8. Einstein, das Myon und die Zeitdilatation

8.1 Die Lorentztransformation bei invariantem c

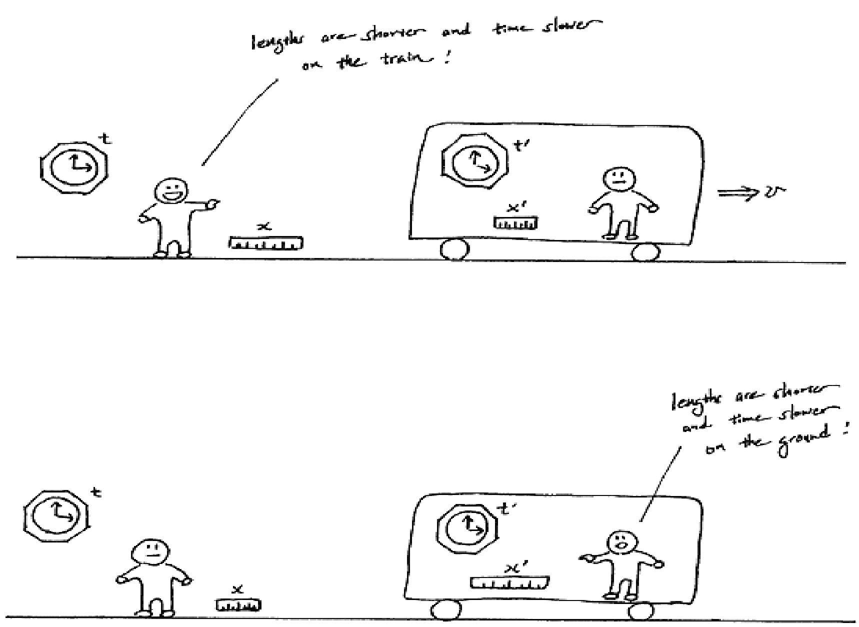
Einsteins 'spezielle Relativitätstheorie' von 1905 führte zu (mindestens) drei spektakulären Folgerungen:

1. zur Relativität der Zeit: Uhren in gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssystemen sollten unterschiedlich 'gehen' : 'Zeitdilatation'.

2. zur damit verknüpften Schrumpfung von Maßstäben: 'Längenkontraktion'

3. zur Äquivalenz von Masse und Energie mit der Möglichkeit, Masse in Energie umzuwandeln.

Die Möglichkeit, Masse in Energie zu verwandeln, beschäftigte schon seit den dreißiger Jahren die Gemüter der Physiker aufs äußerste und fand am 2. Dezember 1942 in Fermis Reaktor ihre erste 'friedliche' und am 16. Juli 1945 im Atomblitz von Alamogordo ihre erste schreckliche 'Bestätigung' (s. Kapitel 6). Es dauerte sehr viel länger, den unterschiedlichen Gang bewegter Uhren, die 'Zeitdilatation', direkt in Experimenten zu demonstrieren, weil man dazu 'Uhren' brauchte, die sich mit einer der Lichtgeschwindigkeit vergleichbaren Geschwindigkeit bewegen. Ein 'direktes', anschauliches Experiment zur Längenkontraktion gibt es meines Wissens bis heute noch nicht.



Was ist hier falsch???

Einsteins Ausgangspunkt in seiner speziellen Relativitätstheorie von 1905 waren zwei Hypothesen:

1. die Naturgesetze müssen in allen gleichförmig zueinander bewegten Systemen gleich sein
2. die Lichtgeschwindigkeit muss in allen diesen Systemen invariant $\equiv c$ sein

Er erkannte, dass diese Bedingungen nicht mit der Galilei-Transformation zu erfüllen sind (auch schon die Maxwellgleichungen sind nicht invariant gegen eine Galilei-Transformation: z. B. kann ein Magnetfeld, das in einem System durch die Bewegung von Ladungen entsteht, im mitbewegten System 'weggeeicht werden!), wohl aber mit der Lorentztransformation, bei der außer den Raumkoordinaten auch die Zeit mittransformiert werden muss (x, y, z, t = Koordinaten im 'ruhenden' System, x', y' = y, z' = z, t', = Koordinaten in einem System, das sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt :

$$x' = \gamma\,(x - vt); \qquad t' = \gamma\,(t - v/c^2 * x)$$

$$x = \gamma\,(x' + vt'); \qquad t = \gamma\,(t' + v/c^2 * x') \qquad (8.1)$$

$$\gamma\ (\text{'Lorentzfaktor'}) = \{1 - v^2/c^2\}^{-1/2} \qquad v/c = \beta$$

Die Transformation für alle Koordinaten dieser 'Vierervektoren' lässt sich kompakt mit einer symmetrischen 4x4 Transformationsmatrix so schreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \qquad (8.1a)$$

