Gradient in Physik

kennen (s. Newton, Kap. 3) Kraft auf gel. T. (q)

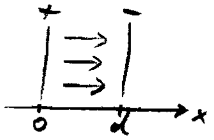
$$\vec K = q\vec E + q\vec v \times \vec B$$

zu $\vec B = 0$: $\vec K = q\vec E \overset{?!}{=} -\vec\nabla V$

$\Rightarrow \vec E = -\vec\nabla\phi$ mit $\phi = \frac{V}{q}$ „el.-statisches Potential“

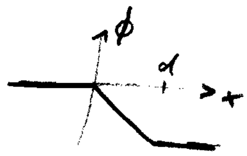
ϕ- Unterschied =: Spannung U

Bsp Plattenkondensator



$\vec E_{innen} = (E,0,0) \overset{?!}{=} -\vec\nabla\phi$

$\Rightarrow \phi = -Ex\ (+C)$



Spannung $U = 0 - (-Ed) = Ed$

Bsp ruhende Punktladung (Q) hat
Coulomb- Potential $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

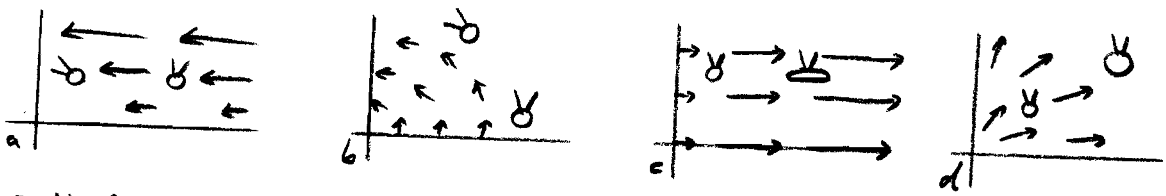
$\Rightarrow \vec E = -\vec\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r}{r^3}$

8.2 Rotation

gegeben: Vektorfeld $\vec A(\vec r,t)$

lokale Charakteristika? $\vec\nabla\cdot\vec A \rightsquigarrow$ § 8.3
$\vec\nabla\times\vec A \rightsquigarrow$ hier

((Realisierung: setze $\vec A(\vec r,t) = \alpha\,\vec v(\vec r,t)$, lasse Wasser mit $\vec v$ strömen))



„ ≙ treibender Wasserfloh“

$\vec A$ ist charakterisiert durch Rotation (a,b), Dehnung (c,d) „Divergenz“

Floh fährt mit, hat bei $\vec r$ also $v(\vec r)$, sieht

$$d\vec v = \vec v(\vec r + d\vec r) - v(\vec r) \qquad \left(\stackrel{?}{=} \text{Matrix} \cdot d\vec r\right)$$
$$= \left(v_1(x+dx, y+dy, z+dz) - v_1(\vec r), \dots, \dots\right)$$
$$= \left(v_1'^x dx + v_1'^y dy + v_1'^z dz, \dots, \dots\right)$$
$$= \begin{pmatrix} v_1'^x & v_1'^y & v_1'^z \\ v_2'^x & v_2'^y & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \equiv V\, d\vec r$$

aufspalten in sy/asy: $V = V_S + V_A = \frac{1}{2}(V + V^T) + \frac{1}{2}(V - V^T)$

$$\Rightarrow d\vec v = d\vec v_S + d\vec v_A = V_S\, d\vec r + V_A\, d\vec r$$

↑ dreht Fluß <u>nicht</u> (dehnt ihn nur),

denn $D\, d\vec v_S = \underline{D V_S D^T} D\, d\vec r$

$d\vec v_S{}' = V_S{}'\, d\vec r\,'$, $\quad V_S{}' = \begin{pmatrix} V_{S_{11}}' & 0 & 0 \\ 0 & V_{S_{22}}' & 0 \\ 0 & 0 & V_{S_{33}}' \end{pmatrix}$

((↑ kann symm. Matrix immer diagonalisieren, s. Kap. 4.3 : HT))

$$d\vec v_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_1'^y - v_2'^x}{2} & \frac{v_1'^z - v_3'^x}{2} \\ & 0 & \frac{v_2'^z - v_3'^y}{2} \\ \text{anti} & & 0 \end{pmatrix} d\vec r \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ & 0 & -\omega_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} d\vec r = \vec\omega \times d\vec r$$

also $2\vec\omega = \left(v_3'^y - v_2'^z,\ v_1'^z - v_3'^x,\ v_2'^x - v_1'^y\right) = \vec\nabla \times \vec v$

<u>Def</u> $\quad \text{rot}\,\vec A = \alpha\, \text{rot}\,\vec v := \alpha\, 2\vec\omega$

$$\boxed{\text{rot}\,\vec A = \vec\nabla \times \vec A = \text{Wirbelfeld von } \vec A}$$

<u>Bsp</u> wirbelfreie zirkulare Strömung

$\vec\nabla \times \vec v = \vec 0$. $\quad \vec v(\vec r) = ?$ $\quad$ partielle Dgl. lösen!

