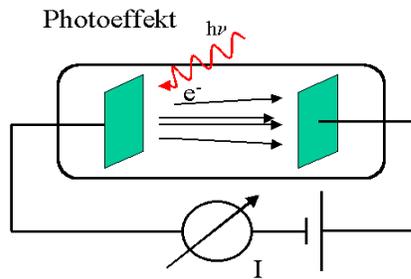
### 3. Einstein, de Broglie, Compton, Davisson, Germer und der **Welle –Teilchen-Dualismus**



Albert Einstein 1879 - 1955, im Jahr 1912

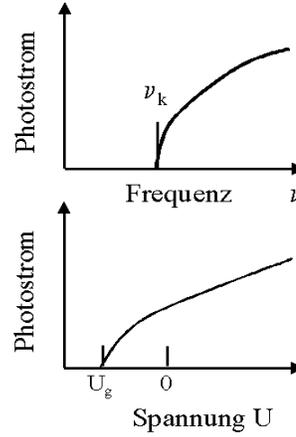
Einstein war der erste, der die **Quanten** Plancks und die Formel  $E = h \nu$  für die Energie  $E$  eines Photons mit der Schwingungsfrequenz  $\nu$  ernst nahm und sie zur Deutung des bisher völlig unverstandenen **Photoeffekts** benutzte. In seinem 'annus mirabilis', 1905, in dem er als Sachbearbeiter 3. Klasse beim Schweizer Patentbüro 'Bundesamt für geistiges Eigentum' in Bern arbeitete, reichte er drei Veröffentlichungen ein, die alle später berühmt werden sollten: eine Arbeit über die '**Spezielle Relativitätstheorie**', eine zweite über die '**Brownsche Bewegung**', in der er diese als das Ergebnis stochastischer Molekülstöße quantitativ erklären konnte und schließlich eine dritte über den **Photoeffekt** (hierfür, aber nicht für die Relativitätstheorie(en) erhielt er 1921/22 den Nobelpreis für Physik).

Der **Photoeffekt** war bis 1905 ein Rätsel für die Physiker, da er mit den allgemein akzeptierten Welleneigenschaften eines Photons nicht in Einklang zu bringen war:



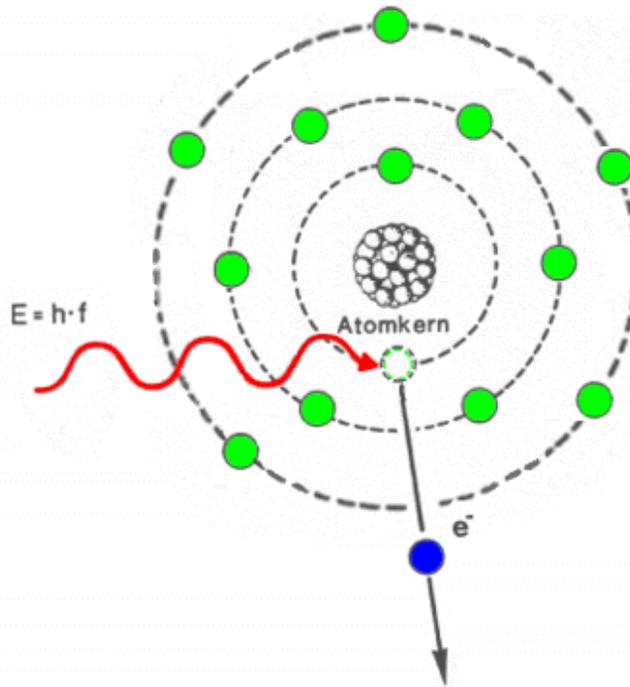
**Beobachtung**

- unterhalb  $\nu_k$  kein Stromfluss
- wenn Stromfluss, dann  $\sim$  Lichtintensität
- Stromfluss startet ohne Zeitverzögerung
- kinetische Energie der Elektronen hängt von Lichtfrequenz, nicht von Lichtintensität ab



Einstein 1905:

$$E = h \nu$$



$$E_{e^-} = h \nu - |B_{e^-}| \quad (3.1)$$

Die **Energie** der Elektronen ( $E_{e^-}$ ) ist gleich der Energie des Photons ( $h\nu$ ) minus der Bindungsenergie des Elektrons im Atom ( $B_{e^-}$ ) [bzw. im (leitenden) Festkörper minus der 'Austrittsarbeit'  $U_a$ .]

Der **Photoeffekt** besteht in der Emission von Elektronen beim Beschuss von (Metall) Oberflächen durch Photonen. Völlig rätselhaft war dabei, dass die kinetische **Energie** der herausgeschlagenen **Elektronen** von der **Frequenz**, aber **nicht** von der Intensität des Lichts abhängt, und dass die Elektronen 'sofort' erscheinen. Im Wellenbild dagegen ist die Energie mit der Amplitude (Intensität) der elektromagnetischen Schwingung des Photons verknüpft, und verteilt über den ganzen Ausdehnungsbereich der Welle. Einstein löste diesen gordischen Knoten mit Hilfe der neuen Quantenvorstellung Plancks, indem er die **Energie E** eines Photons **proportional** zu dessen **Frequenz  $\nu$**  ansetzte, gemäß  **$E = h \nu$** , wobei er in revolutionärer Weise **Teilcheneigenschaften** mit **Welleneigenschaften** verknüpfte.