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Lorentztransformation ist, dass alle 'Längen' von 'Vierervektoren' gleich bleiben. Das Skalarprodukt $x_\mu x^\mu$ des Vierervektors $x_\mu = (ct, \mathbf{x})$ [$\mathbf{x} = (x, y, z)$, $x_\mu x^\mu \equiv c^2t^2 - \Sigma(x^2 + y^2 + z^2)$] ist 'lorentzinvariant':

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \qquad (8.2)$$

Wie erhält man obigen Wert für γ ?Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c verlangt:

$$x = ct \quad \text{und } x' = ct'$$

$$\rightarrow \quad ct' = \gamma\,(ct - vt) \quad \text{und} \quad ct = \gamma\,(ct' + vt')$$

$$\rightarrow c^2tt' = \gamma^2\, tt'\,(c - v)\,(c + v) = \gamma^2\, c^2\, tt'(1 - v/c)\,(1 + v/c)$$
$$\rightarrow \gamma^2 = 1/[(1 - v/c)\,(1 + v/c)] = 1/(1 - v^2/c^2)$$

$$\rightarrow \quad \gamma = + \{1 - v^2/c^2\}^{-1/2} = + \{1 - \beta^2\}^{-1/2} \qquad (8.3)$$

Dies hat vier dramatische Konsequenzen:

1. eine in einem System **zur gleichen Zeit** ($t_1 = t_2$) **gemessene** Länge L erscheint im dazu relativ bewegten System ('), ebenfalls **zur** (dort) **gleichen Zeit** ($t_1' = t_2'$) gemessen, **um** $1/\gamma$ **verkürzt** :

$$L' = 1/\gamma\; L \qquad \Rightarrow \quad \text{'Längenkontraktion'}$$

2. eine **am selben Ort** ($x_1 = x_2$) gemessene Zeitdifferenz Δt erscheint im dazu relativ bewegten System ('), ebenfalls (dort) **am selben Ort** ($x_1' = x_2'$) gemessen, **um** $1/\gamma$ **kürzer** zu sein:

$$\Delta t' = 1/\gamma\;\; \Delta t \qquad \Rightarrow \quad \text{'Zeitdilatation'}$$

3. was **in einem System** gleichzeitig geschieht, kann **im andern System** zu verschiedenen Zeiten geschehen: es gibt keine absolute Gleichzeitigkeit

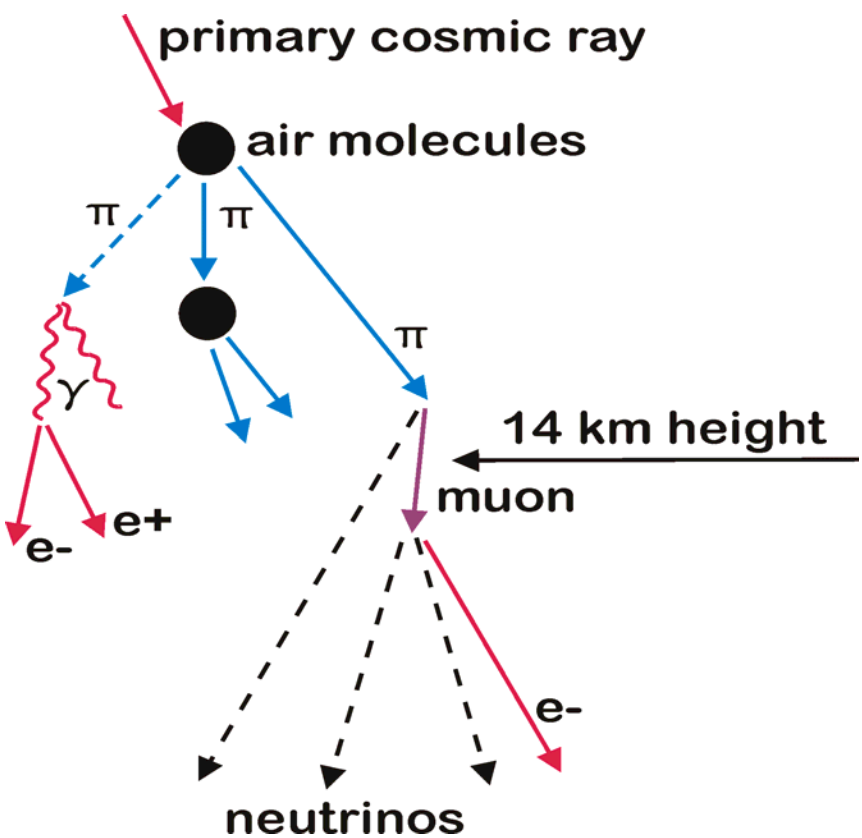
4. Längenkontraktion, Zeitdilatation, Verlust der absoluten Gleichzeitigkeit erscheint, vom jeweils anderen System aus gesehen, genauso.

