Kontinuitätsgl. (Conti)

(die wichtigste (?)) partielle Dgl. [leider 4 Unbekannte]

Dichte $\varrho = \frac{\text{etwas}}{\text{Volumen}}$ ("etwas" = Ladung q, Energie E, Teilchenzahl N, ...)

$$\dot{\varrho} = \partial_t \varrho(\vec{r}, t) = \partial_t \varrho(\vec{r}, t) - (\partial_t \vec{r} \cdot \vec{\nabla})\varrho = \partial_t \frac{N}{Vol.} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\varrho$$

in "mitströmendem Volumen" bleibt Teilchenzahl N const, nur Vol. ändert sich:

$$= -\frac{N}{Vol.} \frac{\dot{Vol.}}{Vol.} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\varrho \overset{(s.S.89)}{=} -\varrho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\varrho$$

$$= -\vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) \equiv -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\varrho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0} \qquad \text{(Conti)}$$

Bem:
- gilt, wenn "etwas" (pro Volumen gedacht) erhalten ist.
- lokale Glg: gilt an jedem Pkt $\vec{r}$ der Welt und seit 13.7 ± 0.2 Mrd. Jahren (WMAP)
- überlebt Relativitätstheorie, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie
- 1 Glg. für 4 Unbekannte ⇒ braucht noch andere Gln (z.B. Maxwell: Conti folgt)

((relativistisch: $\partial_{ct}\, c\varrho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$, $[\vec{\nabla}] = [\partial_{ct}] = \frac{1}{\text{Länge}}$

$$\partial_{ct}\, c\varrho - (-\vec{\nabla})\vec{j} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{ct} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}}_{\equiv \partial} \bullet \begin{pmatrix} c\varrho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \partial_\mu j^\mu = 0$$

$\bullet$ Vierer-Skalarprodukt ($a \bullet b = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b}$)))

8.4 $\vec\nabla$ mal $\vec\nabla$

bisher: Feld-Charakterisierung linear in $\vec\nabla$

jetzt: quadratisch

Räumliche Krümmungen gibt es

in 1D eine: $\partial_x^2 f(x)$ $\quad (= \Delta_1 f)$

in 2D zwei: $\nabla\cdot(\nabla\phi)$ $\quad (= \Delta_2 f)$

$\nabla(\nabla\cdot\vec A) =$ grad div $\vec A$

in 3D drei ?! – denn zwei der folgenden fünf sind Null

$$
\begin{tikzcd}
 & & \vec\nabla\times(\vec\nabla\phi) & (\text{Null}) \\
\phi \arrow[r] & \vec\nabla\phi \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\phi) & = \Delta\phi \\
 & & \vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) & = \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \Delta\vec A \\
 & \vec\nabla\times\vec A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
\vec A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A) & (\text{Null}) \\
 & \vec\nabla\cdot\vec A \arrow[r] & \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) &
\end{tikzcd}
$$

- $\vec\nabla\times(\vec\nabla\phi) =$ rot grad $\phi = \vec 0$,

  denn 1. Komp. $= \partial_y\partial_z\phi - \partial_z\partial_y\phi$ etc

- $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\phi) \equiv \Delta\phi$, mit $\boxed{\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \vec\nabla^2}$

  Laplace-Operator

- $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) =$ rot rot $\vec A$

  "bac-cab" $= \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \Delta\vec A$ $\qquad ((\Delta\vec A = (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3)))$

- $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A) =$ div rot $\vec A = 0$,

  denn $\partial_x(\partial_y A_3 - \dots) + \partial_y(\dots - \partial_x A_3)$ etc

- $\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) =$ grad div $\vec A$

Die Nullen:

Ein Feld $(\vec K, \vec E)$ ist als grad ϕ darstellbar $\xrightarrow{\text{rot}(\text{grad}\,\phi) = \vec 0}$ es hat keine Wirbel

$\longleftarrow ? \longrightarrow$ (s.u., Theorem 1)

Ein Feld $(\vec B)$ ist als rot $\vec A$ darstellbar $\xrightarrow{\text{div}(\text{rot}\,\vec A) = 0}$ es hat keine Quellen

$\longleftarrow ? \longrightarrow$ (s.u., Theorem 2)

Laplace

Bsp

ϕ	x	x^2	x^2+y^2	x^2-y^2	$\frac{1}{r}$
$\Delta\phi$	0	2	4	0	0 ? ↯ , denn

$$\Delta \frac{1}{r} = \partial_x\left(-\frac{x}{r^3}\right) + \partial_y\left(-\frac{y}{r^3}\right) + \partial_z\left(-\frac{z}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \left(x \cdot 3\,\frac{x}{r^5} + \ldots + \ldots\right) = 0 \quad \text{für } \underline{\underline{r>0}} \ (!)$$

$\to \forall r$: s.u.