Im **Photoeffekt** 'zeigt' das Photon eher den Aspekt eines '**punktförmigen Teilchens**' als den Wellenaspekt. In vielen anderen Experimenten (Interferenz!) zeigt es dagegen eher die Charakteristika einer ausgedehnten Welle (Phase!). Somit weist es eine fundamentale **Dualität** auf. Die Frage, ob es Teilchen **oder** Welle ist, hat daher die Antwort: **Je nachdem!**

## Welleneigenschaften

räumliche **Ausdehnung**

Wellenlänge  $\lambda$  ; Wellenzahl  **$k = 2\pi/\lambda$**

Frequenz  $\nu$

Phase  $\varphi$

Amplitude

## Teilcheneigenschaften

**punktförmig**

Impuls **p**

Masse **m**; Ruhemasse  **$m_0$**

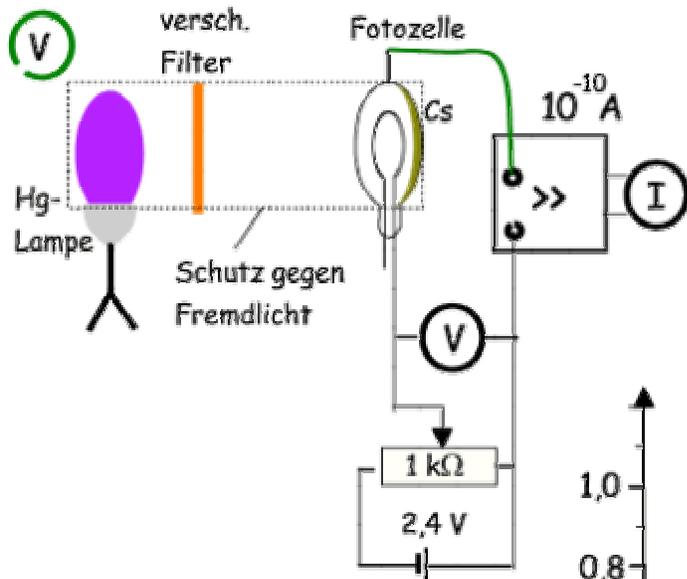
Energie  **$E = \{(pc)^2 + (m_0c^2)^2\}^{1/2}$**

**$E = \gamma m_0 c^2$** ;  $\gamma = \{1 - \beta^2\}^{-1/2}$

## Interferenz

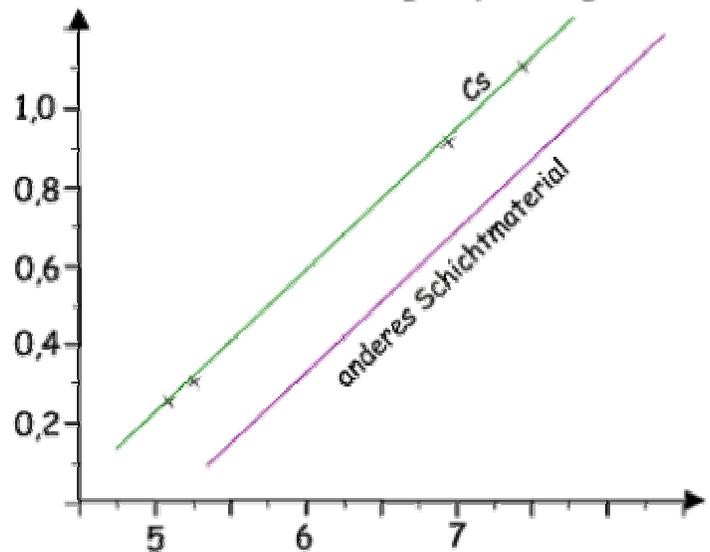
Der **Photoeffekt**, die **Absorption eines Photons durch ein gebundenes Elektron**, (Übungsaufgabe: warum kann ein **freies** Elektron ein Photon **nicht** absorbieren bzw. emittieren?) ist einer der wichtigsten physikalischen Elementarprozesse, der über einen weiten Bereich des elektromagnetischen Spektrums eine große Rolle spielt.

Im sichtbaren Bereich ist die technische Anwendung in Form der **Photozelle** allgemein bekannt; für nicht zu harte **Röntgenstrahlung** (< 100 keV) ist der **Photoeffekt** der **wichtigste Absorptionsprozess** (Absorption durch stark gebundene Elektronen, i.w. aus der K- und L-Schale der Atome). In Sternplasmen spielt der zeitgespiegelte Prozess, die '**radiative Rekombination**', eine wesentliche Rolle (ein freies Elektron des Plasmas geht unter Emission eines Photons in einen gebundenen Zustand der ionisierten Atome).



