5 $\int_\mathcal{C}$ – Arten: $\int_\mathcal{C} ds \begin{Bmatrix}\phi \\ \vec{A}\end{Bmatrix}$ ist $\begin{matrix}\text{Skalar}\\ \text{Vektor}\end{matrix}$, $\int_\mathcal{C} d\vec{r} \begin{Bmatrix}\phi \\ \cdot\vec{A} \\ \times\vec{A}\end{Bmatrix}$ ist $\begin{matrix}\text{V.}\\ \text{S.}\\ \text{V.}\end{matrix}$

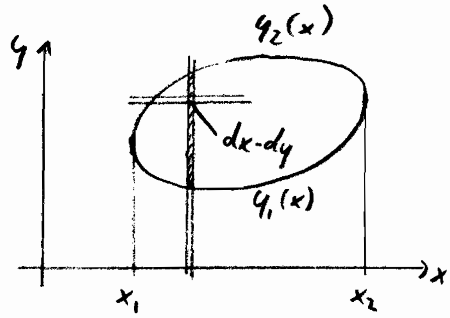
manchmal geometrisch auswertbar, z.B.:

$\vec{E} = \alpha\, \vec{e}_3 \times \vec{r}$, 

$\oint_{\text{Kreis}(R)} d\vec{r} \times \vec{E} = \vec{0}$ (weil $d\vec{r}$ stets $\parallel \vec{E}$)

$\oint_{\text{Kr.}(R)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 2\pi R \cdot \alpha R$ (weil $d\vec{r} \cdot \vec{E} = ds \cdot |\vec{E}| = ds \cdot \alpha R$)

oft hilft, $\mathcal{C}$ geschickt zu legen!

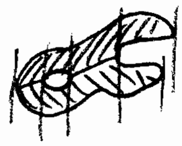


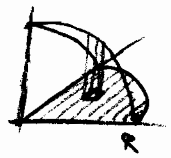
ebenes Flächenint.

$\phi(x,y) = \dfrac{\text{etwas}}{\text{Fläche}}$ ← Masse, Heu, ...

gegeben, dann

$$\left.\begin{matrix}\text{gesamtes}\\ \text{etwas}\end{matrix}\right\} = \int_F d^2r \cdot \phi(x,y) \underset{\text{ausrechnen}}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\ \phi(x,y)}_{\text{Streifen-etwas}}$$

((Randkurve? Immer? ))

Bsp Kugelvolumen 

$x_1 = 0$, $x_2 = R$, $y_1(x) \equiv 0$, $y_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $\phi = \text{Höhe} = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$

$$V_R = 8 \cdot \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad , \ y \to \sqrt{R^2-x^2}\, y$$

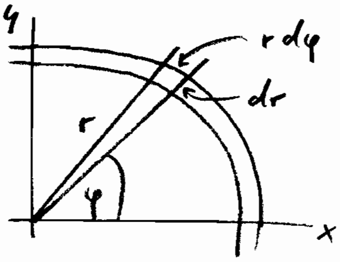
$$= 8 \cdot \int_0^R dx\ (R^2 - x^2) \underbrace{\int_0^1 dy\ \sqrt{1-y^2}}_{= \int_0^{\pi/2} d\varphi\ \cos^2(\varphi) = \pi/4} \qquad y = \sin(\varphi),\ \frac{dy}{d\varphi} = \cos(\varphi)$$

$x \to Rx$

$$= 2\pi R^3 \underbrace{\int_0^1 dx\ (1 - x^2)}_{= 1 - [\frac{1}{3} - 0] = \frac{2}{3}} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

im letzten Bsp: kugeliges kartesisch ?↯
braucht "runde" Koordinaten!

Polarkoordinaten

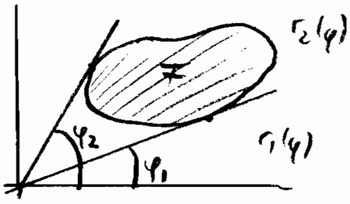


$$d^2r = dr\, r\, d\varphi$$

$$x = r\cos(\varphi)\,, \quad y = r\sin(\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + n\cdot\pi$$

$$\left(\left(\varphi \text{ in } (0,2\pi):\ n = 1 + \Theta(x) - 2\,\Theta(x)\,\Theta(y)\right)\right)$$



$$\int_F d^2r\, \phi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr\, r\, \phi(r,\varphi)$$

Test an Kreisfläche $\left(\overset{?}{=} \pi R^2\right)$

$\phi = 1$, 

, $4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, r = 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}R^2$ ✓✓

Bsp Kugelvolumen

$$V_R = 8 \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\varphi}_{\pi/2} \int_0^R dr\, r\sqrt{R^2-r^2} \qquad r \to Rr$$

$$= 4\pi R^3 \int_0^1 dr\, \underbrace{r\sqrt{1-r^2}}_{= \partial_r\left[\left(-\frac{1}{3}\right)(1-r^2)^{3/2}\right]}$$

$$= 4\pi R^3\left(0+\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}R^3 \quad ✓✓$$

Bsp Galaxie mit $\frac{\text{Masse}}{\text{Fläche}} =: \rho = \rho_0\, e^{-r^2/a^2}$, $M = ?$

$$M = \int_{\substack{\text{ganze}\\ \text{Ebene}}} d^2r\, \rho = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr\, r\, e^{-r^2/a^2}\,, \quad r \to ar$$

$$= \rho_0\, 2\pi\, a^2 \int_0^\infty dr\, \underbrace{r\, e^{-r^2}}_{= \partial_r\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]}$$