8.2 Paradoxe Myonen

Für die erste 'experimentelle' Beobachtung der Zeitdilatation sorgten die Myonen. Das Myon (ein 'schweres Elektron' mit einer Ruheenergie von 105 MeV) zerfällt in ein Elektron und zwei Neutrinos mit einer mittleren Lebensdauer $\tau = 2 \times 10^{-6}$ s . Selbst wenn es mit Lichtgeschwindigkeit c flöge, kann es (im Mittel) nicht mehr als eine **Strecke x** zurücklegen, mit

$$x \approx \tau \times c = 2 \times 10^{-6}\ \text{s} \times 3 \times 10^{5}\ \text{km/s} = 600\ \text{m} \qquad (8.4)$$

Nun beobachtet man aber auf der Erdoberfläche Myonen, die in der oberen Atmosphäre (10 -20 km Höhe) durch kosmische Strahlung entstanden sind und die bis über 99,5% der Lichtgeschwindigkeit haben ($E_{kin} = 1$ GeV; $\beta = v/c = 0{,}995$).



Ein Teilchen, das im Mittel nach 600 m zerfällt kann, gemäß klassischer Wahrscheinlichkeit, d.h. bei poissonverteilten Weglängen, eine Strecke von 10 000 m nur mit der angenäherten Wahrscheinlichkeit

$$W = \exp\{-10\,000/600\} = 5{,}8 \times 10^{-8} \qquad (8.5)$$

zurücklegen. Das heißt, von 100 Millionen (10^8) Myonen, die in der Atmosphäre entstehen (und annähernd Lichtgeschwindigkeit haben) könnten gerade ca. 6 die Erdoberfläche erreichen. Man sieht aber um viele, viele Größenordnungen mehr. Wie geht das??

Ein irdischer Beobachter, für den das Myon mit $v = 0{,}995\ c = 298500$ km/s auf die Erde zurast, misst für die 10 km eine Zeitdifferenz

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 10 \text{ km}/v = 10/298500 \text{ s} = 33{,}5\ \mu s$$

Welche Zeitdifferenz $\Delta t' = t_2' - t_1'$ misst das Myon auf seiner 'eigenen' Uhr?

Das Myon ist in seinem Ruhesystem immer am gleichen Ort: $x_1' = x_2' = 0$. Dann ergibt der Zusammenhang zwischen den Uhren des Erdbeobachters (t) und des Myons (t'):

$$t_1 = \gamma\,(t_1' + v/c^2 * x_1');\ t_2 = \gamma\,(t_2' + v/c^2 * x_2')$$

$$\rightarrow\ \Delta t = \gamma \Delta t'\ \rightarrow \Delta t' = 1/\gamma\ \Delta t\ = 3{,}35\ \mu s\ \ (x_1' = x_2' = 0!) \qquad (8.6)$$

$$\gamma = [1 - \beta^2]^{-1/2} \approx 10 \qquad (\beta = v/c = 0{,}995)$$

→ das Myon misst nur das $1/\gamma$ -fache der irdischen Zeit!

Seine Uhr geht langsamer!! (Für das Myon geht aber ebenso die irdische Uhr langsamer!) Die Wahrscheinlichkeit, bei einer mittleren Lebensdauer $\tau = 2 \times 10^{-6}$s eine Zeit $t = 3{,}35 \times 10^{-6}$ s zu 'überleben', ist:

$$\exp\{-t/\tau\} = \exp\{-3{,}35/2\} = 0{,}19 \qquad (8.7)$$

('klassisch' war es $5{,}8 \times 10^{-8}$)

Welche Länge misst nun das Myon in seinem Ruhesystem für die (irdischen) 10 km von der Atmosphäre bis zur Erdoberfläche?

Entscheidend ist hier und immer in der Relativitätstheorie:

die Länge eines Gegenstands messen heißt, den Ort der beiden Enden gleichzeitig festzustellen

$$x_1 = \gamma(x_1' + vt_1'); \qquad x_2 = \gamma(x_2' + vt_2')$$

t_1' und t_2' sind die Zeitpunkte, an denen die Enden x_1' bzw. x_2' der Strecke gemessen werden. Diese beiden Zeitpunkte müssen aber gleich sein d.h. $t_1' = t_2'$ (nach der obigen Vorschrift einer Längenmessung).

$$\rightarrow \Delta x = \gamma\, \Delta x' \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta x' = 1/\gamma\, \Delta x \qquad (8.8)$$

d.h. **die (irdische) Länge $\Delta x = 10$ km** erscheint für das Myon in dessen Ruhesystem auf $\Delta x' = 1/\gamma\, \Delta x = 1/10\, \Delta x$, also auf nur ca. 1 km verkürzt.

Das ist aber 'vernünftig': das Myon 'lebt' -nach seiner eigenen Uhr- ja nur 2×10^{-6} s.