- Einsetzen eines Filters
- Erhöhung der Gegenspannung am Schiebewiderstand
- bis Stromstärke auf 0 gesunken
- Ablesen der Gegenspannung

$\lambda$ in nm	$\nu$ in $10^{14}$ Hz	U in V
578	5,2 (gelb)	0,25
546	5,5 (grün)	0,30
436	6,9 (blau)	0,92
405	7,4 (UV)	1,1



Moderner Versuch zum **Photoeffekt** mit verschiedenen Wellenlängen der Photonen und verschiedenem Schichtmaterial. Aufgetragen ist die (negative) Gegenspannung (in Volt) an der Photozelle gegen die Frequenz  $\nu$  der Photonen (Einheit =  $10^{14}$  Hz). Aus dem (identischen) **Anstieg** der parallelen Geraden ergibt sich das **Plancksche Wirkungsquantum  $h$** , aus den (unterschiedlichen) **x-Achsenabschnitten** die materialspezifische **'Austrittsarbeit'  $U_A$** , gemäß  $E_e = h\nu - U_A$ .

## 'Materiewellen' (Einstein und de Broglie):

(Photon = 'Teilchen' mit  $m_0 = 0$ )      (Teilchen = 'Welle' mit  $\lambda = h/p$ )

$$E = h \nu = pc$$

$$\lambda \nu = c$$

$$pc = \{E^2 - (m_0c^2)^2\}^{1/2}$$

$$\lambda = h/p = hc/pc$$

$$\rightarrow \lambda = c/\nu = hc/E$$

$$\rightarrow \lambda = hc / \{E^2 - (m_0c^2)^2\}^{1/2} \quad (3.2)$$

Die 'beiden  $\lambda$ ' in Gl. (3.2) sind identisch für  $m_0 = 0$ , d.h.  $E = pc$   
 $\{hc \approx 4\pi \times 10^8 \text{ [eV x fm]}; \hbar c \approx 2 \times 10^8 \text{ [eV fm]}\}$



Louis de Broglie 1892 - 1987

### Beispiele für de Broglie-Wellenlängen ('Ausdehnung') von Teilchen:

a) **Elektron** mit  $E_{\text{kin}} = 511 \text{ keV} = m_0c^2$  (Elektron);  $E = 2 m_0c^2(e) = 1,02 \text{ MeV}$

$$pc = \{E^2 - (m_0c^2)^2\}^{1/2} = m_0c^2 \sqrt{3} = 8,85 \cdot 10^5 \text{ eV} \rightarrow \lambda = 4\pi \cdot 10^8 / (8,85 \cdot 10^5) = 1420 \text{ fm}$$

b) **Elektron** mit  $E_{\text{kin}} = 51,1 \text{ eV} = 10^{-4} m_0c^2$ ;  $E = E_{\text{kin}} + m_0c^2 = 511 \text{ 051,1 eV}$

$$pc \approx 0,014 m_0c^2 = 7227 \text{ eV} \rightarrow \lambda \approx 174 \text{ 000 fm} = 1,74 \text{ \AA}$$

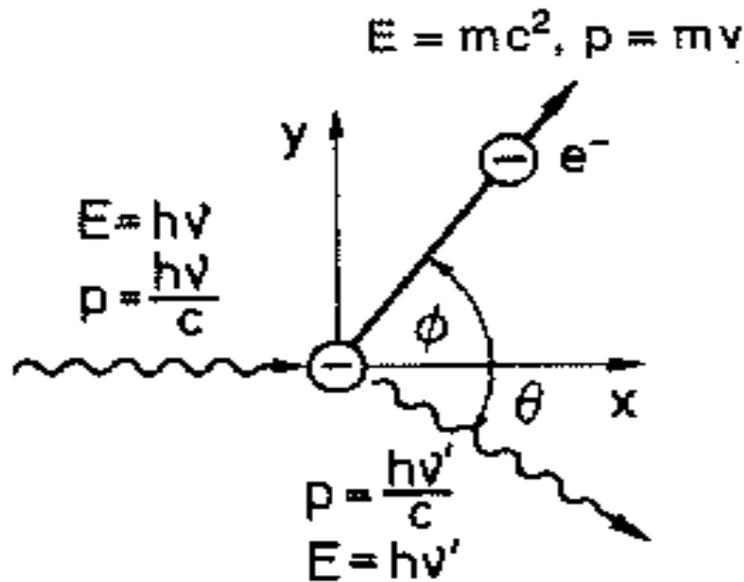
c) **Proton** mit  $E_{\text{kin}} = 938 \text{ MeV} = m_0c^2$  (Proton);  $E = 2 m_0c^2(p) = 1876 \text{ MeV}$

$$pc = m_0c^2(p) \sqrt{3} = 1,625 \cdot 10^9 \text{ eV} \rightarrow \lambda = 0,77 \text{ fm}$$

d) in der **Bose-Einstein-Kondensation** kühlt man das atomare Kondensat bis zu Temperaturen von ca.  $10 \text{ nK} = 10^{-8} \text{ K}$  ab, d.h. die mittlere kinetische Energie der Atome ist  $\langle E \rangle = kT \approx 1/40 \text{ eV} \times 10^{-8}/273 \approx 10^{-12} \text{ eV}$ . Berechnen Sie daraus die entsprechende **de Broglie-Wellenlänge  $\lambda = h/p$  für Atome mit  $A = 85$**  (Rubidium).