"zirkular": $\vec v = \vec e_\varphi \cdot v(\rho) = (-y, x, 0)\underbrace{\frac{v(\rho)}{\rho}}_{= f(\rho)}$

$= (-yf, xf, 0)$

$$\vec\nabla \times \vec v = \left(0, 0, (xf)'^x + (yf)'^y\right) \stackrel{!}{=} \vec 0$$
$$2f(\rho) + \rho f'(\rho) = 0$$

lösen: Trick ①, $f = \rho^\lambda$, $2 + \lambda = 0$, $f_{allg} = \frac{c}{\rho^2}$

$\Rightarrow \vec v = \frac{c}{\rho}\vec e_\varphi$ $\quad$ ((z.B. Bohrinsel: ))

(ist wirbelfrei, ausgenommen z-Achse)

8.3. Divergenz

(Vorsicht: Doppelbedeutung)

gegeben $\vec{A}(\vec{r},t)$.

realisiere als $\vec{A} = \alpha\vec{v}$, $\vec{v}$ von Gas

dehnbaren Fluß strömt mit

<u>Def</u> $\quad \operatorname{div}\vec{A} := \alpha\,\frac{\dot{Vol}}{Vol}$ (relative Volumenänderung)

Berechne Vol.-Änderung: $\quad d\vec{v} = d\vec{v}_S + d\vec{v}_A$ (s.o., S.88)

$\hookrightarrow$ antisy; dreht nur, dehnt nicht

$$d\vec{v}_S{}' = V_S'\,d\vec{r}' = \left(V_{S_{11}}'\,dx',\ V_{S_{22}}'\,dy',\ V_{S_{33}}'\,dz'\right)$$

lege Quader (dx', dy', dz') an Stelle $\vec{r}\,'$

rechte Wand bewegt sich um $V_{S_{11}}'\,dx'$ schneller als linke, usw.

$$\Rightarrow \dot{Vol} = (dy'dz')\,V_{S_{11}}'\,dx' + (dx'dz')\,V_{S_{22}}'\,dy' + (dx'dy')\,V_{S_{33}}'\,dz'$$
$$= Vol.\cdot\left(V_{S_{11}}' + V_{S_{22}}' + V_{S_{33}}'\right) = Vol.\cdot Sp(V_S') = Vol.\cdot Sp(V_S)$$

$\uparrow$ Spur inv. bei Dreh.

$$= Vol\cdot(\partial_x v_1, \partial_y v_2, \partial_z v_3)$$
$$= Vol\cdot\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \text{Quellenfeld von } \vec{A}}$$

<u>Bsp</u> quellen<u>freie</u> kugelsymm.-radiale Strömung

$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$. $\quad \vec{j}(\vec{r}) = ?$

"kugelsy.": $\vec{j} = \vec{e}_r\cdot j(r) = \vec{r}\,\underbrace{\boxed{\frac{j(r)}{r}}}_{=f(r)}$

$= (xf, yf, zf)$

$\partial_x r = \frac{x}{r}$ usw.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = (xf)'^x + (yf)'^y + (zf)'^z = 3f(r) + rf'(r) \overset{!}{=} 0$$

lösen: wieder Potenzansatz ①, $f = r^\lambda$, $3+\lambda = 0$, $f_{allg} = \frac{c}{r^3}$

$\Rightarrow \vec{j} = \frac{c}{r^2}\,\vec{e}_r \qquad$ ((z.B. Coulomb-Feld$_{(s.o.)}$ $\vec{E} \sim -\operatorname{grad}\frac{Q}{r} = \frac{1}{r^2}\vec{e}_r$))

(ist quellenfrei, ausgenommen Ursprung)

Navier-Stokes Gln

Strömungsgeschw. $\vec{u}(\vec{r},t)$, Druck $p(\vec{r},t)$

in inkompressiblen Flüssigkeiten / Gasen

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{u}} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \nu \underbrace{\Delta}_{\vec{\nabla}^2} \vec{u} - \vec{\nabla} p \\ \vec{\nabla}\vec{u} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{4 Gln} \\ \text{4 Variablen: } \vec{u}, p \end{array}$$

⇒ Existenzbeweis von (glatten, physikalischen) Lsn

gibt $\boxed{\text{1 Million Dollar}}$!

⇝ www.claymath.org , "Millennium Problems"

System von nichtlinearen, partiellen Dgln 2. Ordnung

((nicht einmal der Fall $\nu = 0$, die „Euler Gleichungen", sind gelöst))