Bemerkung: "dünn, hoch, Fläche 1" genügt.

nicht $\varepsilon \to 0$ ausführen.

man gehe mit $\delta(x)$ um wie mit jeder normalen Fkt,

lediglich sieht man ihre Breite nicht mehr.

Mit normaler weicher Physiker-Fkt $f(x)$ folgt die

2. Def. ("definierende Eigenschaft")

$$\boxed{\int dx\, \delta(x-a)\, f(x) = f(a)}$$

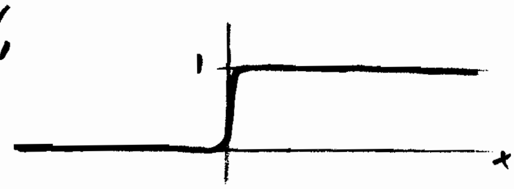
((denn: f wird in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ zu $f(a)$))

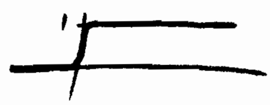
Bem.: Meistens steht δ unter einem Integral, oder wartet auf eins.

3. Def. $\boxed{\delta(x) := \partial_x \Theta(x)}$

wobei $\Theta(x)$ die Stufenfunktion ist,

also eine im ε-Bereich von 0 auf 1 ansteigende Fkt:



((denn: $\int_{-\infty}^{x} dx'\, \delta(x') =$  $= \Theta(x)$

∂_x auf beiden Seiten $\Rightarrow$ $\delta(x) = \partial_x \Theta(x)$))

Definierende Eigenschaft von $\Theta(x)$:

$b > a$, $\int_{-\infty}^{b} dx\, f(x)\, \Theta(x-a) = \int_a^b dx\, f(x)$

Test via Part. Int. $\quad u' \quad v$
$\quad u = F(x) \quad v' = \delta(x-a)$

$$F(b) - \int_{-\infty}^{b} dx\, F(x)\, \delta(x-a) =$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b dx\, \partial_x F(x)$$

"$\Theta(0) = ?$" — kranke Frage!

δ-Darstellungen

• $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$

denn: dünn ✓ hoch ✓ $\int \text{rhs} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int dx\, e^{-x^2/\varepsilon^2} \overset{x\to\varepsilon x}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx\, e^{-x^2} = 1$ ✓

(("$\delta(x) = \alpha\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$, $\alpha = ?$" $\Rightarrow 1 \overset{!}{=} \int dx\, \alpha\, e^{\cdots} = \ldots \Rightarrow \alpha$))

• $\Theta(x) = \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$, 

$\delta(x) = \partial_x \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$

• $\delta(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  , $1 \overset{?}{=} \frac{1}{\pi} \int dx\, \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int dx\, \frac{\sin(x)}{x}}_{\overset{!}{=}\pi,\ \text{später} \ldots\ ((\text{s.u.}))}$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk \left(\overbrace{\cos(kx)}^{\partial_k \frac{\sin(kx)}{x}} + i \sin(kx) \right)$ ← weil ungerade , Euler

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, e^{ikx}$

• $\Theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$\delta(x) = \partial_x (\,\cdot\,) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon - ix} + \frac{1}{\varepsilon + ix} \right)$

$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left(\underbrace{e^{ikx - \varepsilon k}} + \text{c.c.} \right)$

denn $\overset{!}{=} \partial_k \frac{e^{ikx-\varepsilon k}}{ix - \varepsilon}$

$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk\, e^{-\varepsilon k}\, 2\cos(kx)$, $e^{-\varepsilon k} \to e^{-\varepsilon |k|}$

$= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{-\varepsilon |k|} \left(\cos(kx) + i \sin(kx) \right)$ ← weil ungerade

$= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{ikx} e^{-\varepsilon |k|}$ ← Fourier! (später)

((in Lit.: konvergenzerzeugendes $e^{-\varepsilon |k|}$ oft weggelassen.)) $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{ikx}$

(($J(k,\varepsilon) \equiv \int dx\, \frac{\sin(kx)}{x}\, e^{-\varepsilon |x|}$ ($\varepsilon \to 0^+$) , $\partial_k J = \int dx\, \cos(kx)\, e^{-\varepsilon |x|} = 2 \int_0^\infty dx\, \frac{1}{2} \left(e^{ikx} + e^{-ikx} \right) e^{-\varepsilon x} = \frac{2\varepsilon}{k^2 + \varepsilon^2}$

$\Rightarrow J(k,\varepsilon) = \text{Const}_k + 2 \arctan\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$; J ungerade in k $\Rightarrow \text{Const} = 0$

$\Rightarrow J(1, 0^+) = \pi \Rightarrow \int dx\, \frac{\sin(x)}{x} = \pi$))

- allg. Darst. $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

  aus gegebenem $g(x)$, mit $F = \int dx\, g(x)$

δ-Formeln

- Dimension: $[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$
- $\delta(-x) = \delta(x)$ $\quad$ ((denn: $\int dx\, \delta(-x) f(x) = \int dx\, \delta(x) f(-x) = f(0)$))
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ $\quad$ ((denn: $\delta(ax) \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(ax)^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\pi}\frac{(\varepsilon/|a|)}{x^2+(\varepsilon/|a|)^2} = \frac{1}{|a|}\delta(x)$))
- etc, siehe $\boxed{\text{Sonderblatt}}$
- 2D: $\int d^2r\, \delta^{(2)}(\vec{r}-\vec{a})\, \phi(\vec{r}) = \phi(\vec{a})$