### 3.1 Das Photon verhält sich wie ein 'Teilchen': der Comptoneffekt

1922 entdeckte Arthur Compton, dass Röntgen- und **Gammastrahlung** beim Durchgang durch Materie nicht nur absorbiert, sondern auch **unter Energieverlust** an den Elektronen des Materials **gestreut** werden kann. Die Energien der gestreuten Photonen und Elektronen erhält man durch die Anwendung von Impuls- und Energieerhaltung für punktförmig, also als Teilchen oder 'Billardkugeln' gedachte Photonen und Elektronen:



Ein Photon der Energie  $E_{Ph} = hv = hc/\lambda$ , also dem Impuls  $p_{Ph} = hv/c = h/\lambda$ , treffe auf ein ruhendes, quasi-freies Elektron mit der Ruheenergie  $E_e = m_e(0)c^2$  und dem Impuls  $p_e = 0$ . Das **Photon** wird unter einem Winkel  $\Theta$ , das **Elektron** unter  $\phi$  gestreut. Gesucht sind die Energien und Impulse  $E'$  bzw.  $p'$  für Photon und Elektron nach der Streuung und die **Änderung der Wellenlänge des Photons**,  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ .

1. Energieerhaltung:  $hc/\lambda + m_e(0)c^2 = hc/\lambda' + E_e' \rightarrow hc/\lambda - hc/\lambda' = E_e' - m_e(0)c^2$

2. Impulserhaltung(x):  $h/\lambda = h/\lambda' \cos\Theta + p_e' \cos\phi \rightarrow hc/\lambda - hc/\lambda' \cos\Theta = p_e' c \cos\phi$

3. Impulserhaltung(y):  $0 = h/\lambda' \sin\Theta - p_e' \sin\phi \rightarrow hc/\lambda' \sin\Theta = p_e' c \sin\phi$

[Rechenschritte: Gl. 1 quadrieren:  $\rightarrow (E_e')^2 = [hc/\lambda - hc/\lambda' + m_e(0)c^2]^2 = 'A'$  setzen

Gleichungen 2 und 3 quadrieren und dann addieren:  $\rightarrow (p_e'c)^2 = (E_e')^2 - (m_0c^2)^2$

$= [(hc/\lambda)^2 + (hc/\lambda')^2 - h^2c^2/(\lambda\lambda') \cos\Theta] = 'B'; \rightarrow (E_e')^2 = B + (m_0c^2)^2; \rightarrow A = B + (m_0c^2)^2]$

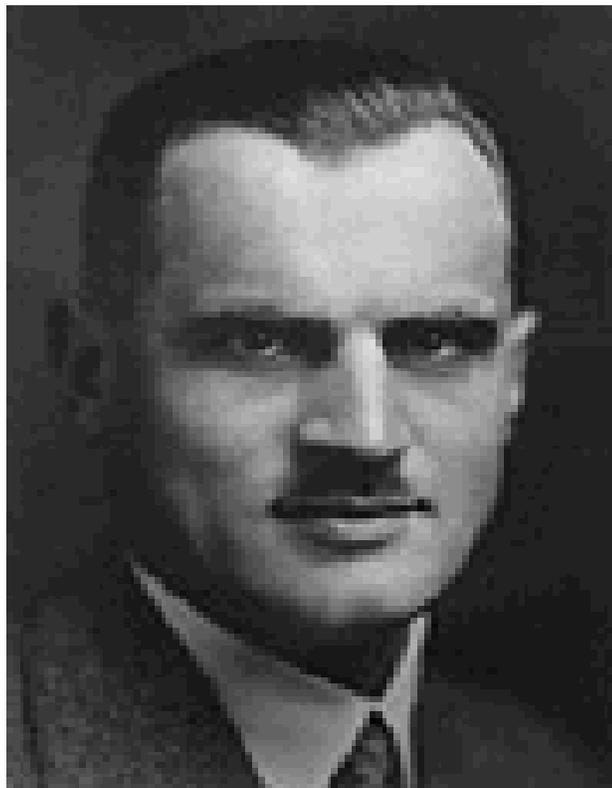
daraus ergibt sich dann (es ist der Übung wert!!):

$$\lambda' - \lambda \equiv \Delta\lambda = h/(m_0c) [1 - \cos\Theta] = hc/(m_0c^2) [1 - \cos\Theta] \quad (3.3)$$

$\lambda_{\text{Comp}} = h/(m_0c)$ , bzw.  $hc/(m_0c^2) \approx 4\pi \times 10^8 \text{ [eV fm]}/(5,11 \times 10^5 \text{ eV}) = 2422 \text{ fm}$   
 heißt die '**Comptonwellenlänge des Elektrons**'; bzw.  $\lambda/2\pi \equiv \tilde{\lambda} = 386 \text{ fm}$ , die '**reduzierte Comptonwellenlänge**'.

