8 Dgl. $\geq$ 2.O. $\xrightarrow{}$ ($\longleftarrow$) Dgl-System 1.O.

((geht immer; Computer froh über System))

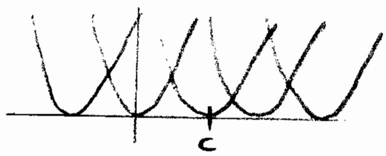
Bsp $y'' = f(y', y, x)$

setze $y' = z$ $\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} z' = f(z, y, x) \\ y' = z \end{array}\right\}$

9 singuläre Lsn (nur bei nichtlinearen Dgln)

Bsp $y'^2 = 4y$, $y' = \pm 2\sqrt{y}$, TdV: $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{y}}}\, y' = \pm 1$ $\quad = \partial_y \sqrt{y}$

$\Rightarrow \sqrt{y}'^{*} = \pm 1$, $\sqrt{y} = \pm x + C$, $y = (\pm x + C)^2$, $y_{allg} = (x - C)^2$



Die Einhüllende $y \equiv 0$ löst die Dgl auch! — "Singuläre Lsg"

$\left\{\begin{array}{c} \text{alle} \\ \text{Lsn} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \text{in der} \\ \text{allg. Lsg} \\ \text{enthaltene} \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \text{eventuelle} \\ \text{singuläre} \\ \text{Lsn} \end{array}\right\}$

10 Greensche Funktion (!) (s. auch Sonderblatt)

Problem: $L\,y(x) = f(x)$, gesucht: $y(x)$ für $x \in \{\text{Bereich}\}$.

ersetze "Ursache" $f(x)$ durch "Punkt-Ursache" $\delta(x-a)$

Hilfsproblem: $\boxed{L\,G(x,a) = \delta(x-a)}$

Wenn Lsg $G(x,a)$ (die Greensche Fkt von L) bekannt,

dann $\int_B da\, f(a)\, L\, G(\overset{\text{wirkt}}{x}, a) = \int_B da\, f(a)\, \delta(x-a)$

$\underbrace{L \int_B da\, f(a)\, G(x,a)}_{= y(x)} = f(x)$

$\Rightarrow$ ein G gibt ein y, d.h. y_{sp} in $y = y_{hom} + y_{sp}$

((haben Antwort y aus Punkt-Ursache – Antworten G zusammengesetzt.))

<u>Bsp</u> $\dot{v} = -g$ (freier Fall), $v(t) = ?$

$v_{hom} = C$, Bereich: $0 < t < T$, $L_1 = \partial_t$

Hilfsproblem: $\partial_t G(t,a) = \delta(t-a)$

aufleiten: $G(t,a) = \Theta(t-a) + A$

$$\Rightarrow v(t) = \int_0^T da\, \left(\Theta(t-a) + A\right)(-g)$$

$$= -g\int_0^t da \underbrace{-gAT}_{C} = -gt + C$$

<u>Bem.</u>: $G(t,a)$ hängt nur von $t-a$ ab

<u>allg.</u>: wenn L "translationsinvariant",

d.h. $[L f(x)]_{x\to x-a} = L f(x-a)$

(also z.B. $L = \partial_x, \partial_x^2, \partial_x + C$; <u>nicht</u> $x\partial_x$),

dann genügt es, $L\, G(x) = \delta(x)$ zu lösen,

und dann $G(x,a) = G(x-a)$ zu setzen.

<u>Bsp</u> $\dot{v} + \gamma v = k(t)$

《 hat via "P-Q-Formel" (4) $(P = \gamma, \int^t dt'\, P = \gamma t)$

die allg. Lsg. $v = e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t dt'\, k(t') e^{\gamma t'}\right)$ 》

jetzt via Green. $L = (\partial_t + \gamma)$ ist transl.-inv.

