((Metallbügel wie Holzbügel, denn:

Elektrostatik $\Rightarrow$ unbewegliche Pkt-Ladung Q übt auf Probeladung q die Kraft $\vec{K} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ aus.

(Kenne $\vec{K}$ aus Experiment; oder Maxwell-Gln.)

$\vec{K} \stackrel{?}{=} -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V) \Rightarrow V \equiv q\phi$, $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

"Coulomb-Potential"))

7. Gewöhnliche DGLN

Rückblick auf WS, auf etwas höherem Niveau

WS - Lösungsmethoden: Ansatz, $u+a$, $v = \frac{1}{y}$, $e^{\mu t} w$, ..

jetzt: zuerst besser sprechen; dann 10 Fälle

7.1 Vokabeln, 3 Sätze

Bsp: Der getriebene, 1D harmonische Oszillator mit Reibung,

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - m\omega^2 x + mk(t)$$

folgt der Dgl. $y'' + \gamma y' + \omega^2 y = f(x)$.

Diese ist

- gewöhnlich ($\neq$ partiell: $(\partial_t - \partial_x)y = h(x,t)$),
- 2. Ordnung (max. $'$-Anzahl),
- linear (y, y', y'' hoch eins),
- inhomogen ($f \neq 0$),
- explizit ($\neq F(y'', y', y, x) = 0$).

Die allg. Lsg. einer Dgl. n-ter Ordnung ist eine n-parametrige Schar von Lsn.

Bsp: $y'' + \omega^2 y = k_0$, d.h. $L_2 y = k_0$ mit $L_2 = \partial_x^2 + \omega^2$

hat $$y_{allg.}(x) = \underbrace{\frac{k_0}{\omega^2}}_{\text{spezielle Lsg. der inhomogenen.}} + \underbrace{A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)}_{\text{allg. Lsg. der hom. Dgl.}}$$

((Erinnerung: Fktn. lin. unabh. $\Leftrightarrow$ aus LK (Fktn.) = 0 folgt Koeffs. = 0))

Zur allg. lin. Dgl. n-ter Ordnung, d.h.

$$\boxed{L_n y(x) = f(x), \quad \text{mit } L_n = \partial_x^n + f_{n-1}(x)\,\partial_x^{n-1} + \ldots + f_0(x)}$$

gibt es 3 Sätze:

- $L_n y = 0$ hat genau n lin. unabh. Lsn: $y_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$
- •• Die allg. Lsg von $L_n y = 0$ ist $y_{hom} = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$
- ••• Die allg. Lsg von $L_n y = f$ ist $y_{allg} = y_{hom} + y_{sp}$,
  wobei y_{sp} <u>eine</u> spez. Lsg von $L_n y = f$ ist.

((Beweis-Ideen:

- denke an Newton.
  kann bei $x = 0$
  starten mit AB
  $$\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \ldots$$
  $\Rightarrow$ es gibt also n Möglichkeiten (und nicht mehr; sonst LK)
- •• hat n und löst $L_n y = 0$
- ••• $$\begin{array}{l} L_n y_{allg} = f \\ L_n y_{sp} = f \\ \hline L_n(y_{allg} - y_{sp}) = 0 \end{array}, \quad \text{d.h. } y_{allg.} - y_{sp.} = y_{hom.}$$))

7.2 10 Fälle

"Repertoire", Wahrnehmungsraster; schon $F' = f$ ganz fast nie!

① Potenzansatz $\quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

$\boxed{\text{hom, lin, } x\text{-} = \partial\text{-Potenz}}$

$y = x^\lambda$, $\quad \lambda(\lambda-1) x^2 x^{\lambda-2} - 2\lambda x x^{\lambda-1} + 2 x^\lambda = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\quad \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right.$

$\Rightarrow y_{allg} = C_1 x + C_2 x^2$

② neue Variable (viele Möglichkeiten!)

setze $x = x(\tau)$

benutze $y(x) = y(x(\tau)) = u(\tau) = u(\tau(x))$

habe $y' = u'^{\tau} \cdot \tau'^{x}$ usw. $(y'', \dots)$

erhalte Dgl. für $u(\tau)$

Bsp $\quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ (s.o.), $0 < x$

setze $x = e^\tau$; $y(x) = y(e^\tau) = u(\tau) = u(\ln(x))$,

$y' = u'^{\tau} \frac{1}{x} = u'^{\tau} e^{-\tau}$, $\quad y'' = u'' \frac{1}{x^2} - \frac{u'}{x^2} = u'' e^{-2\tau} - u' e^{-2\tau}$,

erhalte $\quad e^{2\tau}(u'' - u') e^{-2\tau} - 2 e^\tau u' e^{-\tau} + 2u = 0$

$u'' - 3u' + 2u = 0 \qquad (*)$

③ e-Ansatz : bei $\boxed{\text{lin, hom, } \underline{\text{konst}} \text{ Koeff.}}$

Bsp $\quad (*)$ mit $u = e^{\omega t}$ gibt $\omega^2 - 3\omega + 2 = 0 \Rightarrow \omega = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right.$