Höchst bemerkenswert an Gl. (3.3) ist, dass die **Änderung der Wellenlänge,  $\Delta\lambda$ , unabhängig von der Energie des Photons ist und nur vom Streuwinkel  $\Theta$  und dem konstanten  $\lambda_{\text{Comp}}$  abhängt**. Das gestreute Photon hat die **kleinste Energie** bei der Streuung um  $\Theta = \pi$  (Rückstreuung). Dort beträgt die Wellenlängenänderung gerade  $2\lambda_{\text{Comp}} = 4844 \text{ fm}$ . Gl. (3.3), die tausendfach in genauesten Messungen bestätigt wurde, enthält als 'Ingredienzien':

- den '**Teilchencharakter**' des Photons bei der Comptonstreuung
- die **spezielle Relativitätstheorie**
- das **Plancksche Wirkungsquantum  $h$**

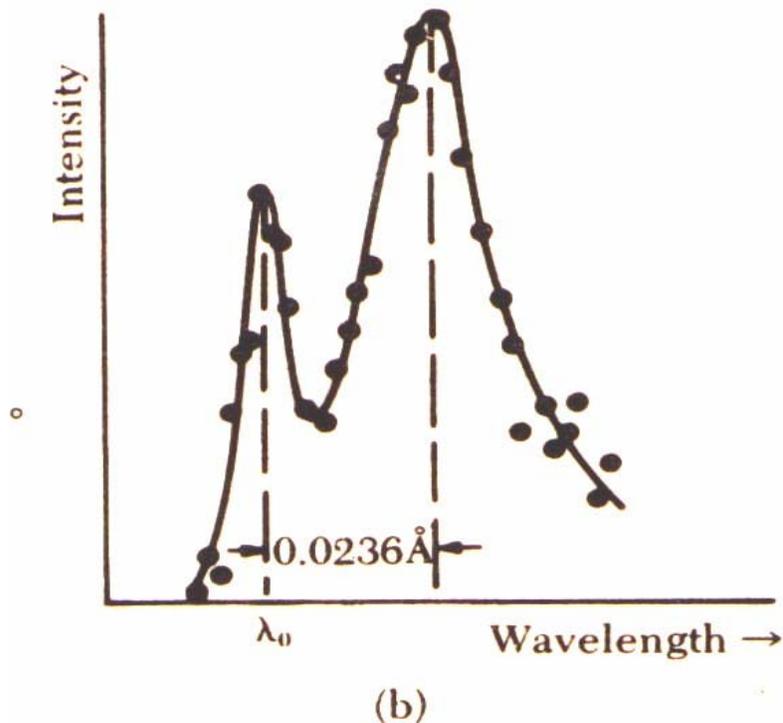


Arthur Holly Compton 1892 – 1962

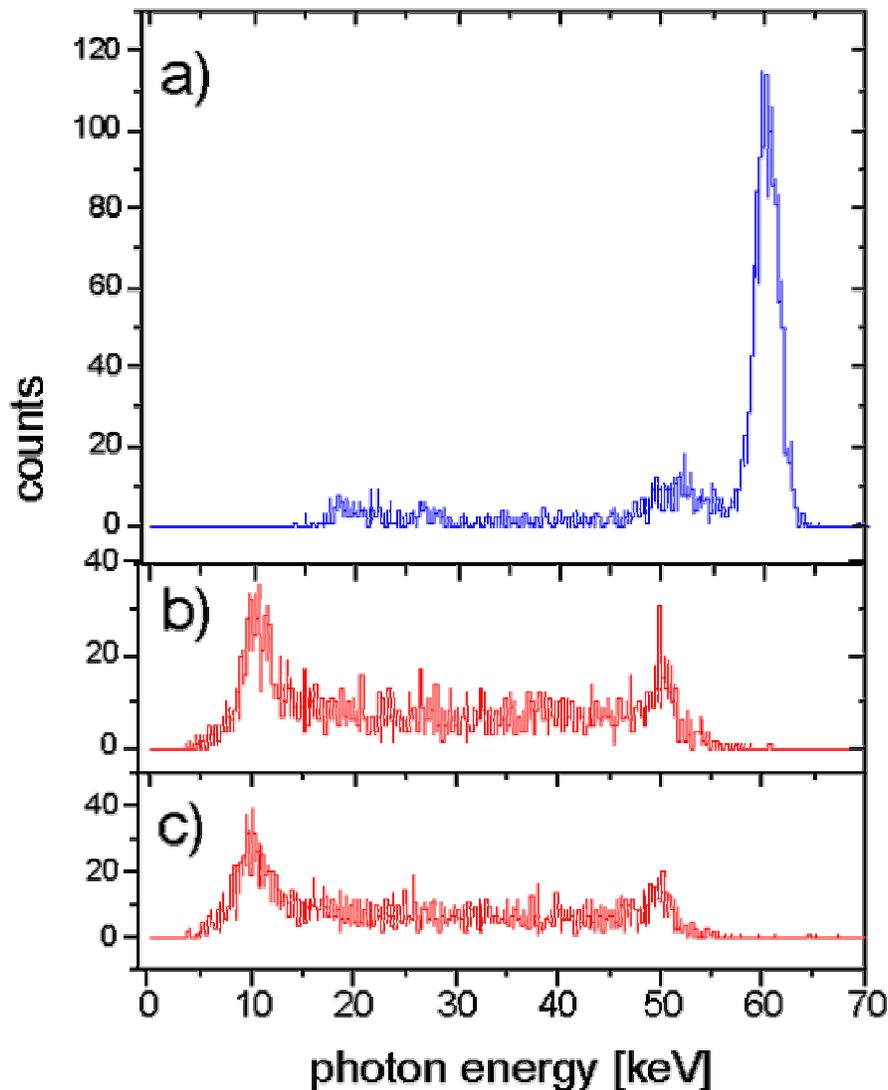
## Beispiele für Compton-Rückstreuung:

