Kommentare zum Hauptsatz

- $_1$ hilft nur, falls man $f = \partial_x F$ lösen kann

  (($f = \sin(x^2) = \partial_x(???)$))

- $_2$ warum er gilt: $\int_a^b dx \, \frac{dF}{dx}$ = F-Zunahme ab $F(a)$

- $_3$ Anwendung: $\int_a^b dx$ ▨ $= \int_a^b dx \, \partial_x [\,??\,] = [\quad]_a^b = [\quad]_{x=b} - [\quad]_{x=a}$

- $_4$ Wunschtabelle $\frac{1}{1+x^2} = \partial_x \arctan(x)$ etc.

  wenn jedoch (s. Bronstein etc.) „$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$",

  dann lese dies als Tabelle (nicht als Gleichung: c ?!)

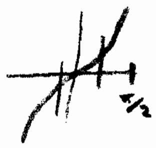
- $_5$ F in Tabelle gefunden

  → zitieren, z.B. [Bronstein, 57]

  → Probe, also $\partial_x(\text{rhs})$ bilden

  ((sonst: Pkt-Abzug bei Ü))

- $_6$ Bsp: $\partial_1 = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx \, \tan(x)$

   ungerade!

  $= \int_{+\pi/6}^{\pi/4} dx \, \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\partial_x \ln(\cos(x)) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

  $= [-\ln(\cos(x))]_{\pi/6}^{\pi/4}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

  $= \ln(\sqrt{2}) - [-\ln(\sqrt{1-\frac{1}{4}})] = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2})$

- $_7$ $\int_a^\infty dx \, f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx \, f$: wenn endlich, dann: „es existiert".

  Bsp: existiert $\int_0^\infty dx \, (\ln(1+e^x) \underbrace{-x}_{=\ln(e^{-x})})$? $\to = \ln(1+e^{-x}) = e^{-x} + O(e^{-2x})$, JA!

- $_8$ „Kandidaten-Methode":

  $\partial_2 = \int_0^1 dx \, \arctan(x) = \int_0^1 dx \, \partial_x [\,?\,]$

  $\partial_x \, x \cdot \arctan(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}$ $= \partial_x(?)$, $\partial_x \ln(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}$

  $\Rightarrow [\,?\,] = x \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

  $= \arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(2) - 0 - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$ (($\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1$ ✓))

6.2. Physik mit (gewöhnl.) Integralen

→ Anwendungsbsp. zur Integration!

Mittelwerte $\frac{h_1+h_2}{2} = \bar h$, Verallg.:

$$\bar f = \frac{\sum f\text{'s}\; dx}{\text{Anzahl } dx} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f$$

$$\overline{f^2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f^2 \quad \text{, etc.}$$

Eigenschaften: $\overline{\alpha f+\beta g} = \alpha\bar f+\beta\bar g$, $\bar 1 = 1$

Schwankung: $\Delta f = \sqrt{\overline{(f-\bar f)^2}} = \sqrt{\overline{f^2} - \overline{2f\bar f} + \bar f^2}$

$$\overset{!}{=} \sqrt{\overline{f^2}-\bar f^2}$$

Bsp harm. Oszi., $x(t) = A\cos(\omega t)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega^2 = \frac{\kappa}{m}$ $\left(\left(m\ddot x = -\kappa x = -\partial_x \frac{\kappa}{2}x^2\right)\right)$

Periode

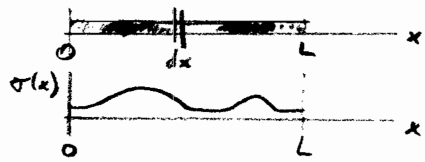
$$\bar x = \frac1T\int_0^T dt\; A\cos(\omega t) = 0$$

mittl. kin. E $\rightsquigarrow \bar T = \frac1T\int_0^T dt\; \frac m2 (A\omega\, \underbrace{\sin(\omega t))^2}_{\hookrightarrow \frac12} = \frac m4\omega^2A^2$

mittl. pot. E $\rightsquigarrow \bar V = \frac1T\int_0^T dt\; \frac\kappa2(A\cos(\omega t))^2 = \frac\kappa4 A^2 = \bar T$

$$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac2\kappa \bar V} = \frac{1}{\sqrt2}A$$

$\sigma(x)$ Massendichte



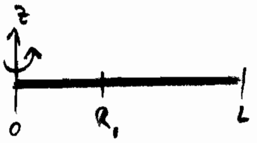
$$\sigma(x) := \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}} = \frac{dm \text{ bei } x}{dx}$$