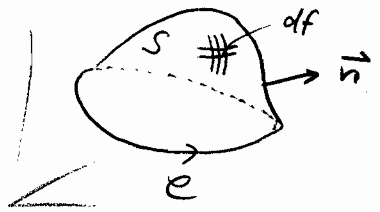
$$= \rho_0\, 2\pi\, a^2\left(0+\frac{1}{2}\right) = \rho_0\, \pi\, a^2$$

Nebenprodukt des letzten Bsp: zu $\rho_0 = 1$, $a = 1$ ist

$$\pi = \int d^2r\, e^{-r^2} = \int dx \int dy\, e^{-x^2-y^2} = \left(\int dx\, e^{-x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \int dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\,, \quad \int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

<u>Oberflächen-Int:</u>



gegeben: S, Rand C mit Richtung,

$$\frac{\text{etwas}}{\text{Fläche}} = \phi(\vec r)\,,\ \vec A(\vec r)\,.$$

Sei $\vec n$ ein Normalenvektor (Einheits-Vektor nach "außen" [rechte-Hand-Regel])

$\Rightarrow$ kann $df \cdot \vec n =: d\vec f$ bilden.

also: es gibt 5 Arten $\int_S$: $\int_S df \cdot \left\{ \begin{matrix} \phi \\ \vec A \end{matrix} \right.$, $\int_S d\vec f \left\{ \begin{matrix} \phi \\ \cdot \vec A \\ \times \vec A \end{matrix} \right.$

<u>Anwendungs-Bsp:</u> Strom durch Fläche $S =: I_S$

zu gegebener Ladungs-Stromdichte $\vec j$

$$\text{Strom} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}\,, \quad \vec j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}\,\vec e$$

nur $j_{\perp S} = j_{\parallel \vec n}$ erzeugt Strom $df \cdot j_{\parallel \vec n} = df\,(\vec j \cdot \vec n) = d\vec f \cdot \vec j$

$$\Rightarrow I_S = \int_S d\vec f \cdot \vec j(\vec r)$$

Ausrechnen?! S gegeben $\Rightarrow$ finde $\vec r(s,t)$

kann $\partial_s \vec r =: \vec r\,'$ und $\partial_t \vec r =: \dot{\vec r}$ bilden

brauche Flächenelement $d\vec f$:

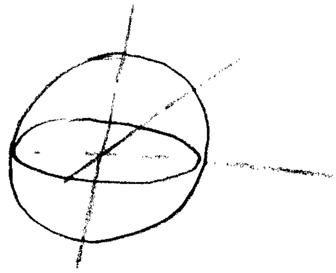
$$d\vec r_1 = ds\, \vec r\,'\,, \quad d\vec r_2 = dt\, \dot{\vec r}$$

$$d\vec f = d\vec r_1 \times d\vec r_2 = ds\, dt\, \vec r\,' \times \dot{\vec r}$$

$$I_S = \int_{F \text{ in } s\text{-}t\text{-Ebene}} ds\, dt\, \underbrace{(\vec r\,' \times \dot{\vec r}) \cdot \vec j}_{\text{von } s,t \text{ abhängig}}$$

$\Rightarrow$ habe auf <u>ebenes</u> Flächen-Int zurückgeführt.

Bsp Kugeloberfläche



$$S_R = 2 \cdot \int_{S_{oben}} df$$

s,t : Polarkoord. ρ, φ in xy-Ebene ,

$$\vec r(\rho,\varphi) = \left(\rho\cos(\varphi),\ \rho\sin(\varphi),\ \sqrt{R^2-\rho^2}\right)$$

$$S_R = 2\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\ |\vec r\,' \times \dot{\vec r}| \cdot \{\phi=1\}$$

$$\vec r\,' = \partial_\rho \vec r = \left(c, s, -\frac{\rho}{\sqrt{\ }}\right), \quad \dot{\vec r} = \partial_\varphi \vec r = (-\rho s, \rho c, 0)$$

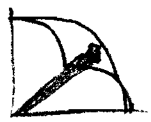
$$\vec r\,'\times\dot{\vec r} = \left(\frac{\rho^2 c}{\sqrt{\ }}, \frac{\rho^2 s}{\sqrt{\ }}, \rho\right)$$

$$|\vec r\,'\times\dot{\vec r}| = \sqrt{\frac{\rho^4}{\sqrt{\ }^2} + \rho^2\frac{\sqrt{\ }^2}{\sqrt{\ }^2}} = \frac{\rho R}{\sqrt{\ }}$$

$$= 2\ 2\pi\ R \int_0^R d\rho\ \frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \qquad \frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = \partial_\rho\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]$$

$$= 4\pi R^2$$

Test Kugelvolumen V_R

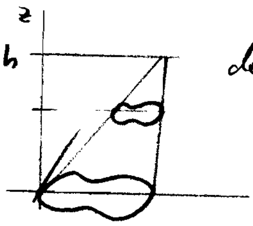


Könnte V_R aus infin. Pyramiden ($\sim df$, $\sim$ Höhe R) aufbauen.

Es muß $V_R = \int \text{Pyr.-Vol.} = \int df \cdot R \cdot \lambda = \lambda R S_R$ gelten.

$\lambda = ?$

Beh.: Jede Pyramide hat Vol. $= \frac{1}{3} \cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe



denn: $$V_{F,h} = \int_0^h dz\, F\cdot\left(\frac{h-z}{h}\right)^2 = \frac{F}{h^2}\left[h^2 z - h z^2 + \frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac13 F h \Rightarrow \lambda = \frac13$$

$$\frac{4\pi}{3}R^3 \stackrel{?}{=} \frac13 \cdot R \cdot 4\pi R^2 \quad ✓$$

((Welt nicht nur aus Drähten, Häuten usw — auch aus Kartoffeln!))