$$\Theta = \pi; \quad \Delta\lambda = 0,0484 \times 10^{-8} \text{ cm}; \quad [E = h\nu; \lambda = c/\nu; h = 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV s}]$$

$E_{\text{Ph}}$ [eV]	$\nu_{\text{Ph}}$ [ $10^{18}/\text{s}$ ]	$\lambda_{\text{Ph}}$ [ $10^{-8}$ cm]	$\lambda'_{\text{Ph}}$	$\nu'_{\text{Ph}}$	$E'_{\text{Ph}}$
$10^4$ ;	2,4;	1,25;	1,2984;	2,3105;	$9,56 \times 10^3$
$5,11 \times 10^5$ ;	122,64	0,02446;	0,07286;	41,175;	$1,7 \times 10^5$
$5 \times 10^6$ ;	1200;	0,0025;	0,0509;	58,94;	$2,44 \times 10^5$
$5 \times 10^9$ ;	$1,2 \times 10^6$ ;	$2,5 \times 10^{-6}$ ;	0,0484025;	61,98;	$\rightarrow 1/2 m_0 c^2$



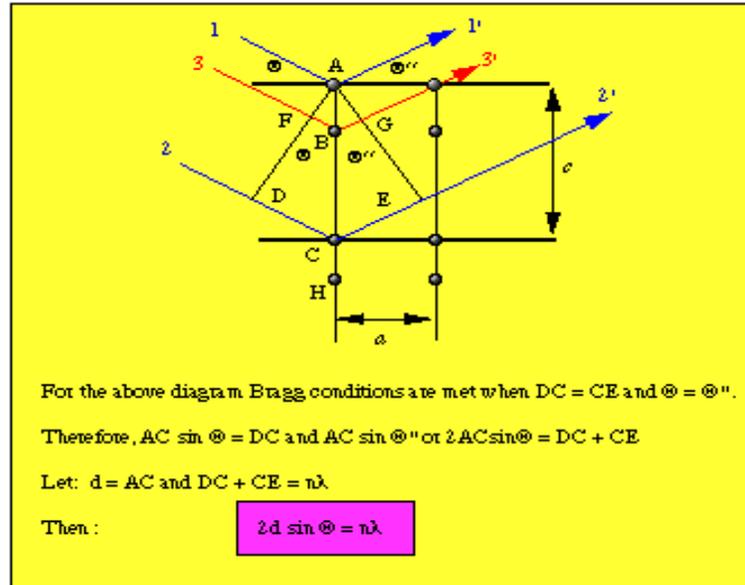
Beispiel für ein  $\gamma$ -Spektrum mit **Comptonstreuung unter  $\vartheta = 90^\circ$** . Linke Linie:  $\gamma$ -Quanten mit der unverschobenen Wellenlänge  $\lambda_0$ ; **rechte Linie: unter  $90^\circ$  gestreute  $\gamma$ -Quanten** mit einer um  $\Delta\lambda = h/(m_0 c)$  größeren Wellenlänge ( $\cos 90^\circ = 0$ ).



Spektrum einer Gammaquelle mit 60 keV. Im Germaniumdetektor **a)** erscheint der starke '**photopeak**': Das 60 keV Photon wird von einem gebundenen Elektron (meist aus der K-Schale) eines Germaniumatoms absorbiert (Photoeffekt); der Detektor misst die volle Energie des Elektrons und die Energien der nachfolgenden Röntgenquanten, die die 'Löcher' in der K, L... Schale füllen. Beim kleinen Buckel etwa 10 keV unterhalb des Photopeaks ist das Röntgenquant von der L-Schale in die K-Schale ohne Nachweis 'entwischt'.

Bilder **b)** und **c)** zeigen die Spektren von zwei anderen Germaniumdetektoren, die unter etwa  $180^\circ$  zum ersten Zähler stehen; in ihnen erscheinen u.a. die **unter  $180^\circ$  im Zähler a) comptongestreuten Photonen**, deren Energie ca. 48 keV beträgt (nachrechnen!), sowie bei etwa 10 keV die aus Zähler a) entwischten Germanium-Röntgenquanten.

