6.3. Integrations-"Methoden"

((≙ Umformungs-Möglichkeiten zur Int.-Chance-Erhöhung))

Man erkenne, daß es Sinn macht, den Integranden $f(x)$ zu lesen ...

... als Partialbruch

$$f = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \partial_x \, \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

... als $u'v$ (partielle Integration)

$$f = u'v = \partial_x (uv) - uv'$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx \; u'v = [uv]_a^b - \int_a^b dx \; uv'$$

Bsp: $I = \int_0^1 dx \; \underbrace{2x}_{u'} \; \underbrace{\ln(x)}_{v} = \underbrace{[x^2 \ln(x)]_0^1}_{=0} - \int_0^1 dx \; x = -\frac{1}{2} + 0$

$u = x^2 \quad v' = \frac{1}{x}$

wenn keine Randterme, dann: $\partial_x \to -\overleftarrow{\partial}_x$:

$$= \int_0^1 dx \; \ln(x)\, \partial_x x^2 = -\int_0^1 dx \; x^2 \partial_x \ln(x)$$

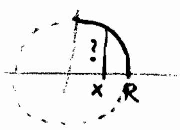
$$= -\int_0^1 dx \; x = -\frac{1}{2} \quad ✓$$

... als $f(x(t))$ (Substitution)

$x = x(t)$ sei monoton in (a,b), $\Rightarrow t = t(x)$

$$\int_a^b dx \, f(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \; \frac{dx}{dt} \, f(x(t))$$

Bsp 1: Kreis (R) - Fläche



$$F_{(R)} = 4 \int_0^R dx \sqrt{R^2 - x^2}$$

setze $x = R \sin(\varphi)$ ((t heißt jetzt φ))

$\Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R\cos(\varphi)$

$x_{unten} = 0 = x(\varphi = 0)$

$x_{oben} = R = x(\varphi = \frac{\pi}{2})$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \; R\cos(\varphi) \; R\sqrt{1 - \sin^2(\varphi)} = 4R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \; \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\to \frac{1}{2}} = \pi R^2$$

((besser? aus $U = 2\pi R$:  $\to$ 

, $F_{(R)} = R \cdot \frac{1}{2} 2\pi R = \pi R^2$))

Bsp 2

$$I = \int_0^1 dx\ 2x\ \ln(x)$$

setze $t = \ln(x) \Rightarrow x = e^t,\ \dot{x} = e^t$

$x_u = 0$ bei $t = -\infty$, $x_o = 1$ bei $t = 0$

$$= \int_{-\infty}^{0} dt\ e^t\ 2e^t\ t \qquad \left(\!\left(\text{nun } \lambda\text{-Trick mit } \lambda = -1 \right)\!\right)$$

$$= -2\int_{\infty}^{0} dt\ e^{-2t}(-t) = -2\int_0^{\infty} dt\ t\,e^{-2t} \qquad \left(\!\left(t \to \tfrac{t}{2} \right)\!\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} dt\ \underbrace{t}_{v}\underbrace{e^{-t}}_{u'} = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} dt\ t(-\partial_t)e^{-t} = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} dt\ e^{-t} = -\tfrac{1}{2} \quad (\text{s.}\downarrow)$$

Bsp 3 (("uneigentliche" Integrale sind eigentlich eigentliche))

$$\int_0^{\infty} dx\ \underbrace{e^{-x}}_{=t,\ x = -\ln(t)} = \int_1^0 dt\left(-\tfrac{1}{t}\right)t = \int_0^1 dt = 1$$

... als ∂_α von ... (Differentiation nach Parameter)

$$\int_0^{\infty} dx\ x^n e^{-x} = \left[(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int_0^{\infty} dx\ e^{-\alpha x}}_{= 1/\alpha}\right]_{\alpha=1} \overset{\uparrow}{=} \left[\frac{n!}{\alpha^{n+1}}\right]_{\alpha=1} = n!$$

$$\left(\!\left((-\partial_\alpha)\frac{1}{\alpha} = +\frac{1}{\alpha^2},\ (-\partial_\alpha)\frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^3},\ \dots \right)\!\right)$$

... als Parameter-abhängig (vgl. Übung, Aufgabe 42)

$$\partial 7 = -\beta\partial_\beta \ln\left(\int_0^{\infty} dx\ \frac{x}{e^{\beta x}+1}\right) = -\beta\partial_\beta \ln\left(\frac{1}{\beta^2}\int_0^{\infty} dx\ \frac{x}{e^{x}+1}\right)$$

$$= -\beta\partial_\beta\left[-2\ln\beta + \ln(\textstyle\int \dots)\right] = 2$$

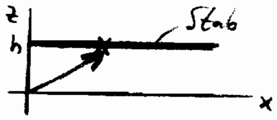
6.4. Kurven- u.a. Integrale

Strategie: alle auf gewöhnliche Int. zurückführen.

