$\boxed{\text{Übungen zu EMTP II} \qquad \textbf{Blatt Nr. 20} \qquad 29.05.2007}$

[Abgabe 05.06. *vor* der Vorlesung]
[Abholen ab 08.06. (Tutor) oder 12.06. (Vorl.) ; Lösungen online ab 05.06.]

Aufgabe 62: Weltmodell II (5 Punkte)

Wir haben keine Weltregierung. Eine so vernünftige wie in Übung 60 ist auch so bald nicht zu erwarten. Es wird eine Eigendynamik geben. In $\boxed{\dot{N} = (G-S)N\,,\ N(0) = N_0}$ machen wir den Faktor $G-S$ von einer pauschalen Vorratsgröße $V(t)$ abhängig (Rohstoffe, bebaubares Land, Luftsauerstoff etc.): $G-S = G_0 - S_0 + \alpha\,(V - V_0)\,,\ V(0) = V_0$, welche proportional zu N abnimmt: $\dot{V} = -\beta N$. Wie auch immer man $G-S$ abnehmen läßt, man kann es als Abnahme der Geburtenrate lesen, oder aber als Zunahme der Sterberate.

Mit „Zeit“ $\tau = \sqrt{\alpha\beta N_0}\,t$ und bei Übergang $N(t) = N_0 u(\tau)\,,\ V - V_0 = -\sqrt{\beta N_0/\alpha}\,v(\tau)$ zu den zwei neuen Funktionen u, v versammeln sich alle Konstanten in einer einzigen: $\eta = (G_0 - S_0)/\sqrt{\alpha\beta N_0}$. Das Dgl–System (zuzüglich Anfangsbedingungen) bekommt dabei die Gestalt $\boxed{u' = u\cdot(\eta - v)\ ,\ v' = u \quad , \quad u(0) = 1\ ,\ v(0) = 0}$.

Stimmt das? Welche Dgl für v allein folgt hieraus? Welche Besonderheit hat sie? Usw. Alles funktioniert, und man kommt analytisch durch bis zur Lösung $u(\tau)$.

[Empfehlung: zu jeder Hilfs– oder Teil–Dgl stets auch ihre Anfangsbedingung notieren (ER's!). Ob $\frac{1}{2+2\eta v - v^2} = \frac{1}{\omega^2 - (v-\eta)^2} = \partial_v \frac{1}{2\omega} \ln\left(\frac{\omega-\eta+v}{\omega+\eta-v}\right)$ mit $\omega := \sqrt{2+\eta^2}$ stimmt und sogar plötzlich zu gebrauchen ist? Kennt man $v(\tau)$, so auch $u(\tau)$. Nach so vielen Gelegenheiten, sich zu verrechnen, möchte man wohl gern vergleichen: $u(\tau) = \frac{4\omega^2\, e^{\omega\tau}}{[\,(\omega-\eta)\,e^{\omega\tau} + \omega + \eta\,]^2}$. Aber hoffentlich stimmt das nicht, denn die Langzeit–Prognose fällt ersichtlich arg traurig aus.]

Aufgabe 63: Drei mal Green (2+2+2=5 Punkte)

(a) Jemand behauptet, der 2D translationsinvariante Operator $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ habe die Greensche Funktion $G(\vec{\rho}) = \frac{1}{4\pi}\ln\!\big(\rho^2 + \varepsilon^2\big)\,,\ \vec{\rho} := (x,y)$, wobei das G–Verhalten bei $\rho \to 0$ vorsichtshalber epsilontisch eingebettet wurde. Stimmt das? [Werten Sie also $\Delta_2\, G$ aus, und prüfen per $\int d^2r \ldots$ nach, ob sich eine Darstellung der 2D Deltafunktion ergeben hat. Wie immer ist $\varepsilon = 0^+$]

(b) Zeigen Sie, daß $G = \theta(t)\, e^{-\gamma t} \frac{1}{\Omega} \sin\big(\Omega t\big)$ mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ die Greensche Funktion von $\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$ ist. Als Spezialfall können Sie daraus $G(t) = ?$ des Operators $L = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t$ gewinnen. [und sparen sich hierzu das Nachprüfen.]

(c) $L = t\,\partial_t$ ist kein translationsinvarianter Operator. Welche allgemeine Greensche Funktion $G(t,a)$ hat er? Bereich sei $0 < t, a < T$. Mittels G erhalte man dann die allgemeine Lösung von $t\,\dot{v} = f(t)$. [Und daß $v_{\rm allg}(t)$ richtig ist, sieht man im Kopf.]

Aufgabe 64: Greensche Funktion von Δ_r (2+1=3 Punkte)

Der Operator $\Delta_r \equiv \frac{1}{r}\partial_r^2 r$ ist nicht translationsinvariant. Seine Greensche Funktion $G(r,a)$ hängt also nicht vom Differenzargument ab. Bereich: positive r–Halbachse.

(a) Ermitteln Sie jene spezielle Greensche Funktion, welche bei $r < a$ verschwindet.

(b) $G(r,a)$ liefert Ihnen nun eine spezielle Lösung $V_{\rm sp} = ?$ von $\Delta_r\, V(r) = 4\pi\gamma m\, \rho(r)$

[Bem.: Ihre Antwort hat sicherlich, wie in **Ü54a**, die Form $\int .. + \int ..$, wobei Sie (zur Kontrolle) nach Umformen eines Terms dieser Summe per $\int_0^r .. = \text{const} - \int_r^\infty ..$ in der Nähe der dortigen Antwort landen könnten.]