## 3.2 Das Elektron verhält sich wie eine Welle: Elektronenbeugung

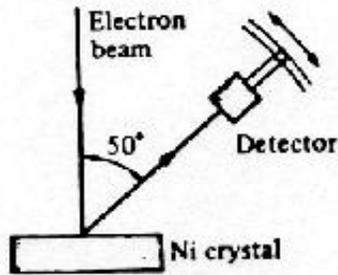


Das Bild zeigt schematisch die Bedingung für die kohärente **Bragg-Streuung** monochromatischer **Photonen** (ebene Welle aus der Richtung der blauen Linien 1,2) an einem Kristallgitter: die Gangunterschiede der an den einzelnen Atomen (A, C...) entstehenden Streuwellen sind genau dann Vielfache der Photonenwellenlänge  $\lambda$ , wenn die Bedingung

$$2d \sin \vartheta = n\lambda \quad (3.4)$$

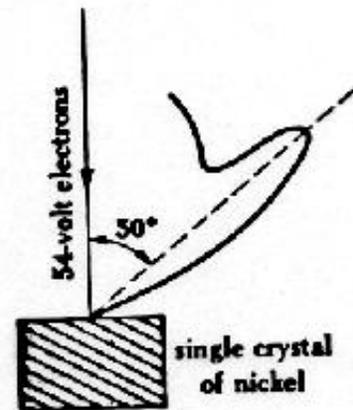
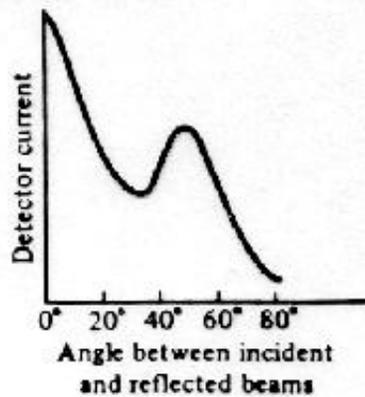
erfüllt ist. Dabei ist  $\vartheta$  der Einfallswinkel und Streuwinkel relativ zu den 'Netzebenen' mit dem Abstand  $d$ , wobei  $d(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = a \{h^2 + k^2 + l^2\}^{-1/2}$  ist ( $a =$  **Gitterkonstante**,  $\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{l}$  die ganzzahligen '**Millerindizes**' mit den Werten 0, 1, 2...). Für die Streuwinkel, die Gl. (3.4) erfüllen, addieren sich alle einzelnen Streuwellen **kohärent** auf. Für alle anderen Streurichtungen löschen sich die Streuwellen dagegen durch stochastische Gangunterschiede (Phasen) aus. Etwas 'vornehmer' kann man die Bedingung für die positive Interferenz auch so formulieren, dass der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  in der Streuwelle  $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$  ein '**reziproker Gittervektor**' sein muss.

Davison und Germer stellten nun 1928 erstaunt fest, dass **Elektronen**, die auf einen Nickel-Einkristall geschossen wurden, ein ganz analoges **Interferenzmuster** zeigen. Dieses Verhalten kannte man seit dem berühmten Experiment von Laue und Knipping von 1912 nur von Photonen. Man musste also den Schluss ziehen, dass Elektronen bei der Streuung an einem Kristall Eigenschaften zeigen (Interferenz, kohärente Addition der Amplituden), die man bisher nur Wellen zugeschrieben hatte.

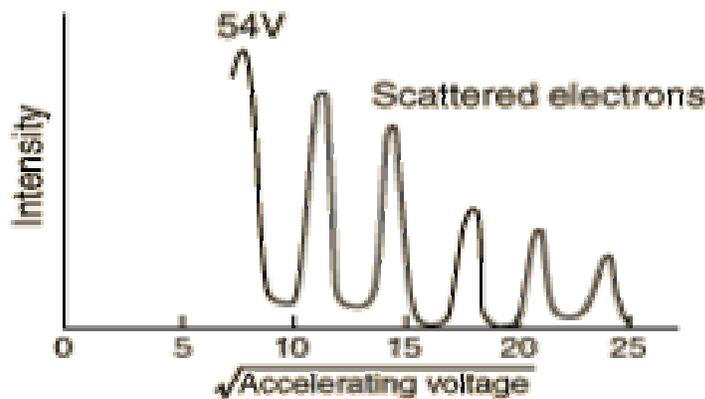
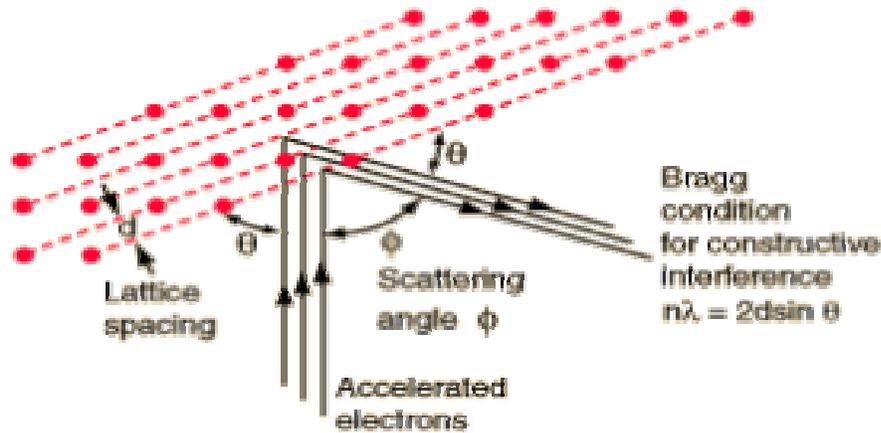


**Figure 30-2** The Davisson-Germer experiment sends an electron beam at a nickel crystal and measures reflected electrons at various angles. If electrons were like BBs shot into an ordered stack of bowling balls, the reflected BBs would show no pronounced preferred direction of scatter. Instead, the reflected electrons display the sharp angular preference consistent with wave reflection and their de Broglie wavelengths.

