z.B. gerader Draht, Strom I,  ϱ

$S =$ Kreis(ϱ) ; stets ist $d\vec{r} \parallel \vec{B}$

$$\rightsquigarrow \quad B \cdot 2\pi\varrho = I/\varepsilon_0 c^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{1}{\varrho}\,\vec{e}_\varphi$$

Bsp räumliche partielle Integration

$$\int_V d^3r\, \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi = \int_V d^3r \left(\vec{\nabla}(\vec{A}\phi) - \phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \right)$$

$$\overset{\text{(Gauß)}}{=} \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{A}\phi - \int_V d^3r\, \phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

wenn $V = \mathbb{R}^3$, d.h. $S =$ dessen Rand, und $\vec{A} \to 0$ am Rand, dann ist offenbar "$\boxed{\overrightarrow{\nabla} \longrightarrow -\overleftarrow{\nabla}}$" erlaubt

Nachtrag zu S.95, Beweis zu $\boxed{2}$:

$$\vec{A} = \vec{r}\times\vec{C}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{C}(\vec{r}) \equiv -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}\vec{r}\vec{\nabla}}\,\vec{B}(\vec{r})$$

wurde behauptet. Zeige: $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$, falls $\text{div}\,\vec{B} = 0$.

$$\vec{B} \overset{?!}{=} \text{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{C}) \overset{\text{(bac-cab)}}{=} \vec{r}(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{\nabla}\vec{r}) + (\vec{C}\vec{\nabla})\vec{r} - (\vec{r}\vec{\nabla})\vec{C}$$

a) $$(\vec{\nabla}\vec{C}) = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^n\vec{B}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ \left(-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^n \vec{\nabla}\cdot\vec{B} + n\left(-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\right)\vec{B} \right\}$$

$\text{div}\,\vec{B} = 0$ $\qquad \hat{=}\ \partial_j r_i \partial_i = \partial_j = \vec{\nabla}$

b) $(\vec{\nabla}\vec{r}) = \partial_i r_i = 3$

c) $(\vec{C}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = C_i\partial_i r_j = C_j = \vec{C}$

$$= 0 - 3\vec{C} - \vec{C} - (\vec{r}\vec{\nabla})\vec{C} = -2\left(1+\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{C} = \vec{B} \quad \blacksquare$$

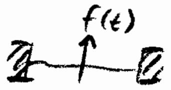
10. Fourier ($\hat{=}$ §12 in PB)

die wichtigste Rechenmethode? (in allen Gebieten der Physik)

ähnlich §5.3: Potenzreihen

hier: "harmonische Analyse"

10.1 Fourier-Reihe

Ein Ton (Trommelfell-Auslenkung ) sollte aus Grund- und Obertönen bestehen:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Stärke}_n \cdot \text{Oberton}_n(t) \qquad \left(\!\left(\text{Oberton}_1 \equiv \text{Grundton} \right)\!\right)$$

Anteil n ist experimentell herausfilterbar.

Also sollte (könnte) jede L-periodische Fkt $f(x)$ $\left(\!\left(f(x+L) = f(x) \right)\!\right)$ wie folgt darstellbar sein:

$$f(x) \overset{?}{=} f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) \right]$$

Euler $e^{ix} = c + is$

$$= \underbrace{f_0}_{\equiv c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)}_{\equiv c_n} e^{in\frac{2\pi}{L}x} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)}_{\equiv c_{-n}} e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

Falls OK, welche c_n? Wende Op. $\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x}$ an:

$$\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{i(n-m)\frac{2\pi}{L}x}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m$$

$$= \begin{cases} n = m: & 1 \\ n \neq m: & \frac{1}{L}\,\dfrac{e^{i(n-m)2\pi} - 1}{i(n-m)2\pi/L} = \frac{1}{L}\,\dfrac{\overbrace{\cos[(n-m)2\pi]}^{=1} + i\overbrace{\sin[\dots]}^{0} - 1}{\dots} = 0 \end{cases}$$

Haben auch $f_0 = c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x) = \bar{f}$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, \cos\left(n\tfrac{2\pi}{L}x\right) f(x)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \; \dots \; \sin \; \dots\dots$$

((Nachweis, daß ? unnötig ist:

gegeben f, berechne $c_n = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x)$,

bilde damit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} =: f_F(x)$,

prüfe ob $f_F = f$.

$$f_F(x) = \int_0^L dx'\, \underbrace{\frac{1}{L}\sum_n e^{in\frac{2\pi}{L}(x-x')}}_{\equiv K(x-x')} f(x')$$

$$K(x) = \frac{1}{L}\sum_n \left(e^{i\frac{2\pi}{L}x}\right)^n = \frac{1}{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-\infty}^{0} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{1}{1-()} + \frac{1}{1-1/()} - 1\right) = \frac{1}{L}\,\frac{1-()-1+()}{1-()} = 0,$$

außer bei $x = 0, \pm L$, usw.!

$$K(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{L}\int dn\, e^{i\frac{2\pi}{L}xn} = \frac{1}{L}\, 2\pi\, \delta\!\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = \delta(x)$$

also $K(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

$$= \int_0^L dx' \sum_m \delta(x-x'+mL) f(x') = f(x) \quad \bullet \quad))$$

Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{L\text{-per.}}(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} \\ \text{mit } c_n &= \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \end{aligned}}$$

Nebenprodukt (s.o.): $\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{L}x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

<u>Bem.:</u> bei c_n-Berechnung ist $(0,L)$-Verschiebung erlaubt (weil Integrand $f\cdot e^{\cdots}$ L-per. ist):

$$\int_0^L = \int_0^{L-a} + \int_{L-a}^{L} = \int_0^{L-a} + \int_{-a}^{0} = \int_{-a}^{L-a}.$$

<u>Eigenschaften:</u>

f reell $\Leftrightarrow$ $c_n^* = c_{-n}$

f gerade $\Leftrightarrow$ $c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) = c_{-n}$

d.h. $b_n = 0$, reine cos-Reihe

f ungerade $\Leftrightarrow$ $c_n = -c_{-n}$, d.h. $a_n = 0$, reine sin-Reihe und $f_0 = 0$

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n \, in \frac{2\pi}{L}} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$ hat diese Koeff'n

$$f(x-a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n \, e^{-in\frac{2\pi}{L}a}} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$ hat diese Koeff!

mathy: $f(x) = \delta_{per.}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

gilt $c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \, \delta(x)\, e^{-\cdots} = \frac{1}{L}$

und $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$

Bem: Fourier-Reihe kann auch endlich viele δ's, sowie Stufen usw. darstellen. (s. Ü 74)

Anwendungen

1) Diffusion (vgl. Ü 73) mit period. Start-Temp.

$\dot{T} = D\Delta T$, $T(x,t) = e^{tD\partial_x^2} T(x,0)$

$$= e^{tD\partial_x^2} \sum_n c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

$$= \sum_n c_n e^{-tDn^2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

2) gedämpfter, periodisch angeregter Oszi.

$$\left(\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2\right)x(t) = b(t) = b(t+T)$$

nach Einschwingen auch $x(t) = x(t+T)$

$$\sum_n c_n \underbrace{(\;)}\, e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_n b_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

$$-\left(n\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \gamma\, in\frac{2\pi}{T} + \omega_0^2 =: [\;]_n$$

Koeff-Vergl.: $c_n[\;]_n = b_n \Rightarrow c_n = \frac{b_n}{[\;]_n}$

3) Fourier-Reihe liefert Fourier-Transformation (s. § 10.2)