$u_{allg} = C_1 e^\tau + C_2 e^{2\tau}$

Bsp $\quad \left(\partial_t^2 + 2\gamma \partial_t + \omega_0^2 \right) x(t) = 0 \qquad$ (harm. Oszi. mit Reibung)

$x = e^{\omega t}$, $\quad \omega^2 + 2\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$, $\quad \omega = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (\omega_0 < \gamma)$

$x_{allg}(t) = C_1 e^{-\gamma t - \Gamma t} + C_2 e^{-\gamma t + \Gamma t}$

$\gamma < \omega_0$: $\quad \omega = -\gamma \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\gamma = \omega_0$: nur 1 Lsg ? falsch !

studiere $\omega_0 \to \gamma$: $\Gamma = \varepsilon$, dann $\varepsilon \to 0$

$$x_{allg}^{\gamma=\omega_0}(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{-\varepsilon t} + C_2 e^{\varepsilon t}\right) \quad , \; e^{\varepsilon} \approx 1+\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$= e^{-\gamma t}\left(\underbrace{C_1+C_2} + \underbrace{(C_2-C_1)\varepsilon} t + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)$$

$$= e^{-\gamma t}\left(A + B \; t \right)$$

④ neue Fkt. (viele Möglichkeiten !)

<u>Bsp</u> allg. lin. inhom. Dgl. 1.O. $\boxed{y' + P(x)\, y = Q(x)}$

y_{hom}: $\frac{y'}{y} = \ln(y)'^{x} = - P(x)$

$$\ln(y) = - \int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')$$

Setze $y = y_{hom} \cdot u(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')}\, u(x)$

$\Rightarrow \cancel{-P e^{-} u} + e^{-} u' + \cancel{P e^{-} u} = Q$

$u' = Q e^{+}$, $u = \int_{x_1}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{+\int^{x'} \cdots} + C$

$$y_{allg}(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')} \left(C + \int_{x_1}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{\int_{x_0}^{x'} dx''\, P(x'')} \right)$$

„P-Q-Formel".

3 Konstanten ?↯ Nein, nur 2: bei (x_0, x_1)-Änderung ändert sich C.

⑤ Variation der Konstanten

<u>Bsp</u> allg. lin. inhom. Dgl. 2.O. $\boxed{y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x)}$

<u>wenn</u> man <u>eine</u> Lsg $y_1(x)$ der hom. Dgl. kennt, dann reduziert $y = y_1 \cdot u$ die Ordnung um 1.

$\ulcorner\; \partial_x^n\, f \cdot g = \left(\partial_x^{vorne} + \partial_x^{hinten}\right)^n f \cdot g \;\lrcorner$

$\underline{y_1'' u} + 2 y_1' u' + y_1 u'' + \underline{a y_1' u} + a y_1 u' + \underline{b y_1 u} = f$

$\underline{\quad} = 0$ nach Voraussetzung haben also $y_1 u'' + (2y_1' + a y_1)u' = f$

setze $u' =: v$, $v' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + a\right)v = f/y_1$

ist l.O. ⇒ nun P-Q-Formel!

⑥ Trennung der Variablen

((erstmals nicht-linearer Fall))

$$\boxed{y'(x) = f(x)\, g(y)}$$, alle y nach links

$$\underbrace{\frac{1}{g(y)}\, y'(x)}_{=\partial_y H(y)} \overset{!}{=} \underbrace{f(x)}_{=\partial_x F(x)}$$ Stammfktn suchen

$$\partial_x H(y(x)) \overset{!}{=} \partial_x F(x) \quad \Rightarrow \quad H(y) = F(x) + C$$

((zur Not: $y' = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{g} = dx \cdot f$, $\int_{y_0}^{y} dy' \frac{1}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} dx' f(x')$))

⑦ Reduktion(en) der Ordnung

ⓐ $\boxed{y'' = f(y, y')}$ Besonderheit: kein x

setze $y' = p(y)$: $y'' = p'^y y'^x = p'^y p$

⇒ $p'^y = \frac{1}{p} f(y, p)$ ist Dgl l.O. für $p(y)$

Bsp: $m\ddot{x} = -\partial_x V(x)$, kein t, setze $\dot{x} = v(x)$, Strich $= \partial_x$,

$m v v' = \left(\frac{m}{2} v^2\right)' = -V'(x)$, $\frac{m}{2} v^2(x) = E - V(x)$.

ⓑ $\boxed{y'' = f(y', x)}$ Besonderheit: kein y

setze $y' = u$, $u' = f(u, x)$ ist Dgl l.O.

ⓒ Landau-Trick : wenn $L = L_1 L_2$, d.h. $\boxed{L_1 L_2 y = f}$,

setze $u = L_2 y$, löse $L_1 u = f$ für u, danach $L_2 y = u$.

Bsp: $\ddot{x} + \omega^2 x \overset{!}{=} b(t)$

$$\underbrace{(\partial_t + i\omega)}_{L_1}\underbrace{\underbrace{(\partial_t - i\omega)}_{L_2} x}_{u} \overset{!}{=} b(t)$$, löse $(\partial_t + i\omega) u = b(t)$ usw.