$\rightsquigarrow$ muß $(\partial_t + \gamma)\, G(t) = \delta(t)$ lösen.

z.B. Ans ("γ muß weg") $G(t) = u(t)\, e^{-\gamma t}$

$$\Rightarrow u' e^{-\gamma t} - \gamma u e^{-\gamma t} + \gamma u e^{-\gamma t} = \delta(t)$$

$$u' = \delta(t)\, e^{\gamma t} = \delta(t) \cdot 1, \quad u = \text{const}_t + \Theta(t)$$

also $G(t) = \left(\text{const}_t + \Theta(t)\right) e^{-\gamma t}$

und $$v(t) = \int_0^T da\, k(a)\left(\text{const} + \Theta(t-a)\right) e^{-\gamma(t-a)}$$

$$= e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t da\, k(a)\, e^{\gamma a}\right) \checkmark\checkmark.$$

<u>Bem.</u>: • L mußte nur <u>linearer</u> Op. sein: es gibt viele L's.

• Punkt-Ursache in höheren Dim.: $\delta(\vec{r})$ bzw. $\delta(\vec{r})\,\delta(t)$.

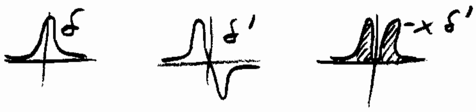
((Bem. L transl.-inv. $\Leftrightarrow$ $[L f(x)]_{x \to x-a} = L f(x-a)$

(Skript S. 44: Taylor) d.h. $e^{-a\partial_x} L f = L e^{-a\partial_x} f \quad \forall f$

d.h. $0 = L e^{-a\partial_x} - e^{-a\partial_x} L \equiv [L, e^{-a\partial_x}]$

Kommutator
$[a,b] \equiv ab - ba$))

<u>Bem.</u> $-x\,\delta'(x) \overset{?!}{=} \delta(x)$ (s. Sonderblatt) (→ Ü 63b)

denn: 

⇒ beide Seiten hoch, schmal

Vorfaktor ok? $\int dx \, (\underbrace{-x}_{u} \underbrace{\delta'(x)}_{v'}) = -x\,\delta(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int dx\, \delta(x) = 1$ ✓

8. Felder

bisher: gew. Dgln, z.B. Newton: nur ∂_t
(rechte Seite: $\vec{K}(\vec{r},t)$)

„Feld" := etwas $(\vec{r},t)$

kennen schon $T(\vec{r},t)$, $p(\vec{r},t)$, $V(\vec{r},t)$, $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$, $\vec{v}(\vec{r},t)$,
$\vec{K}(\vec{r},t)$, $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ → deren Bewgln ?

z.B. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$ $\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ $\qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}}$

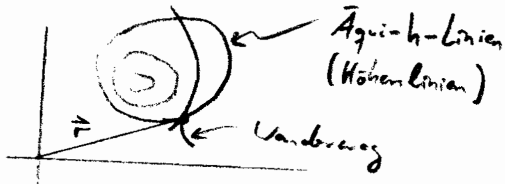
⇒ Maxwell-Gln. brauchen $\nabla\cdot$, $\nabla\times$, partielle Dgln

Das "etwas" muß sich verhalten bei Koord.-Drehung,
ist also Skalarfeld $\phi(\vec{r},t)$
Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$
(Tensorfeld $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{r},t)$)

8.1. Gradient und Nabla

wollen statische Felder $(\phi(\vec r), \vec A(\vec r))$ in Nähe der Stelle $\vec r$ charakterisieren

z.B. Karte: Berg hat Höhe $h(x,y)$ über Meeresspiegel-Ebene



Steilheit? In Wegrichtung? Richtung des größten Anstiegs?

in 3D: gegeben $\phi(\vec r)$.

gehe ab $\vec r$ in Richtung $\vec e$. Erlebe $\phi(\vec r + s\vec e)$

Steilheit in $\vec e$-Richtung bei $\vec r$ $\Big\}$ = Richtungsableitung

$$= \left[\partial_s \phi(x+se_1,\, y+se_2,\, z+se_3)\right]_{s=0}$$

$$= e_1\,\partial_x\phi + e_2\,\partial_y\phi + e_3\,\partial_z\phi$$

$$= \vec e\cdot(\partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)$$

$$= \vec e\cdot\vec\nabla\phi$$

Kann verschiedene $\vec e$ wählen.