Eine 1 km entfernte Erdoberfläche, die mit (praktisch) Lichtgeschwindigkeit auf das Myon zurast, hat es nach der Zeit $\Delta t' = 1/300000$ s $= 3{,}33$ µs auf der Myonenuhr erreicht. Dann erlebt es, bei einer mittleren Lebensdauer von 2 µs diesen Aufprall mit der Wahrscheinlichkeit

$$\exp\{-3{,}33/2\} = 0{,}19 \quad \text{(also wie oben!)} \qquad (8.9)$$

Die Längenkontraktion ist einfach die Kehrseite (auf der Myonenseite) der (für den irdischen Beobachter) langsamer gehenden Myonenuhr!

Was passiert, wenn das Myon immer schneller wird, d.h.seine Geschwindigkeit am Ende $= c$, d.h. $\beta = 1$, $\gamma = \infty$ würde?

Dann vergeht auf seiner Uhr keine Zeit mehr ($\Delta t' = 1/\gamma\, \Delta t$) und alle Längen schrumpfen auf 0 ($\Delta x' = 1/\gamma\, \Delta x$).

(das geht aber nur in Gedanken, da **bei v = c** die **Masse des Myons unendlich** würde. **Kein Teilchen, das eine Ruhemasse besitzt, kann jemals die Lichtgeschwindigkeit erreichen!!**).

Ein Beispiel von der GSI Darmstadt zur Zeitdilatation:

Wir speichern im Experimentier-Speicher-Ring ESR 'nackte' ^{19}Ne- Ionen mit 310 MeV/u, das entspricht einer Geschwindigkeit $v/c = \beta = 2/3$. ^{19}Ne macht einen β^+ -Zerfall zu ^{19}F (Proton → Neutron + Positron +Neutrino).

^{19}Ne hat 'in Ruhe' und als neutrales Atom eine mittlere Lebensdauer $\tau_{Ruhe} = 24{,}5$ s. Welche mittlere Lebensdauer sollte man für diese schnellen Ionen im Labor gemäß der speziellen Relativitätstheorie beobachten? (Der Unterschied der Lebensdauer von neutralem und 'nacktem' Neon ist in diesem Fall sehr klein):

$$\tau_{Labor} = \gamma \times \tau_{Ruhe}$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = 1/\sqrt{1 - 4/9} = 1{,}34;$$

$$\rightarrow \tau_{Labor} = 1{,}34 \times 24{,}5 \text{ s} = 32{,}8 \text{ s}$$

was wir auch wirklich beobachtet haben

Während im 'Ruhesystem' des ^{19}Ne-Ions im Mittel 24,5 s vergehen bis zum Zerfall, vergehen im Labor 32,8 s. D.h. vom Labor aus gesehen, zeigt die Uhr eines mit β bewegten Systems eine um den Faktor $1/\gamma = \{1 - \beta^2\}^{1/2}$ kleinere Zeitdifferenz an. Dasselbe gilt aber auch umgekehrt: Vom ruhenden ^{19}Ne aus gesehen, geht die Uhr des in die 'andere' Richtung bewegten Labors um den gleichen Faktor $1/\gamma$ langsamer.

8.3 Einstein-Minkowski-Diagramm ('Weltlinien')

Mit 'hyperbolischen' Koordinaten

$$\sinh\varphi = 1/2\,(e^{\varphi} - e^{-\varphi}); \quad \cosh\varphi = 1/2\,(e^{\varphi} + e^{-\varphi}); \quad \tanh\varphi = \sinh\varphi/\cosh\varphi$$

$$e^{\varphi} = \gamma(1+\beta) = [\,(1+\beta)/(1-\beta)]^{1/2}\ ; \qquad e^{-\varphi} = [\gamma(1+\beta)]^{-1} = [\,(1-\beta)/(1+\beta)]^{1/2}$$

lässt sich die Lorentz-Transformation schreiben:

$$x' = x\cosh\varphi - ct\sinh\varphi; \quad ct' = -x\sinh\varphi + ct\cosh\varphi$$

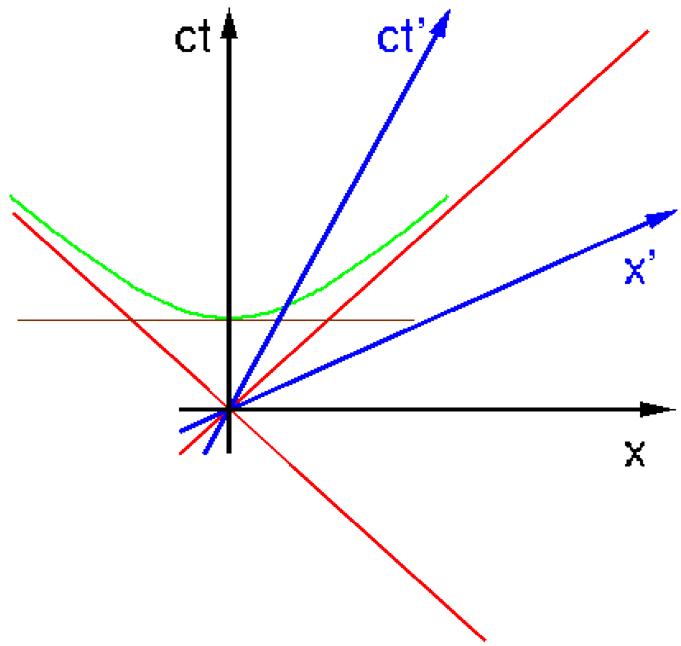
$$\rightarrow \ ct' + x' = e^{-\varphi}(ct + x); \quad ct' - x' = e^{\varphi}(ct - x)$$