$M = \sum_a m_a \longrightarrow M = \int_0^L dx\; \sigma(x)$ Ges.-Masse

$R_1 = \frac1M \sum_a m_a x_a \longrightarrow R_1 = \frac1M\int_0^L dx\;\sigma(x)\, x$ Schwerpkt

Erinnerung (§4): Drehimpuls $\vec L = \vec r\times\vec p = \vec r\times m(\vec\omega\times\vec r) \equiv I\vec\omega$ — Winkelgeschw.
— Trägheitstensor

starrer Körper, $I = \begin{pmatrix} I_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_{33}\end{pmatrix}$, z.B. $I_{33} = \sum_a m_a(x_a^2+y_a^2)$



$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\,\omega \end{pmatrix}$$

$$I_{33} = \sum_a m_a \left(x_a^2 + y_a^2 \right) \longrightarrow \overset{L}{I_{33}} = \int_0^L dx\, \sigma(x)\, x^2$$

Achse durch Ursprung

$$\overset{!}{=} \int_0^L dx\, \sigma(x) \left[(x-R_1)^2 + 2R_1(x-R_1) + R_1^2 \right]$$

$$= I_{33}^S + 0 + M R_1^2 \qquad \text{"Satz v. Steiner"}$$

$\uparrow$ Achse durch Schwerpkt.

Superposition

Grav. Pot. eines Stabes mit $\sigma(x)$

Punktmassen M_a bei $\vec{r}_a$ ziehen m bei $\vec{r}$ an:

$$V(\vec{r}) = \sum_a \left(- \frac{\gamma m M_a}{\sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2}} \right)$$

dünner Stab auf x-Achse: $y_a = 0$, $z_a = 0$

$$\longrightarrow V(\vec{r}) = -\gamma m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}}$$

$\rightsquigarrow$ Integral sammelt hier die infinitesimalen Fernwirkungen räuml. verteilter Ursachen auf. (($\int dx'$ OK, da $\sigma(x') = 0$ außerhalb $(0,L)$))

1D Newton, $K(t)$

$$\boxed{\dot{v} = \frac{1}{m} K(t), \quad v(t_0) = v_0}$$

(A) • Integral <u>sinnvoll</u>, wenn

- keine Stammfkt. von $K(t)$ zu finden ist
- $K(t)$ grafisch gegeben ist
- man noch allgemein bleiben will.

$$\int_{t_0}^t dt'\, \partial_{t'} v(t') \overset{!}{=} \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt'\, K(t')$$

$$v(t) - v(t_0) \overset{!}{=}$$

(B) • Integral <u>nicht sinnvoll</u>, wenn $K(t)$ aufleitbar ist:

$$\boxed{\dot{v} \overset{!}{=} \alpha\omega \cos(\omega t), \quad v(t_0) = v_0}$$

$$\overset{!}{=} \alpha\, \partial_t \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow v = \alpha \sin(\omega t) + C_1$$

$$v_0 = \alpha \sin(\omega t_0) + C_1 \Rightarrow C_1 ;$$

1D Newton, $K(x)$ (evtl. unlösbar)

$$m\ddot{x} = K(x) = -\partial_x V(x) \qquad \| \cdot \dot{x}$$

$$\partial_t\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right) = -\partial_t V(x(t))$$

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 = E - V(x)$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}$$

((immerhin eine Ableitung weniger!))

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{E-V(x)}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}} \qquad (*)$$

(B): $\partial_t[\,?\,] = C \pm \sqrt{\frac{2}{m}}\, t$, $C = \dots$, nach x auflösen

(($[\,?\,]$ ist Stammfkt. v. $\frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$ bzgl. x))

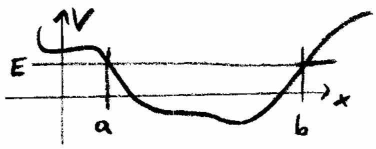
(A): ((finde $[\,?\,]$ nicht, oder will $V(x)$ nicht spezifizieren:))

Strategie: $(*)\cdot dt$ ($\dot{x}\,dt = dx$) und $\int$ darüber [§7: "Trennung der Variablen"]

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E-V(x')}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t} dt' = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,(t-t_0)$$

$$t = t_0 \pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx\, \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Periode T?



$$T = 2\int_a^b dx\, \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Arbeit (1D) $:=$ Kraft · Weg

$=$ Σ (dWeg) · Kraft

$=$ pos., wenn Weg in Richtung Kraft

$=$ dem System zugeführte Energie (Arbeit am System)

$$A = \int_a^b dx\, K(x) = -\int_a^b dx\, \partial_x V(x)$$

$$= V(a) - V(b)$$