Finde z.B. $\vec e\cdot\vec\nabla\phi = 0$, d.h. keinen Anstieg, d.h. $\vec e$ liegt in Äqui-h-Fläche $\Rightarrow$ $\vec\nabla\phi$ steht $\perp$ auf Äqui.

Finde z.B. $\vec e\cdot\vec\nabla\phi = \max$, d.h. $\vec\nabla\phi \sim \vec e$

$$\Rightarrow \vec\nabla\phi = \begin{pmatrix}\text{Einh.-Vektor}\\ \text{in Richtung}\\ \text{max. Zunahme}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{diese}\\ \text{Zunahme}\end{pmatrix}$$

$$= (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\,\phi = \text{grad}\,\phi$$

mit $\boxed{\vec\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)}$ = „Nabla-Operator"

$\vec\nabla$ Skalarfeld heißt „Gradient"

(aber $\vec\nabla\cdot$, $\vec\nabla\times$ Vektorfeld heißt anders, s. später)

(kann $\vec\nabla$ oder ∇ schreiben ...)

$\vec\nabla$ ist Vektor

Erinn.: Kap. 4, $\vec a$ ist V. $\Leftrightarrow$ $\vec a' = D\vec a$

$\rightsquigarrow$ Frage, ob $\boxed{\vec\nabla' = D\vec\nabla}$ Sinn macht

Testen diesen Operator-Identität: $(\partial_{x'},\partial_{y'},\partial_{z'})\,\phi(\vec r = D^T\vec r\,') \overset{?}{=} D\vec\nabla\phi$

hiervon die j-te Komp. ($x=x_1,\ y=x_2,\ z=x_3$) ist

$$(\nabla'\phi)_j = \partial_{x'_j}\phi\left(\overset{\ell\text{-te}}{} (D^T)_{\ell m}x'_m = D_{m\ell}x'_m\right) = (\partial_{x_\ell}\phi)\,D_{m\ell}\,\delta_{mj}$$

$$= D_{j\ell}\,\partial_{x_\ell}\phi = (D\vec\nabla\phi)_j$$

$\Rightarrow$ also ist $\vec\nabla'\phi = D\vec\nabla\phi \quad \forall\phi$ ■

$\vec\nabla$ in Kugelkoord.

darf statt der $\vec e_j$ in $\vec\nabla = \vec e_1\partial_x + \vec e_2\partial_y + \vec e_3\partial_z$

andere orthonormale Basis verwenden, z.B.

$$\vec\nabla = \vec e_r\,\partial_{\text{Weg n. oben}} + \vec e_\vartheta\,\partial_{\text{Weg n. Süden}} + \vec e_\varphi\,\partial_{\text{Weg n. Osten}}$$

$\vec e_r = \frac{\vec r}{r} = (Sc,\ Ss,\ C)$ $\qquad S \equiv \sin(\vartheta)$

$\vec e_\varphi = (-s,\ c,\ 0)$ $\qquad s \equiv \sin(\varphi)$

$\vec e_\vartheta = (Cc,\ Cs,\ -S)$

((s. Kap. 6; zu $\vec e_\varphi$: 

x $\quad \vec e_\varphi = \frac{(-y,x,0)}{|\ldots|} = \frac{(-Ss,Sc,0)}{S}$

zu $\vec e_\vartheta$: $\vec e_\varphi\times\vec e_r = \vec e_\vartheta$))

Weg nach Süden: $r\vartheta$; Weg nach Osten: $(rS)\cdot\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\vec\nabla = \vec e_r\,\partial_r + \vec e_\vartheta\,\frac{1}{r}\,\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\,\frac{1}{rS}\,\partial_\varphi}$$

Dimension: $[\vec\nabla] = \frac{1}{\text{Länge}} = [\text{rhs}]$ ✓