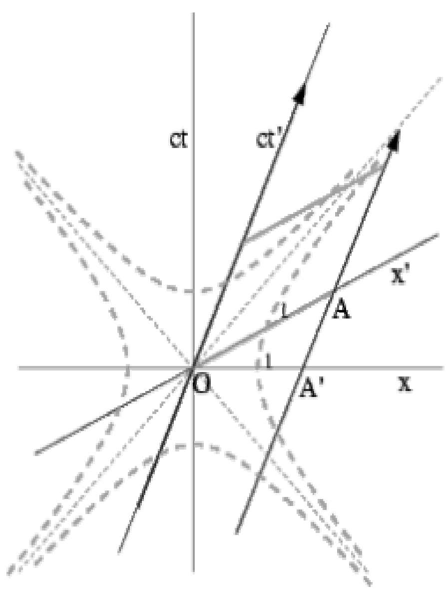
$$\rightarrow\ c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \qquad (8.10)$$

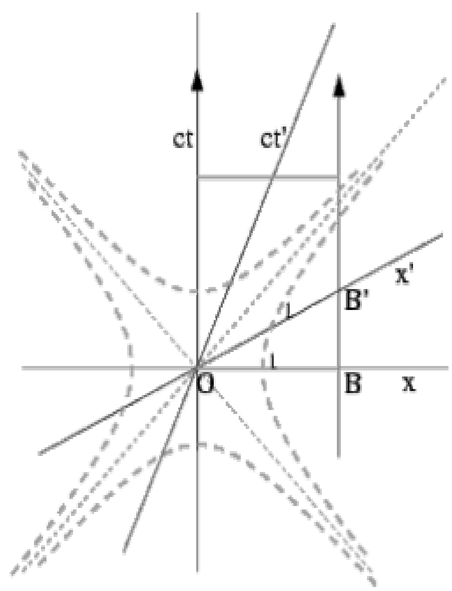
$\angle(ct, ct') = \arctan\beta$; $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 = 0 \rightarrow$ 'Licht-Weltlinie'

$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 = +/- 1 \rightarrow$ 'Einheitshyperbeln'

$c^2t^2 - x^2$, $c^2t'^2 - x'^2 > 0$ 'zeitartig'; $c^2t^2 - x^2$, $c^2t'^2 - x'^2 < 0$ 'raumartig'







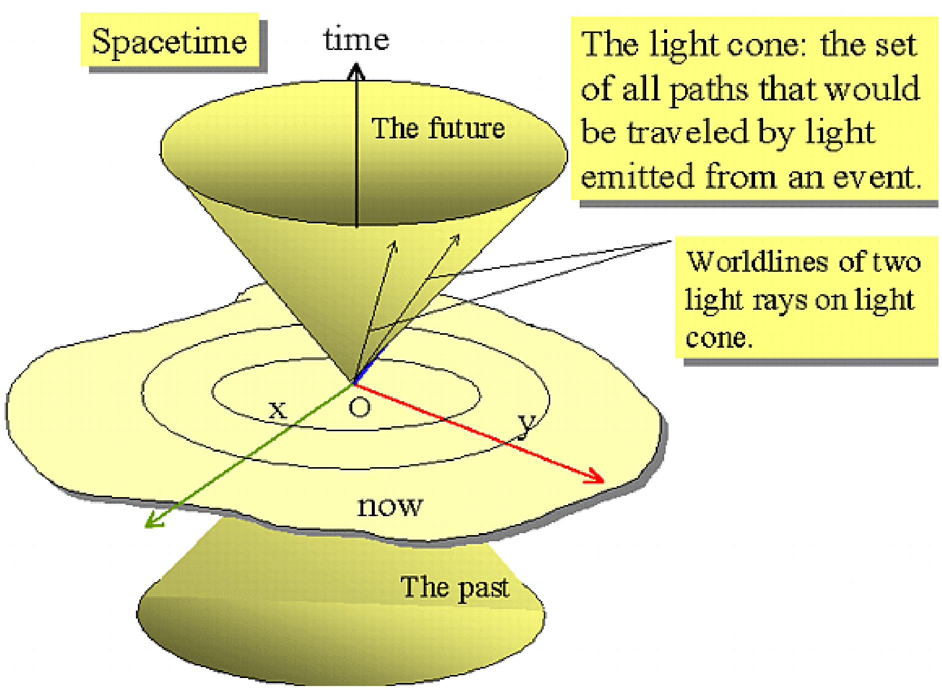
An diesem 'Minkowski-Diagramm' ct/x bzw. ct'/x' mit den roten Winkelhalbierenden (= 'Weltlinie' des Lichts) und den grünen Einheitshyperbeln (von denen im farbigen Bild nur eine, nämlich $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 = +1$ dargestellt ist)] lassen sich alle 'Geheimnisse' der speziellen Relativitätstheorie wie Zeitdilatation, Längenkontraktion, Nicht-Gleichzeitigkeit eines Ereignisses in verschiedenen Bezugssytemen, zeit- bzw. raumartige Ereignisse, 'Lichtkegel' der Raumzeit, Lichtgeschwindigkeit als Grenzfall.... in höchster Anschaulichkeit verstehen:

