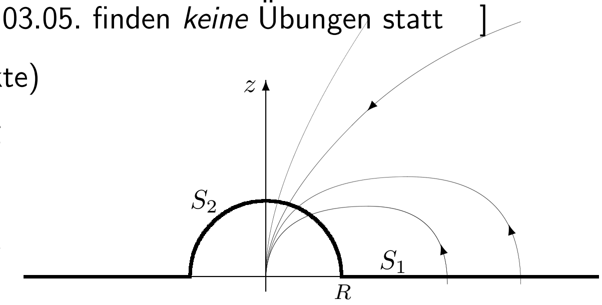
Übungen zu EMTP II	**Blatt Nr. 16**	24.04.2007

[Abgabe 08.05 *vor* der Vorlesung ; am 03.05. finden *keine* Übungen statt]

Aufgabe 49: Strom I durch Fläche (2+2=4 Punkte)

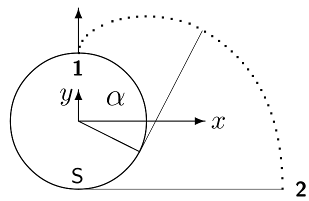


Überall in der oberen Atmosphäre möge Ladung fließen, mit Stromdichte $\vec{\jmath} = \alpha(r^2\vec{e}_3 - 3z\vec{r})/r^5$. Weil sich dabei nirgends Ladung anhäuft [später: weil „$\nabla\cdot\vec{\jmath} \equiv 0$“], sollte der Strom I_S durch die gesamte Fläche $S = S_1 + S_2$ schlicht Null sein.

(a) Rechnen Sie zuerst den Anteil I_1 durch die R–Kreis–gelochte (und ansonsten unendliche) xy–Ebene aus (per Flächenintegral, „außen“ ist oben).
(b) Werten Sie den Anteil I_2 durch die R–Halbkugel–Oberfläche S_2 („außen“ ist außen) explizit als Oberflächenintegral aus. [günstig: Polarkoordinaten $\vec{r}(\rho,\varphi) = (\rho\, c,\, \rho\, s,\, \sqrt{R^2-\rho^2}\,)$]

Aufgabe 50: Kurvenintegrale (1+1+2=4 Punkte)

(a) Der $\sin(x)$ bildet zwischen 0 und π einen Torbogen (Skizze!). Wie lang mag er sein ?
(b) Ein Draht mit homogen verteilter Masse M wurde zu einem Viertelkreis (Radius a) gebogen. Masse/Länge $\sigma = ?$ Wo liegt der Schwerpunkt $\vec{R} = ?$ Ist wirklich $|\vec{R}\,| < a$ herausgekommen ?



(c) Welche Länge L hat der punktierte Weg, den ein Stein zurücklegt, welcher an einem um die Erde (R) gewickelten Faden hängt, am Nordpol (Punkt **1**) hochgeworfen wird und schließlich die skizzierte Horizontale bei **2** erreicht ? [Guter Parameter ist der Winkel α zwischen y–Achse und Fadenablösepunkt: $\vec{r}(\alpha) = .\therefore. + .\therefore. = ?$]

Aufgabe 51: Flächenintegral (2+1+1+2=6 Punkte)

Die Erde (Radius R) ist eine Scheibe und liegt in der xy–Ebene (Zentrum = Ursprung). Ihre Masse M ist homogen verteilt, d.h. die konstante Masse/Fläche der Scheibe ist $\sigma = ?$ Eine Raumsonde (m) bei $\vec{r}$ spürt den negativen Gradienten des Potentials V der Scheibe.

(a) Schreiben Sie $V(\vec{r})$ als ebenes Flächenintegral auf, und zwar in Polarkoordinaten. [Vorsicht, davon gibt's 2 Sorten: ρ' und φ' grasen die Scheibe ab, $\vec{r} = (\,\rho\cos(\varphi)\,,\, \rho\sin(\varphi)\,,\, z\,)$ positionieren die Sonde.]

(b) Aus Symmetriegründen kann V kann nicht von φ abhängen. Auch das bei (a) notierte Doppelintegral sollte diese Unabhängigkeit zeigen. Wie gelingt das ?

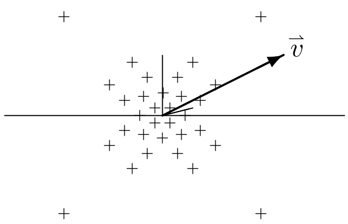
(c) Anschaulich ist auch klar, auf welchen asymptotisch führenden Term $V_\infty = ?$ sich V bei $r \to \infty$ reduzieren muß. Folgt auch dies aus Ihrem $\iint$ von (a) ?

(d) Bleibt die Sonde auf der z–Achse, so sind die Integrale für $V(0,0,z)$ ausführbar. Welcher Term bleibt übrig (V–Konstante weglassen !), wenn z so klein wird, daß man gegen 1 kein $O(z^2/R^2)$ mehr wahrnehmen kann ?

[Bei Integrand $\sqrt{1-\mathrm{trig(x)}}$ ist oft Substitution $\mathrm{trig}(x) = u$ einen Versuch wert (trig = eine der trigonometrischen Fktn).]

Aufgabe 52: Meteorologie per Integral (2+2+1=5 Punkte)

Gewitterwolke. Nach Blitzschlag fliegt eine positiv geladene Wolke mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = (\,v_1\,,\,0\,,\,v_3\,)$ nach rechts–oben weiter ($v_3 > 0$). Ladungs– und Stromdichte erfüllen den Raum: $\rho(\vec{r},t) = \left(b/\sqrt{\pi a^2}\,\right)^3 \exp\left[\,-(\vec{r}-\vec{v}t)^2/a^2\,\right]$, $\vec{\jmath}\,(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\cdot\vec{v}$.



(a) Welche Dimensionen haben die Konstanten a und b ? Welche Gesamtladung $Q = \int\!\mathrm{d}x\!\int\!\mathrm{d}y\!\int\!\mathrm{d}z\,\rho$ hängt zur Zeit $t = 0$ im Raum ? [Per Verschiebetrick wird klar, daß auch zu jeder späteren Zeit diese Gesamtladung Q vorliegt.]

(b) Welcher Strom $I(t)$ — als ebenes Flächenintegral auszuwerten — fließt durch die Ebene $z = 0$?

(c) Das Felder–Paar $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{\jmath}\,(\vec{r},t)$ muß $\partial_t\rho + \partial_x j_1 + \partial_y j_2 + \partial_z j_3 = 0$ (die sog. *Kontinuitätsgleichung*) erfüllen. Ist es so? [beim Ableiten nach t ist $\vec{r}$ fest, beim Ableiten nach x sind t, y, z fest usw.]