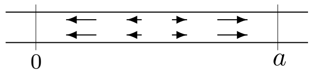
Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 22**	12.07.2007

[Abgabe 19.07. *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 68: Drei mal Divergenz (0.5+1+1.5+2=5 Punkte)

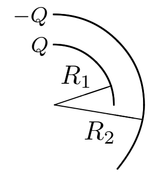
(a) 

Auf einen ∞ langen Wassergraben regnet es bei $x \in (0,a)$, so daß dort $\mathrm{div}\,\vec{v} = \gamma = \mathrm{const}$ ist und $\vec{v} = v(x)\,\vec{e}_1$. $v(x)_{\text{innen}} = ?$

(b) Zu welchem λ ist das Blumenstrauß–Magnetfeld $\vec{B} = \alpha\,(\lambda\, z\,\vec{r} - r^2\vec{e}_3)/r^5$ quellenfrei ?

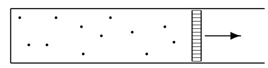
(c) Zu allgemein kugelsymmetrischer Ladungsverteilung $\rho(r)$ sollen die elektrostatischen Maxwell-Gleichungen $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ und $\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$ gelöst werden : Ansatz für $\vec{E}$ und schließlich $\vec{E} = ?$
[Am Ende bleibt ein r'–Integral stehen.]

(d) Anwendungsbeispiel (und Test) zum (c)–Resultat sei der Kugelkondensator : Q auf Kugeloberfläche R_1 und $-Q$ auf R_2. $\rho(r) = ?$ $\vec{E} = ?$ Elektrostatisches Potential $\phi(r) = ?$ im Zwischenraum, Spannung $U = ?$ Kapazität $C := Q/U = ?$ Schreibt man $R_1 = R$, $R_2 = R + d$ und studiert $d \to 0$, so entsteht die Kapazität eines Plattenkondensators, nämlich mit Fläche $F = ?$



Aufgabe 69: Conti $\dot{n} + \mathrm{div}\ \vec{\jmath} = 0$ (1.5+1+2.5=5 Punkte)

(a) Expansion eines Gases. In einem Rohr (bei $x = 0$ verschlossen, Querschittsfläche F) befinden sich N Teilchen. Der Kolben wird mit $x_{\mathrm{k}}(t) = L\,(1 + 2\omega t)/(1 + \omega t)$ so langsam bewegt, daß die Teilchendichte $n(t) = ?$ stets ortsunabhängig bleibt. Welche Teilchenstromdichte $\vec{\jmath} = \jmath(x,t)\,\vec{e}_1$ liegt im Inneren vor ?



Test I: Wie *sollte* $\jmath(x_k(t),t)$, d.h. die Stromdichte am Kolben, mit $n(t)$ zusammenhängen ?
Test II: Ist diese Beziehung erfüllt ?

(b) Nach einer Explosion hat die Luft im U–Bahn–Tunnel die Teilchendichte $n = n_0 + n_1\,e^{-\alpha(x-ct)^2}$, wobei n_0, n_1, α positive Konstanten sind und c die Schallgeschwindigkeit in Luft ist. Welche Teilchenstromdichte $\jmath(x,t)$ begleitet den Knall ? [mit $\jmath$ ist die erste Komponente gemeint : $\vec{\jmath} = \jmath(x,t)\,\vec{e}_1$]

(c) Weil eine Schall–Kugelwelle ständig am Ursprung erzeugt wird, ist der Luftraum (n_0 := Teichendichte bei Stille) von der kugelsymmetrisch–radialen Teilchenstromdichte

$$\vec{\jmath} = \frac{\alpha\,\omega}{k}\,\frac{\vec{r}}{r^3}\left[r\,c - \frac{s}{k}\right] \quad \text{mit} \quad c := \cos(kr - \omega t)\ ,\ s := \sin(kr - \omega t)$$

erfüllt. Welche Teilchendichte $n(r,t)$ hat die Kugelwelle ? Mit welcher Geschwindigkeit v bewegen sich Flächen konstanter Dichte n_0 ?

Aufgabe 70: $\Delta\,\frac{1}{r} \;=\; -4\pi\,\delta(\vec{r})$ (1+1=2 Punkte)

(a) Auch mit der Einbettung $\frac{1}{r} \to \frac{1}{r}\left(1 - e^{-r/\varepsilon}\right)$ läßt sich obiger Zusammenhang gut nachweisen. Natürlich ist dabei zuletzt per $\int d^3r \ldots$ eine neue $\delta(\vec{r})$–Darstellung dingfest zu machen.

(b) Würden wir in 2D leben, dann wäre $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ unser Laplace–Operator. Daß $\Delta_{2\,r} = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r$ sein radialer Anteil ist, glauben wir (wegen Analogie zur bekannten Rechnung in 3D). Aber wir prüfen nach, ob die Operator–Identität $\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r \;\equiv\; \frac{1}{r}\,\partial_r\, r\,\partial_r$ gilt. Deren rhs zeigt (per Δ_2–Anwenden im Kopf), daß nun $-\ln(r)$ das Potential einer Punktladung dieser 2D Welt ist. Wir erwarten $\Delta_{2\,r}\ln(r) = \lambda\,\delta(\vec{r})$, denken uns eine einfache Einbettung des ln aus und ergründen den Wert von λ .