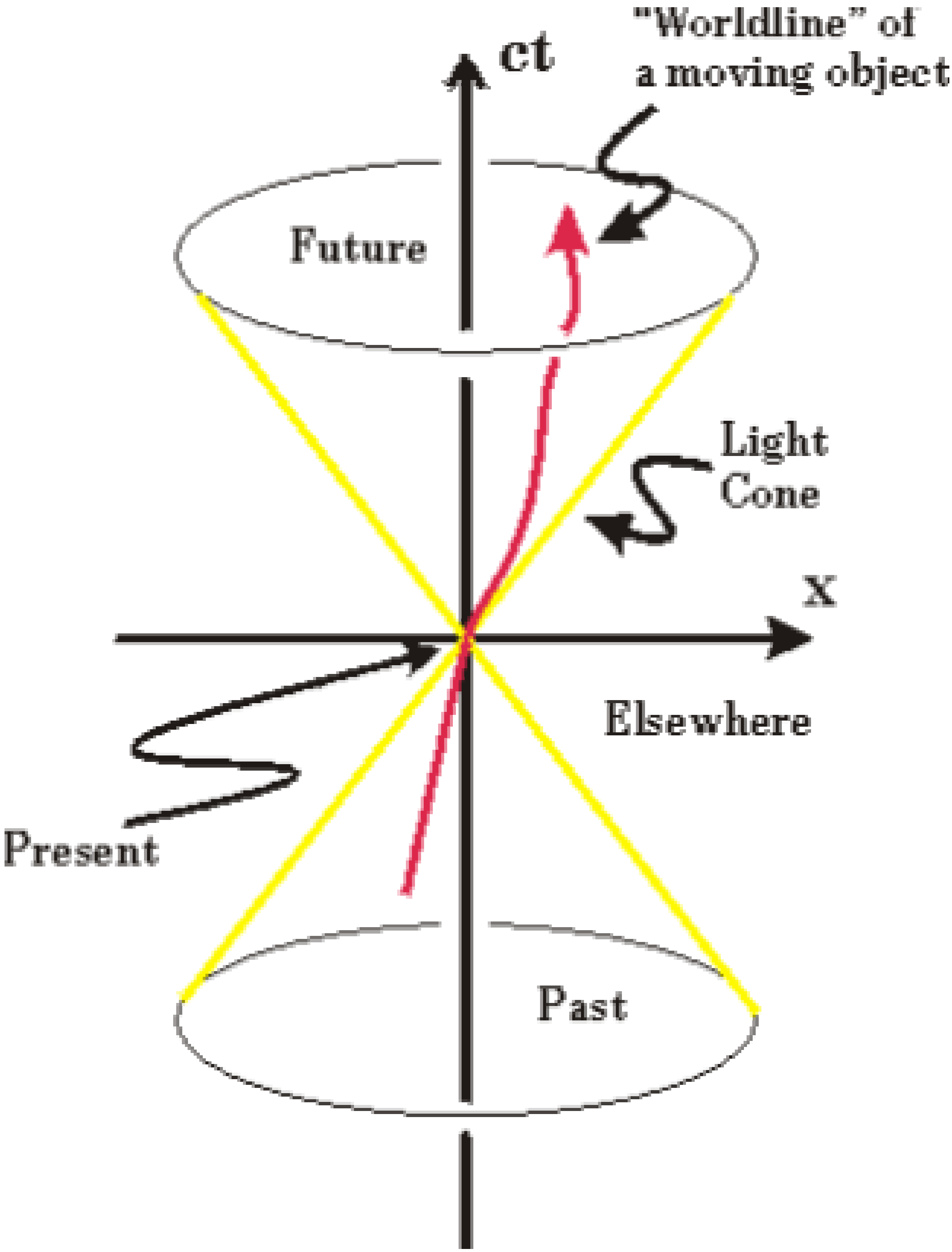
1. der tangens des Winkels (ct/ct' bzw. x/x') = β
   wegen $\beta \leq 1$ gibt es **keinen Winkel** > 45^0; $\beta = 1$ ist die 'Weltlinie' des Lichts

