2 Sei $\vec{B}$ ein in $\mathcal{G}$ quellenfreies Feld, d.h. $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{B}$ hat in $\mathcal{G}$ ein Vektorpotential, d.h. $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$

<u>Beweis:</u>

- lokal: $\vec{B} = \vec{B}(\vec{0}) + S\vec{r} + \underbrace{A\vec{r}}_{\vec{\omega}\times\vec{r}} + \mathcal{O}(\vec{r}^2)$

- $\operatorname{div}\vec{B} = \partial_i\left[B_i(0) + S_{ij}r_j + A_{ij}r_j\right] = S_{ii} + \cancel{A_{ii}}^{\,0} = Sp(S) \overset{!}{=} 0$

- $\vec{B}$ hat $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}(0)\times\vec{r} - \frac{1}{3}\vec{r}\times S\vec{r} - \frac{1}{3}\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

((denn $\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{2}\vec{B}(0)\times\vec{r}\right) \overset{\text{bac-cab}}{=} \frac{1}{2}\vec{B}(0)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{B}(0)\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} = \frac{1}{2}\left[3-1\right]\vec{B}(0)$

und $\vec{\nabla}\times\left(-\frac{1}{3}\vec{r}\times S\vec{r}\right) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{3}S\vec{r}\times\vec{r}\right) \underset{\text{ü 66 b}}{=} \frac{1}{3}\left(2S\vec{r} - \vec{r}\,\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot S\vec{r})}_{\overset{!}{=}0,\ \text{s.o.}} + r\partial_r S\vec{r}\right)$

$= S\vec{r}$, denn $r\partial_r S\vec{r} = S\underbrace{r\partial_r r}_{=1}\vec{e}_r = S\vec{r}$ ← nur Winkelabhängig))

- global: $\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{2}\vec{r}\vec{\nabla}}}\vec{B}(\vec{r})$ — als Reihe gedacht: $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i$

((→ s. S. 99))

<u>Bem.:</u> $\vec{A}$ nicht eindeutig festgelegt:

$$\left.\begin{aligned}\vec{B} &= \operatorname{rot}\vec{A}_{I}\\ \vec{B} &= \operatorname{rot}\vec{A}_{II}\end{aligned}\right\}\quad \vec{0} = \vec{\nabla}\times\underbrace{\left(\vec{A}_{I} - \vec{A}_{II}\right)}$$

kann ein Gradient sein! (s.S. 92: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$)

also $\vec{A}_{I} = \vec{A}_{II} + \vec{\nabla}\chi(\vec{r})$ möglich.

$\vec{B}$ merkt von dieser "Umeichung" nichts.

3 Unter den Lösungen $\vec{A}(\vec{r})$ des Problems $\left\{\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{A} &= Q(\vec{r})\\ \operatorname{rot}\vec{A} &= \vec{\omega}(\vec{r})\end{aligned}\right\}$ mit ganz im Endlichen liegenden gegebenen Quellen $Q, \vec{\omega}$ <u>gibt es</u> <u>nur ein</u> von $Q, \vec{\omega}$ verursachtes Feld $\vec{A}$. Es fällt mind. $\sim 1/r^2$ ab.

- "gibt es": setze $\vec{A} = \vec{E} + \vec{B}$ mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = Q$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$; $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\omega}$

kenne $\vec{E} = -\vec{\nabla}\int d^3r'\,\frac{Q(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\int d^3r'\,\frac{\vec{\omega}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

Test: $\vec\nabla\times\vec B = \vec\nabla\times\left(\vec\nabla\times\int\ldots\right) \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec\nabla\left(\vec\nabla\cdot\int\ldots\right) - \Delta\int\ldots =: \vec\nabla ① + ②$

$$② = -\int d^3r'\,\frac{\vec w(\vec r')}{4\pi}\,\underbrace{\Delta\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}_{=\,-4\pi\,\delta(\vec r-\vec r')} = \vec w(\vec r)$$

$$① = \vec\nabla\cdot\int\ldots = \int d^3r'\,\frac{\vec w(\vec r')}{4\pi}\cdot\underbrace{\vec\nabla\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}_{=\,-\vec\nabla'\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}$$

$$\int dx'\,w_1(\vec r')\,(-\partial_{x'})\frac{1}{|\,|} = \int dx'\,\frac{1}{|\,|}\,\partial_{x'}w_1 \qquad (\text{part. Int.})$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{1}{|\,|}\,\underbrace{\vec\nabla'\cdot\vec w(\vec r')}_{=\,\vec\nabla'\cdot(\vec\nabla'\times\vec B(\vec r'))\,=\,0} \qquad \left(\left(\text{s. S. 92: } \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec A = 0\right)\right)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow\ \vec\nabla\times\vec B = \vec w$ ✓✓ $\quad$ ((und $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$ ✓✓ wg. div rot $\vec A = 0$))

• "nur ein": gäbe es zwei $\vec A$, müßte die Differenz $\vec C = \vec A_I - \vec A_{II}$ die Gln $\left\{\begin{matrix}\vec\nabla\cdot\vec C = 0\\ \vec\nabla\times\vec C = \vec 0\end{matrix}\right\}$ erfüllen

(⑧: System 1. Ordnung → weniger Gln. 2. Ordnung)

per $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec C) = \vec 0 \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec\nabla\underbrace{(\vec\nabla\cdot\vec C)}_{\overset{!}{=}\,0\text{ nach Voraussetzung}} - \Delta\vec C$

$$\Rightarrow\ \Delta C_1 \overset{!}{=} 0,\quad \Delta C_2 \overset{!}{=} 0,\quad \Delta C_3 \overset{!}{=} 0$$

es gilt aber:

Weil eine Lsg ϕ von $\Delta\phi = 0$ nirgends max. oder min. werden kann, liegen die betragsmäßig größten Werte am Rand.