**Figure 30-3** The scatter measured from the Davisson-Germer nickel crystal. The pronounced peak near 50° from the direction of the incident beam of electrons follows the mathematical behavior of a constructive interference peak for waves even though made by reflected electrons.



Anordnung und Ergebnisse des **Davisson-Germer Streuexperiments** mit Elektronen an einem Nickel-Einkristall.



Davisson und Germer betrachteten die gestreuten Elektronen unter einem Streuwinkel  $\phi = 50^\circ$ ; dann beträgt der Einfallswinkel (und Streuwinkel) relativ zur streuenden Netzebene  $\vartheta = 65^\circ$  (wegen  $2\vartheta + \phi = 180^\circ$ ). Für Elektronen mit **54 eV** kinetischer Energie (totale Energie  $E = 511054$  eV) ist die de Broglie-Wellenlänge

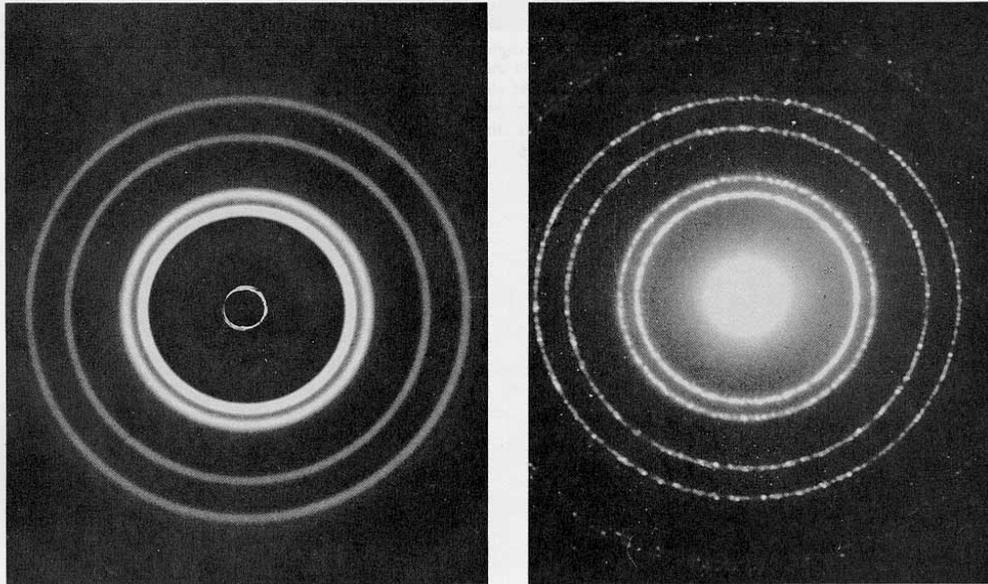
$$\lambda = hc/pc = hc \{E^2 - (m_0c^2)\}^{-1/2} = 2\pi \times 1,97 \times 10^8 \text{ [eV fm]} \{ (511054)^2 - (511000)^2 \}^{-1/2} \text{ [eV]}^{-1}$$

$$\lambda (54 \text{ eV}) = 1,67 \times 10^5 \text{ fm} = 1,67 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

aus  $2d \sin\vartheta = n\lambda$  und  $\vartheta = 65^\circ$  folgt daraus für  $n=1$ :  $d = 0,92 \times 10^{-8} \text{ cm}$  für den Abstand der streuenden Netzebene. Die Gitterkonstante  $a$  für einen Nickel-Einkristall ist  $a = 3,52 \times 10^{-8} \text{ cm}$ . Wegen  $(h^2 + k^2 + l^2)^{1/2} = a/d(h,k,l)$  ergibt sich daraus für  $d = 0,92 \times 10^{-8} \text{ cm}$  der Wert  $(h^2 + k^2 + l^2) = \{3,52/0,92\}^2 = 14,64$ . Daraus folgt (nach einigem Probieren und im Rahmen der noch ungenauen Messwerte in diesem allerersten Experiment zur Elektronenbeugung) für die **Millerindizes (h,k,l)** das Tripel **(3,2,1)**, bzw. alle Permutationen davon.

Für welche Elektronenenergie würde man den nächsten 'peak' für ( $n = 2, \vartheta = 65^\circ$ ) bei einer Streuung an derselben Netzebene (3,2,1) erwarten?

The diffraction pattern on the left was made by a beam of x rays passing through thin aluminum foil. The diffraction pattern on the right was made by a beam of electrons passing through the same foil.



Photonenbeugung (links) und **Elektronenbeugung** (rechts) an einer Aluminiumfolie im **Debye-Scherrer Verfahren** (stochastisch verteilte Kristallorientierungen).