2. die Schnittpunkte der Einheitshyperbeln mit den Achsen **ct**, ct', bzw. **x**, x'
   definieren in diesen Systemen die Einheiten von **x**, x' (Länge) bzw. **t**, t' (Zeit)
   wählt man die **Einheiten für (x, ct)** $\equiv$ 1, so sind die Einheiten im gestrichenen System = $\gamma\ (1 + \beta^2)^{1/2} = [(1 + \beta^2)/(1-\beta^2)]^{1/2}$

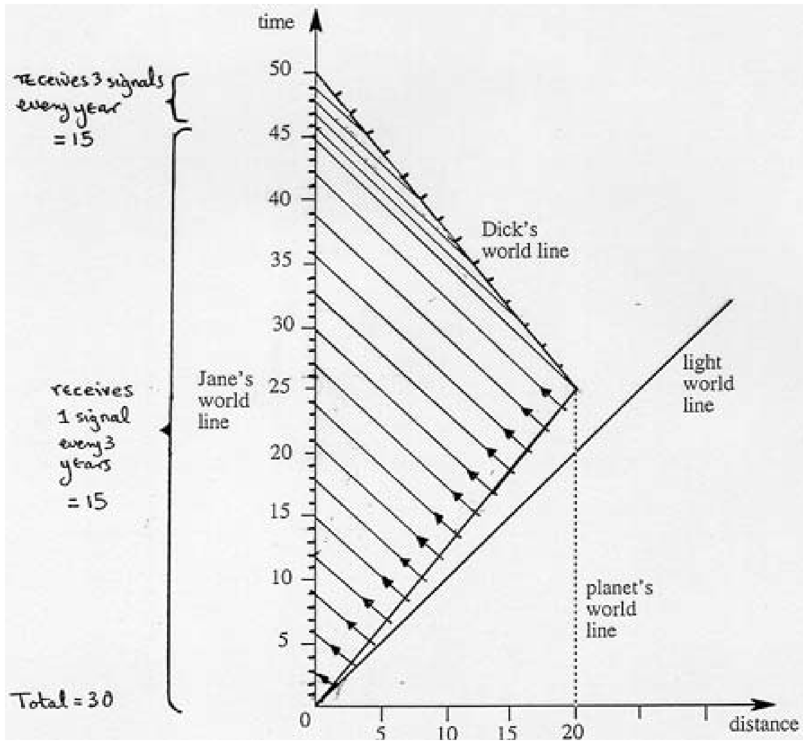
3. zu jedem Punkt lassen sich durch **Parallelen** zu den orthogonalen **(ct, x)** - bzw. den 'schiefen' (ct', x') - Achsen die **(ct, x)** bzw. (ct', x') -Koordinaten bestimmen.

4. das zweidimensionale Bild ist zu ergänzen durch die zwei orthogonalen Achsen y = y' bzw. z = z', die senkrecht auf der Bewegungsrichtung stehen. Nimmt man eine davon (zwei sind nur für Hypermathematiker vorstellbar), definieren die roten Winkelhalbierenden den Mantel eines Kegels mit 45^0 Öffnungswinkel.




"Worldline" of
a moving object
ct
Future
Light
Cone
x
Elsewhere
Present
Past

8.4 'Zwillingsparadoxon'