((denn: hätte ϕ Max $\Rightarrow (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\,\phi$ neg., nicht 0))

$\Rightarrow$ da am "Rand" des $\mathbb R^3$ $\vec A \to \vec 0$ (nach Vorr. in $\boxed{B} \sim \frac{1}{r^2}$), so auch jede Differenz $\vec C$, also $\vec C \equiv \vec 0$ überall ∎

9. Integralsätze

((Kap. 8 war lokale Analyse, Steigungen und Krümmungen. Auch Conti (und Maxwell) gelten lokal, in Umgebung jedes Punktes der Welt. Hier: einige globale Gleichungen, die manchmal nützlich sind))

9.1 Gauß und Stokes

(0.) $\int_a^b dx\, \partial_x F(x) = F(b) - F(a)$

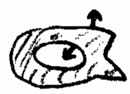
(1.) $\int_1^2 d\vec{r} \cdot \mathrm{grad}\,\phi = \phi(2) - \phi(1)$

((denn: $\text{lhs} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{\nabla}\phi}_{\overset{!}{=} \partial_t \phi(\vec{r}(t))} = \phi(\vec{r}(t_2)) - \phi(\vec{r}(t_1))$))

(2.) Gauß: $\boxed{\int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\vec{E} = \oint_S d\vec{f} \cdot \vec{E}}$

ein raumfestes Volumen ggf. mehrfach zus.h.

die Oberfläche von V ggf. mehrere Teile ($\oint$ weil geschlossen)



Beweis: physikalisch, via Conti. $\dot{\varrho} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$ ("etwas" = Ladung = erhalten)

"was rausging, ist nicht mehr drin"

$$I_S \overset{!}{=} -\partial_t Q_V$$

$$\int_S d\vec{f} \cdot \vec{j} = -\partial_t \int_V d^3r\, \varrho = \int_V d^3r\, (-\dot{\varrho}) \overset{(\text{Conti})}{=} \int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\vec{j}$$

(3.) Stokes: $\boxed{\int_S d\vec{f} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{B} = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{B}}$

gewölbtes Flächenstück — dessen Randkurve

(auch mehrfach zus.h.)

Beweis: (a) für Rechtecke
(b) für beliebige ebene Fläche
(c) für gewölbte Fläche

(a) oBdA: Rechteck in xy-Ebene , $d\vec f = \vec e_3 \cdot d^2r$

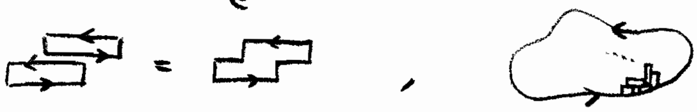
$$\int_S d\vec f \cdot \operatorname{rot} \vec B = \int_{\text{Rechteck}} d^2r\; \vec e_3 \cdot \left(\ldots, \ldots, \partial_x B_2 - \partial_y B_1 \right)\Big|_{z=0}$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \left(\partial_x B_2(x,y,0) - \partial_y B_1(x,y,0) \right)$$

$$= \int_0^b dy\; B_2(a,y,0) - \int_0^b dy\; B_2(0,y,0)$$

$$- \int_0^a dx\; B_1(x,b,0) + \int_0^a dx\; B_1(x,0,0)$$

$$= \int_{\mathcal{C}} d\vec r \cdot \vec B$$

(b) 

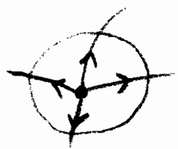
(c)  usw.

Bem
- alle Int-Sätze sind Skalar = Skalar
- $\int_{n\text{-fach}} \nabla \ldots = \int_{(n-1)\text{fach}} \ldots$
- (merken:) $\int_1^2 d\vec r \cdot \operatorname{grad} \phi = \phi_2 - \phi_1$

$$\int_S d\vec f \cdot \operatorname{rot} \vec A = \oint_{\mathcal{C}} d\vec r \cdot \vec A$$

$$\int_V d^3r \cdot \operatorname{div} \vec A = \oint_S d\vec f \cdot \vec A$$

9.2. Anwendungsbeispiele

Bsp Kirchhoffs Regel  $\sum_\ell I_\ell = 0$

$\int_V d^3r$ über $0 = \dot\rho + \operatorname{div} \vec j$ gilt $\quad$ n. Vorr.: nur Drähte in V

$$0 = \partial_t \int_V d^3r\, \rho + \int_V d^3r\, \operatorname{div} \vec j \overset{(\text{Gauß})}{=} \partial_t Q_V + \oint_S d\vec f \cdot \vec j = 0 + \sum_\ell I_\ell$$

Bsp Magnetfeld von geradem Draht

(4. Maxwellglg.) $\operatorname{rot} \vec B = \vec j / \varepsilon_0 c^2$ (Stokes)

$$\Rightarrow \int_S d\vec f \cdot \operatorname{rot} \vec B = \oint_{\mathcal{C}} d\vec r \cdot \vec B = \int_S d\vec f \cdot \vec j / \varepsilon_0 c^2$$

wähle S so, daß $\vec B \perp$ oder $\parallel \mathcal{C}$ ist, und daß Strom durch S fließt,