Integral = Summe. also

$$\int_a^b dx\, \vec{f}(x) = \left(\int_a^b dx\, f_1(x),\ \int_a^b dx\, f_2(x),\ \dots \right)$$

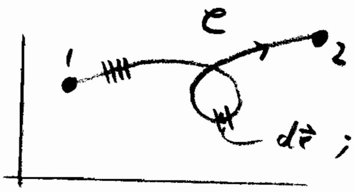
Bsp:



$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int_0^L dx\, \sigma(x)\,(x,0,h) = (R_1, 0, h)$$

Schwerpkt.

Kurvenintegral



$d\vec{r}$; $ds = |d\vec{r}|$

"C gegeben" $\equiv$ $\vec{r}(t)$, t_1, t_2.

Raumkurve

$(\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1),\ \vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$, ggf t_1 aus $\vec{r}_1$-Angabe$)$

Bsp für Gebrauch von Kurvenint.:

Länge von $C = \int_C ds = \int_1^2 ds$

M	$= \int_1^2 ds\ \sigma(\vec{r})$	Draht-Gesamtmasse
$M\vec{R}$	$= \int_1^2 ds\ \sigma(\vec{r})\,\vec{r}$	Draht-Schwerpkt
$V(\vec{r})$	$= -\gamma m \int_1^2 ds'\, \sigma(\vec{r}\,')\, \frac{1}{\lvert\vec{r}-\vec{r}\,'\rvert}$	Draht-Gravi-Pot.
A	$= \int_1^2 d\vec{r}\cdot\vec{K}$	Arbeit entlang Weg C (auch wenn $\vec{K}$ kein V hat)

Ausrechnen von Kurvenint.:

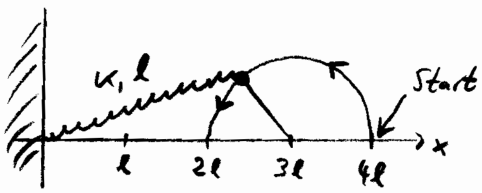
$d\vec{r} = dt\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$, bzw. $ds = dt\cdot|\dot{\vec{r}}|$

z.B. $A = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \dot{\vec{r}}\cdot\vec{K}(\vec{r}(t))$

folgendes "Rezept" nützlich:

„$\int_C$ – Fahrplan"	am Bsp Kreisumfang
1. Größe, d.h. $\int_C$-Art	$U = \int_{Kreis} ds$
2. spezif. C	$\vec r(t) = R(\cos(t), \sin(t), 0)$
3. t_1, t_2	$t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi$
4. $\dot{\vec r} =: \vec v$, ggf v bilden t-Integral	$\vec v = R(-s, c, 0)$ $U = \int_0^{2\pi} dt \; R$
5. $\vec r(t)$ in Integrand einsetzen	– entfällt –
6. ggf. Skalarprod. ausführen	– entfällt –
7. gew. Int. auswerten	$U = R \cdot 2\pi$

<u>Bsp</u>: Mausefalle



Arbeit A als Kurvenintegral!
(Fahrplan-Illustration)

((vorweg: es muß $A = V_{Start} - V_{Ende}$ herauskommen

$$= \frac{\kappa}{2}(4\ell-\ell)^2 - \frac{\kappa}{2}(2\ell-\ell)^2 = \frac{\kappa}{2}\ell^2(9-1) = 4\kappa\ell^2 \quad))$$

1. $A = \int_C d\vec r \cdot \vec K(\vec r)$, $\vec K(\vec r) = \kappa\left(\frac{-\vec r}{r}\right)(r-\ell)$ ← $\vec e_{m \to Haken}$

2. C: $\vec r(t) = \ell(3+\cos(t), \sin(t))$

3. $t_1 = 0, \quad t_2 = \pi$

4. $\dot{\vec r} = \vec v = \ell(-s, c)$

$$A = \int_0^\pi dt \; \ell(-s,c) \cdot \kappa(-\vec r)\left(1 - \frac{\ell}{r}\right)$$

5. $r = |\vec r| = \ell\sqrt{9+6c+c^2+s^2} = \ell\sqrt{10+6c}$

$$A = \ell^2\kappa \int_0^\pi dt \; \underbrace{(-s,c)\cdot(-3-c,-s)}_{= 3s + \cancel{sc} - \cancel{sc}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{10+6c}}\right)$$

6.

7. $$= 3\ell^2\kappa \int_0^\pi dt \; \underbrace{\left(\sin(t) - \frac{\sin(t)}{\sqrt{10+6\cos(t)}}\right)}_{= \partial_t\left[-\cos(t) + \frac{1}{3}\sqrt{10+6\cos(t)}\right]}$$

$$= 3\ell^2\kappa\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{4} + 1 - \frac{1}{3}\sqrt{16}\right) = 4\ell^2\kappa$$