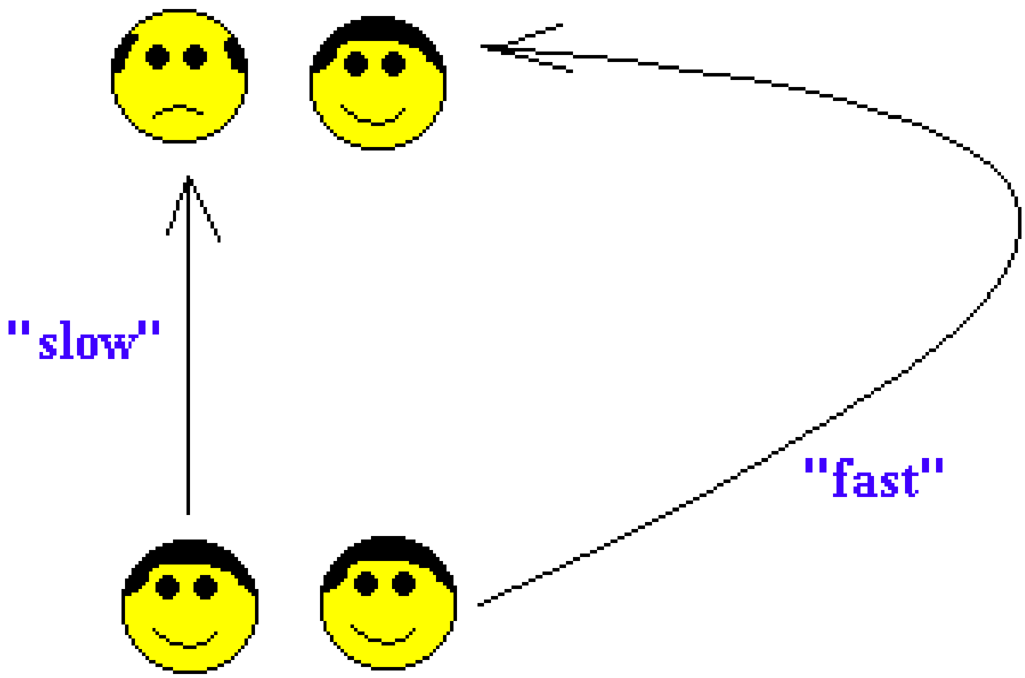


Dick startet an seinem 20. Geburtstag mit einer Rakete von der Erde und erreicht nach kurzer Zeit $\gamma = 5/3$ ($\beta = 0.8$). Seine Zeitachse (ct') bildet also einen Winkel $\alpha = \arc\tan(0.8) \approx 38{,}7^0$ nach 'rechts' mit der Zeitachse (ct) seiner auf der Erde gebliebenen Zwillingsschwester Jane. Dick fliegt mit dieser Geschwindigkeit zu einem **20 Lichtjahre** (im Ruhesystem der Erde) **entfernten Planeten**. Er sendet bei jeder Silvesterfeier in seiner Rakete ein Lichtsignal zurück (parallel zur Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten) **an Jane**. Diese empfängt die auf der 'Hinreise' Dick's abgeschickten Grüße genau **alle drei Jahre**, insgesamt 15 an der Zahl. Die Zeit t', die Dick in seinem Ruhesystem bis zum Planeten braucht, ist: $t' = 20/(\beta\gamma) = 15$ Jahre. Den letzten Gruß von der Hinreise erhält Jane also **nach 45 Jahren** (auf Jane's Uhr;), d.h. an ihrem **65.** Geburtstag.

Am Planeten angekommen, dreht Dick abrupt um (wir vergessen hier die kurze Zeit für die Umkehr der Beschleunigung) und fliegt mit der gleichen Geschwindigkeit wieder zurück. Jetzt bildet seine 'neue' (ct')-Achse also wieder einen Winkel von $38{,}7^0$ **zu Jane's Zeitachse**, diesmal aber nach 'links'. Jane empfängt jetzt **5 Jahre lang drei Signale pro Jahr** (auf ihrer Uhr). Wenn Dick wieder auf der Erde ankommt (mit abruptem Abbremsen) sind **für Jane 50 Jahre vergangen**, sie feiert also gerade ihren **70. Geburtstag**. Dick aber, der insgesamt 30 Signale (15 auf der Hinreise, 15 auf der Rückreise) ausgesandt hat, feiert im gleichen Augenblick seinen 50. (!) Geburtstag: er ist ja auch nur $2 \times 20/(\beta\gamma) = 30$ Jahre fortgewesen!

Woher kommt der 'Faktor 3' zwischen dem Absenden der Signale durch Dick und ihrer Ankunft bei Jane? Die Einheit auf Dick's Zeitachse (in Einheiten von Jane) ist:
$t' = \gamma\ (1 + \beta^2)^{1/2}\ t$; der Winkel zwischen (t,t') -Achse α = arc tanβ = $38{,}66^0$, der Winkel zwischen Lichtsignal und t-Achse = 45^0. Daraus ergibt sich für den Abstand Δt zweier Lichtsignale auf der t-Achse, die Dick am Ende jedes Jahres auf seiner Zeitachse (= $\gamma(1 + \beta^2)^{1/2}$ Jahre für Jane) abgeschickt hatte, nach dem Sinussatz:

$$\Delta t = \gamma\ (1 + \beta^2)^{1/2} \sin\{180^0 - 45^0 - \alpha\} / \sin(45^0) = \gamma\ (1 + \beta) = e^{\varphi} = 3 \quad (8.11)$$



Was aber ist mit der Symmetrie?? Gilt dasselbe nicht auch umgekehrt?? Nein! Da außerdem Beschleunigung im Spiel ist, kann das Problem exakt nur im Rahmen der 'allgemeinen Relativitätstheorie' behandelt werden. Diese Rechnung ergibt aber (fast) genau das obige, 'unsymmetrische' Ergebnis. (Nur die als ganz kurz angenommenen Beschleunigungsphasen ändern die obigen Zahlen ein wenig).

Sie sollten versuchen, das Ergebnis nochmals auf dem Minkowski-Diagramm anhand der obigen 'Anleitung' und anhand der Bilder nachzuvollziehen. Sie werden sehen, es funktioniert! Der 'relativistische Hallodri' Dick spart tatsächlich etwa 20 Lebensjahre gegenüber seiner erdständigen Zwillingsschwester Jane ein!