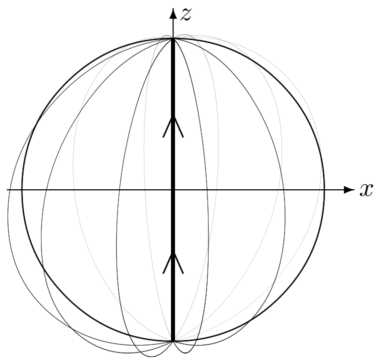
| Übungen zu EMTP II | **Blatt Nr. 23** | 19.06.2007 |
|---|---|---|

[ Abgabe 26.06. *vor* der Vorlesung ]

**Aufgabe 71:** Magnetischer Dipol macht Blumenstrauß (4 Punkte)

Die aus Theorem 3 bekannte Lösung $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , $\vec{A} = \int d^3r' \frac{\vec{W}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ , $\vec{W} = \frac{\vec{\jmath}}{\varepsilon_0 c^2}$ der (magnetostatischen) Gleichungen $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ , $\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{W}$ ist nicht immer sofort hilfreich. So ist z.B. bereits für einen Kreisstrom $\vec{\jmath} = I\,\delta(z)\,\delta(\rho - R)\,\vec{e}_\varphi$ das Integral nicht mehr ausführbar, es sei denn man läßt den Kreisstrom per $R \to 0$ (und zugleich $I \to \infty$ ) zu einem *magnetischen Dipol* werden [wie immer ist hier natürlich $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$]. Noch vor Integration können Sie nun $1/\sqrt{\phantom{x}} = \ldots ? \ldots + \mathcal{O}(R^2)$ vereinfachen, daraufhin das $\varphi'$–Integral auswerten und schließlich $\vec{A} = \frac{I \cdot \text{Kreisfläche}}{4\pi\,\varepsilon_0 c^2}\left(-\frac{y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0\right)$ erhalten. Ist es so? Prüfen Sie nun, ob sich per $\nabla\times$ wirklich das Blumenstrauß–Feld $\vec{B}$ aus **Ü68b** ergibt.

**Aufgabe 72:** Nord–Süd–Strom (3+1+2=6 Punkte)




Auf der Symmetrieachse einer Kugel ($R$) fließt Strom $I$ nach oben ($z$–Achse). Die Ladung strömt dann auf der leitenden Kugeloberfläche von N nach S wieder zurück, und zwar zylindersymmetrisch auf Meridianen. Da sich nirgends Ladung anhäuft, gilt die Conti zu $\dot{\rho} \equiv 0$ .

(a) Obigem Text folgend setzen wir die (im ganzen Raum gültige) Stromdichte $\vec{\jmath}\,(\vec{r})$ an als [Hätten Sie es ggf. auch selber so gemacht?]

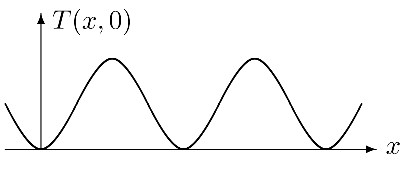
$$\vec{\jmath} = \vec{e}_3\,I\,\delta(x)\,\delta(y)\,\theta(R-|z|) + \vec{e}_\vartheta\,f(\vartheta)\,\delta(r-R)\ .$$

Bestimmen Sie nun die Funktion $f(\vartheta)$ aus der Quellenfreiheit des zweiten $\vec{\jmath}$–Terms. [Hinweise: Endlich kommt einmal Nabla in Kugelkoordinaten zu Ehren, eine homogene Dgl 1. Ordnung für $f(\vartheta)$ entsteht und läßt sich lösen. Den unbekannt gebliebenen $f$–Vorfaktor erhalten Sie aus der Forderung, daß in der Äquatorebene abseits Ursprung insgesamt der Strom $I$ nach unten fließt.]

(b) Um das von $\vec{\jmath}$ verursachte Magnetfeld $\vec{B}$ mittels der (integralen, statischen vierten Maxwell–) Gleichung $\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{B} = \int_S d\vec{f}\cdot\vec{\jmath}\,\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ , wobei $C$ die Randkurve der Fläche $S$ ist, zu erhalten, ist Information über seine Richtung erforderlich. Angenommen (sehr mutig, aber bei (c) prüfen Sie ja nach) $\vec{B}$ ist überall proportional zu $\vec{e}_\varphi$. Dann ist $\vec{B} = ?$ (Geben Sie bitte $\vec{B}$ mittels $\theta(\ldots)$ im ganzen Raum an).

(c) Das Nachprüfen der (lokalen, statischen vierten Maxwell–) Gleichung $\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{\jmath}\,\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ (also zu gegebenem $\vec{B}$ die Ursache $\vec{\jmath}$ zu berechnen) ist hier ein wenig anstrengend [Empfehlung: $\nabla\times$ kartesisch ausführen; die Singularität an der $z$–Achse bleibe unbeachtet]. Kommt der zweite $\vec{\jmath}$–Term des (a)–Resultates wieder richtig heraus?

**Aufgabe 73:** Diffusion gleicht aus (2 Punkte)




Zur Zeit $t = 0$ liege die räumliche, aber nur mit $x$ variierende Temperatur–Verteilung $T(\vec{r}, 0) = 2\,T_0\,\sin^2(kx)$ vor. Wie verändert sich $T(\vec{r}, t)$ im Laufe der Zeit, wenn es der Diffusionsgleichung $T(\vec{r}, t) = \mathrm{e}^{\,t\,D\,\Delta}\,T(\vec{r}, 0)$ genügt [$D$ ist konstant]? Welche Gestalt erreicht die Temperatur–Verteilung im Limes $t \to \infty$ ?