Einf. i. d. Meth. d. theor. Physik II → EMTP II

YS, E6-118 (Di 10–12:30 u.n.V.)

www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/emtp2

Orga Vorl Di 8.15–9.00, 9.10–9.55 (H6)

in Pause: Ü-Blatt holen (heute noch nicht) ↪ Ostern...

Ü-Liste eintragen (nur heute)

Übungen Do. 8–10, 10–12, 14–16

Tutoren: s. vor Pause

vor Vorl: Ü-Lsn in Karton

Regeln: 50% Ü-Pkte + akt Mitarbeit ⇒ Ü-Schein

Ü-Schein + (eine) Klausur best ⇒ Schein

↪ alte OK ↪ 17.7.07, 9.10.07

EMTP I – Klausur: (Statistik: 71% bestanden; Gratu!!)

Besprechung / Fragen diese Woche in Ü → evtl. Aufg.zettel mitbringen

(neue Hörer? → als Wdhlg der EMTP I)

Ü-Schein: Pause

KI-Erfolg nicht EMTP II – Voraussetzung.

EMTP II: nicht schwerer als I. schöner! interessanter!

Integrale, krumme Koordinaten, δ

Differenzial gln

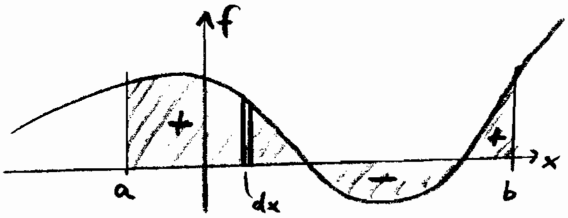
Felder, Integralsätze

Fourier-Trafo

LIT → s. Web; Schulz PB

6. Integrale (+ deren Gebrauch i.d. Physik)

6.1. Gewöhnliche Integrale



Die so gezählte Fläche ist $\{\text{lin. Op.}\}\, f(x)$, denn (u.a.) $\{\;\}(-f) = -\{\;\}f$

$$\begin{pmatrix}\text{Fläche}\\ \text{zw. } a,b\end{pmatrix} = \underbrace{\lim \sum}_{\int} \big(dx \cdot f(x)\big) =: \int_a^b dx\, f(x)$$

$$\int_b^a dx\, f := -\int_a^b dx\, f$$

$\int dx :=$ über alle x, d.h. $\int dx\, f := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f$, $\quad \int d\varphi := \int_{(2\pi)} d\varphi$

Dimension: $\left[\int dx\, f\right] = [x][f]$, $\quad [a] = [b] = [x]$

$\int$-Auswertung = Umformung, bis es trivial ist (d.h. die Fläche geometrisch erhältlich ist)

oder $f = \partial_x(\ldots\ldots)$, s.u. "Hauptsatz"

Beispiele:

$$\int_a^a dx\, f = 0$$

$$\int_a^b dx\, \text{const}_x = (b-a)\cdot \text{const}_x \qquad \left(\int_a^{a+\varepsilon} dx\, f(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varepsilon f(a)\right)$$

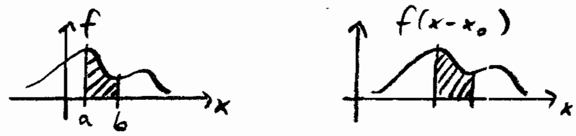
f ungerade $\Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 0$

f gerade $\Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 2\int_0^a dx\, f$

$$\int_a^b dx\, (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b dx\, f + \beta \int_a^b dx\, g$$

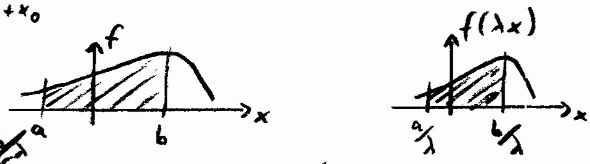
$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \int_a^c - \int_b^c$$

Tricks: <u>Verschieben</u>



$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{a+x_0}^{b+x_0} dx\, f(x-x_0) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} f(x) \to f(x-x_0) \\ \text{Grenzen} \to \text{Grenzen} + x_0 \end{array}\right)\right)$$

<u>Skalieren</u>

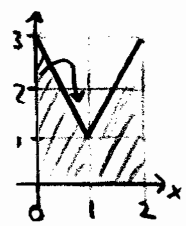


$$\int_a^b dx\, f(x) = \lambda \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx\, f(\lambda x) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} x \to \lambda x \\ dx \to \lambda\, dx \\ \text{Grenzen} \to \text{Grenzen}/\lambda \end{array}\right)\right)$$