Δ in Kugelkoord.

$$\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \left(\vec{e}_r\partial_r + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\partial_\vartheta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{rS}\partial_\varphi\right)\cdot\left(\vec{e}_r\partial_r + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\partial_\vartheta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{rS}\partial_\varphi\right)$$

9 Terme. z.B.

(($\vec{e}_{r,\vartheta,\varphi}$: s. S. 86))

$$= \vec{e}_\varphi \frac{1}{rS}\left(\partial_\varphi \vec{e}_r\right)\partial_r + \vec{e}_\varphi \frac{1}{rS}\vec{e}_r\,\partial_\varphi\partial_r$$

$$\partial_\varphi\left(Sc, Ss, C\right) = \left(-Ss, Sc, 0\right) = S\vec{e}_\varphi$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r + 0$$

((

	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_\vartheta$	$\vec{e}_\varphi$
∂_r	0	0	0
∂_ϑ	$\vec{e}_\vartheta$	$C\vec{e}_\varphi$	0
∂_φ	$S\vec{e}_\varphi$	$-\vec{e}_r$	$(-S\vec{e}_r - C\vec{e}_\vartheta)$

))

$$\boxed{\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta^2 + \frac{C}{r^2 S}\partial_\vartheta + \frac{1}{r^2 S^2}\partial_\varphi^2}\ , \quad S = \sin(\vartheta),\ C = \cos(\vartheta)$$

$$\underbrace{\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r}_{=\Delta_r}$$

$$= \left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)\partial_r = \frac{1}{r}\left(r\partial_r + 2\right)\partial_r = \frac{1}{r}\left(\partial_r r + 1\right)\partial_r = \frac{1}{r}\partial_r\underbrace{\left(r\partial_r + 1\right)}_{=\partial_r r}$$

$$\partial_r r = 1 + r\partial_r$$

$$\boxed{\Delta_r = \frac{1}{r}\partial_r^2 r}$$

Green von Δ (behandle das "↯" oben genauer)

s.o.: $\Delta\frac{1}{r}$ war "krank" bei $r=0$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{r}$-Spitze einbetten / abrunden

z.B. $\frac{1}{r} \to \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \right.$ (s. Schulz-Buch PB), $\frac{1}{r}\left(1-e^{-r/\varepsilon}\right)$ (s. Ü 70a), ... $\}$

hier: $\frac{1}{r} \to \frac{1}{r}\,\Theta(r-\varepsilon)$

betrachte $\Delta \frac{1}{r}\theta(r-\varepsilon) = \frac{1}{r}\partial_r^2\,\theta(r-\varepsilon) = \frac{1}{r}\delta'(r-\varepsilon)$

rhs ist in ε-Bereich lokalisiert, und hat

$$\int d^3r\, \frac{1}{r}\delta'(r-\varepsilon) = 4\pi\int_0^\infty dr\, r\,\delta'(r-\varepsilon) = 4\pi\left[r\,\delta(r-\varepsilon)\right]_0^\infty - 4\pi\int_0^\infty dr\, \delta(r-\varepsilon) = -4\pi$$

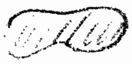
, ist also δ-Fkt

$\Rightarrow \quad \Delta \frac{1}{r}\theta(r-\varepsilon) = -4\pi\,\delta(\vec r)$

$\overset{\varepsilon\to 0^+}{\Rightarrow} \quad \boxed{\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta(\vec r)}$

8.5 3 Theoreme (der Vektoranalysis)

$\mathcal{G}$:= einfach zusammenhängendes Gebiet

d.h.  , aber nicht 

I Sei $\vec E$ ein in $\mathcal{G}$ wirbelfreies Feld, d.h. $\operatorname{rot}\vec E = \vec 0$	$\Rightarrow$	$\vec E$ hat in $\mathcal{G}$ ein Potential, d.h. $\vec E = -\operatorname{grad}\phi$

Beweis: • OBdA nahe Ursprung, $\vec E = E(\vec 0) + S\vec r + A\vec r + \mathcal{O}(\vec r^{\,2})$

symm. Matrix   antisy. Matrix

- $\operatorname{rot}\vec E = \vec 0 \Rightarrow A \overset{!}{=} 0$

  ((denn $A\vec r = \vec\omega\times\vec r$, s. S. 88; keine Rotation $\hat{=}\ \vec\omega = 0$))

- $\vec E = \vec E(\vec 0) + S\vec r + \ldots$ hat $\phi = -\vec E(\vec 0)\,\vec r - \frac{1}{2}\vec r S\vec r + \ldots$

  ((denn $(\vec E)_i = -\partial_i\phi = -\partial_i\left[-E_k(0)\,r_k - \frac{1}{2}r_k S_{kl} r_l + \ldots\right] = E_i(0) + S_{il}r_l$

- im ganzen $\mathcal{G}$: $\phi = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} d\vec r\,'\cdot\vec E(\vec r\,')$

  ((denn $-\partial_x\phi = \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{\vec r_0}^{\vec r+\varepsilon\vec e_1}\cdots - \int_{\vec r_0}^{\vec r}\cdots\right] = \frac{1}{\varepsilon}\int_{(x,y,z)}^{(x+\varepsilon,y,z)} d\vec r\,'\cdot\vec E(\vec r\,') = \frac{1}{\varepsilon}\vec E\cdot\vec e_1\,\varepsilon = E_1$))

- ϕ unabhängig vom Weg $\mathcal{C}$?!

  d.h.  ,  geben gleiches ϕ ?!

  $\overset{?!}{=} 0$, wg. "Stokes"-Satz, Kap. 9