  3D: $\int d^3r\, \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{a})\, \phi(\vec{r}) = \phi(\vec{a})$

  $\Rightarrow$ kann kartesisch denken und $\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 2D: & \delta(x)\delta(y) \\ 3D: & \delta(x)\delta(y)\delta(z) \end{cases}$

  schreiben, muß aber nicht (→ Ü 56 f-h)

Bem.: $\delta(x-a)$ ist die Kontinuums-Version des Kronecker-δ:

$$\sum_{k=1}^{3} \delta_{jk} f_k = f_j \quad \Leftrightarrow \quad \int dx\, \delta(a-x) f(x) = f(a)$$

Physik mit δ

Kann mit δ Hüte, Drähte, Punkte in 3D formulieren.
Dichte enthaltende Formeln (z.B. $V = -gm \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$)
bleiben gültig, nur $\rho(\vec{r})$ $\left(= \frac{\text{Masse od. Ladung}}{\text{Vol.}}\right)$ spezialisiert sich:

z.B. • hom. Scheibe (M,R): $\rho(\vec{r}) = A\, \delta(z)\, \Theta(R-\rho)$

$$M \overset{!}{=} \int d^3r\, \rho(\vec{r}) = A \int_0^R d\rho\, \rho \underbrace{\int d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int dz\, \delta(z)}_{1} = A\frac{R^2}{2}2\pi \Rightarrow A = \frac{M}{\pi R^2}$$

• hom. Stab (M,L): $\rho(\vec{r}) = B\, \delta(y)\, \delta(z)\, \Theta(x(L-x))$

$$M \overset{!}{=} B \int_0^L dx \int dy \int dz\, \delta(y)\delta(z) = BL \Rightarrow B = \frac{M}{L}$$

• Punktmasse (M) am Ursprung

$\rho(\vec r) = C\,\delta(\vec r)$, $M \overset{!}{=} \int d^3r\, C\,\delta(\vec r) = C \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec r) = M\,\delta(\vec r)$

• Punktladung (m, q) mit $\vec r_0(t)$

((jetzt $\rho = \frac{\text{Ladung}}{\text{Vol.}}$, $\vec j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}}$))

$$\rho(\vec r, t) = q\,\delta(\vec r - \vec r_0(t))$$

$$\vec j(\vec r, t) = \dot{\vec r}_0(t)\, q\,\delta(\vec r - \vec r_0(t))$$

((⇒ Teilchenstrahlen ; DESY ; CERN !))

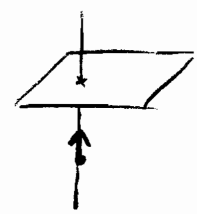
<u>Bsp</u> Q und I zu $\vec r_0(t) = vt\,\vec e_3 = (0, 0, vt)$

$$Q = \int d^3r\,\rho(\vec r) = q\int d^3r\,\delta(\vec r - \vec r_0(t)) = q$$

$$\underset{xy\text{-Ebene}}{I(t)} = \int_{z=0} d\vec f\cdot\vec j = \int dx\int dy\ \vec e_3\cdot v\vec e_3\, q\,\delta(\vec r - vt\vec e_3)\Big|_{z=0}$$

$$= vq\int dx\int dy\ \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(0 - vt)$$

$$= vq\,\delta(vt) = q\,\delta(t)$$



• Hohlkugel (M, R) um Ursprung

$\rho(\vec r) = \alpha\,\delta(r - R)$, $M \overset{!}{=} \int d^3r\,\alpha\,\delta(r - R) = \alpha\,4\pi\int_0^\infty dr\, r^2\,\delta(r - R) = \alpha\,4\pi R^2$

$$\Rightarrow \rho(\vec r) = \frac{M}{4\pi R^2}\,\delta(r - R)$$

<u>Bsp</u> Gravitationspotential einer Hohlkugel (M, R) (vgl. Ü 55a)

((benutze $V(\vec r)$ für $\rho(r)$, Skript S. 71))

$$V(\vec r) = -\gamma m\,\frac{2\pi}{r}\int_0^\infty dr'\,r'\,\frac{M}{4\pi R^2}\,\delta(r' - R)\left[\sqrt{(r + r')^2} - \sqrt{(r - r')^2}\right]$$

$$= -\gamma m\,\frac{M}{2Rr}\,\big[\,|r + R| - |r - R|\,\big] \qquad = \begin{cases} 2R & \text{für } r > R \ (\text{außen}) \\ 2r & \text{für } r < R \ (\text{innen}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\gamma m M}{r} & \text{außen} \\ -\dfrac{\gamma m M}{R} & \text{innen} \end{cases}$$

((⇒ <u>innen</u> <u>keine</u> Kraft ! Hohlwelt ⇒ umsonst nach USA, nur abstoßen; Realität ? Ladung Q auf Metallkugel sammelt sich auf Oberfläche !))