Anwendungs-Beispiel

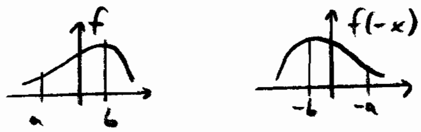
$$\begin{aligned} J &= \int_0^2 dx\, \big(2|x-1|+1\big) &&, \quad x \to x+1 \\ &= \int_{-1}^1 dx\, \big(2|x|+1\big) &&, \quad x \to \tfrac{1}{2} x \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} dx\, \big(|x|+1\big) &&, \quad \text{gerade Fkt} \\ &= \int_0^2 dx\, \big(|x|+1\big) = \int_0^2 dx\, (x+1) &&, \quad x \to x+1 \\ &= \int_{-1}^1 dx\, (x+2) &&, \quad x \text{ ist ungerade Fkt} \\ &= 2\int_{-1}^1 dx = 2\cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

((einfacher <u>Check</u> hier: zeichnen



$f \to 2$, $J = 2\cdot 2 = 4$ ✓))

<u>Spiegeln</u>



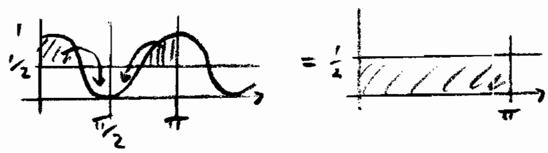
$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{-b}^{-a} dx\, f(-x) = -\int_{-a}^{-b} dx\, f(-x) \qquad ((\hat{=} \text{ Skalieren, } \lambda = -1))$$

<u>$\text{trig}^2 \to \frac{1}{2}$</u>

$$\int_0^\pi dx \begin{Bmatrix} \cos^2(x) \\ \sin^2(x) \end{Bmatrix} = \int_0^\pi dx \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \quad ,$$

$\overset{\shortparallel}{1-c^2}$

denn



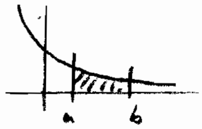
weil $\cos^2(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} \int_0^a dx\, \sin^2(x) = \frac{1}{2} \quad ,$$

denn $\dfrac{1}{N\pi + O(1)} \cdot \left(N\frac{\pi}{2} + O(1)\right) \to \frac{1}{2}$

$\int \to$ dimensionslos   z.B.: $\int_0^{t_1} dt\, v(t) = \int_0^{t_1} dt\, v_0 f(\omega t)$, $t \to \frac{1}{\omega} t$

$$= \frac{v_0}{\omega} \int_0^{\omega t} dt\, f(t)$$

$\int$ aus Σ(Scheibchen)   z.B.: 

$$\int_a^b dx\, e^{-x} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(b-a)}{N} e^{-(a+n\frac{b-a}{N})}$$

aus §5, Potenzreihen: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}$ (Skript S. 42)

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{(b-a)}{N} e^{-a} \frac{1-e^{-\frac{b-a}{N}(N+1)}}{1-e^{-\frac{b-a}{N}}}$$

Nenner $\to \frac{b-a}{N} + O(\frac{1}{N^2})$

$$= e^{-a}(1-e^{-b+a}) = e^{-a} - e^{-b}$$

(($\Rightarrow \int_0^\infty dx\, e^{-x} = 1$))

$$= [-e^{-x}]_{x=b} - [-e^{-x}]_{x=a}$$ ((geht das immer? s.u.))

"Hauptsatz" $\partial_b \int_a^b dx\, f(x) = \frac{\int_a^{b+\varepsilon} dx\, f(x) - \int_a^b dx\, f(x)}{\varepsilon} = \frac{\int_b^{b+\varepsilon} dx\, f(x)}{\varepsilon}$

$$= \frac{1}{\varepsilon} f(b)\cdot\varepsilon = f(b)$$

Kennt man zu $f(x)$ eine Stammfkt $F(x)$, d.h. eine Lösung der Dgl. $F'(x) = f(x)$, dann ist also

$$\partial_b \int_a^b dx\, f(x) = \partial_b F(b)$$

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) + C$$

$b \to a$: $\quad 0 = F(a) + C$

$$\boxed{\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)}$$