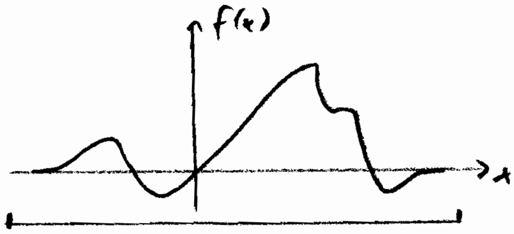
10.2 Fourier-Transformation

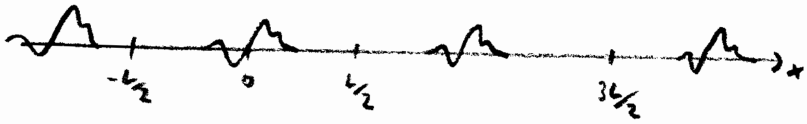
Motiv.: Geräusch statt Ton

"Physik ist nicht ewig periodisch"



Physik stets im Endlichen (?), wenn man nur weit genug blickt bzw. lange genug wartet / zurückverfolgt

Kann endliche Physik periodisch fortsetzen, als F-Reihe schreiben, und $L \to \infty$ studieren.



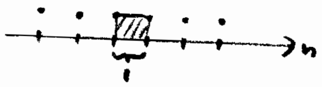
$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_n (L c_n)\, e^{in \frac{2\pi}{L} x}$$

$$\text{mit} \quad L c_n = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \underbrace{f(x)}_{\text{bleibt fest bei } L\to\infty} \xrightarrow{L\to\infty} \int dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x) =: \tilde{f}\left(n\frac{2\pi}{L}\right)$$

$$= \frac{1}{L} \sum_n \tilde{f}\left(n \frac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

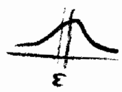
beide nur schwach von n abh.

suche asympt. führenden f-Term bzgl $L \to \infty$



$$\sum_n \ldots = \sum_n 1 \cdot \ldots \to \int dn \ldots$$

$$\to \frac{1}{L} \int dn\, \tilde{f}\left(n\frac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

((

$$O(1) = \int dx\, g(x) = \sum_n \varepsilon\, g(\varepsilon n) + O(\varepsilon)$$

$$\varepsilon \int dx\, g(\varepsilon x) \qquad \Big\| \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \underline{\int dx}\; g(\varepsilon x) = \underline{\sum_n}\, g(\varepsilon n) + O(1)$$))

Subst. $n\frac{2\pi}{L} = k$, $dn = \frac{L}{2\pi} dk$ gibt nun

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{ikx}\, \tilde{f}(k) \\ \text{mit} \quad \tilde{f}(k) &= \int dx\, e^{-ikx} f(x) \end{aligned}}$$

- $\tilde{f}$ heißt die Fourier-Transformierte von f.
- 2π-Konvention!! (hier: ~ QFT)

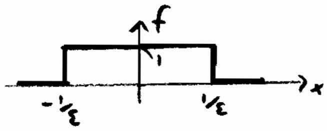
((Nachweis direkt: $f_{\mathcal{F}}(x)$ bilden, $f_{\mathcal{F}} = f$ zeigen,

$$f_{\mathcal{F}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\left[\int dx'\, e^{-ikx'} f(x')\right]$$

$$\stackrel{!}{=} \int dx' \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ik(x-x')}}_{=\delta(x-x')} f(x') = f(x)\,, \quad \text{ged.} \;))$$

((s. Kap. 6, Skript S. 74))

Bsp "Kasten" $f(x) = \Theta\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - x^2\right)$



$$\tilde{f}(k) = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx\, e^{-ikx} = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon}$$

oder $\tilde{f} = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx \left(\cos(kx) = \frac{1}{k}\partial_k \sin(kx)\right) = \frac{2}{k}\sin(k/\varepsilon)$

$\Rightarrow f = \Theta\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + x^2\right)$ hat $\tilde{f} = 2\pi\, \frac{1}{\pi k}\sin(k/\varepsilon)$

Bei $\varepsilon \to 0$ erhält man ((Erinnerung Kap. 6, S. 74, $\frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$))

$f(x) = 1$	hat	$\tilde{f}(k) = 2\pi\,\delta(k)$
und $f(x) = \delta(x)$	hat	$\tilde{f}(k) = 1$

Bem.:
- im physikalisch vollverstandenen Sinne sind Konstante und δ's $\mathcal{F}$-transformierbar
- f eng (große ε), $\tilde{f}$ breit
  f breit, $\tilde{f}$ eng
- bei kleinen (großen) x und f durch große (kleine) k in $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde{f}(k)$ gut dargestellt. [grobe Regel]

Bsp Gauß $f(x) = A e^{-\alpha x^2}$

$$\tilde{f}(k) = A\int dx\, \underbrace{e^{-ikx}}_{\to\, \cos(kx) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(kx)^{2n}} e^{-\alpha x^2}$$

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}\, k^{2n}\, \underbrace{(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int dx\, e^{-\alpha x^2}}_{\stackrel{!}{=}\alpha^{-1/2}\sqrt{\pi}}}_{=\, 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)\,\frac{1}{2^n}\,\alpha^{-\frac{1}{2}-n}}$$

((Kap. 6, S. 67))

Klausurtipp: Integrale sammeln?

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1) \stackrel{!}{=} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-1)\cdot 2n}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}$$

$$\tilde{f}(k) \overset{\varphi}{=} A \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right)^n = \underline{\underline{A \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}}$$

<u>Bem.:</u>

- erneut: f eng $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ breit
- FT{Gauß} = Gauß

  eine Forminvarianz unter F.T.!

  es gibt mehr (∞ viele): $FT\left\{\frac{1}{\cosh(x)}\right\} = \frac{\pi}{\cosh(\frac{\pi}{2}k)}$

  $FT\left\{\sqrt{\frac{a}{|x|}}\right\} = \sqrt{\frac{2a\pi}{|k|}}$

<u>allg. Eigenschaften</u>

- f reell $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}^*(k) = \tilde{f}(-k)$
- $f(-x) = \pm f(x) \Leftrightarrow \tilde{f}(-k) = \pm \tilde{f}(k)$ $\hat{=}$ $\left\{\begin{array}{l}\cos\text{-Entwicklung}\\ \sin\text{-Entwicklung}\end{array}\right.$
- $$\int dx\, |f|^2 = \underbrace{\int dx \frac{1}{2\pi}}\int dk\, \underbrace{e^{ikx}}\, \tilde{f}(k)\, \frac{1}{2\pi}\int dq\, \underbrace{e^{-iqx}}\, \tilde{f}^*(q)$$
  $$\delta(k-q)$$
  $$= \frac{1}{2\pi}\int dk\, |\tilde{f}(k)|^2$$
  <u>"Parseval's Theorem"</u>
- Tabellen. $f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$

  $=: g(x) + u(x)$

  $$\tilde{f}(k) = \int dx\, e^{-ikx}\left(g(x) + u(x)\right)$$
  $$= \int dx \cos(kx)\, g(x) - i\int dx\, \sin(kx)\, u(x)$$

<u>Räumliche FT</u>

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int dk_1\, e^{ik_1x}\, \underbrace{\tilde{\tilde{\tilde{f}}}(k_1,y,z)}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int dk_2\, e^{ik_2y}\, \underbrace{\tilde{\tilde{f}}(k_1,k_2,z)}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int dk_3\, e^{ik_3z}\, \tilde{f}(k_1,k_2,k_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \tilde{f}(\vec{k}) \\ \text{mit } \tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, f(\vec{r}) \end{array}}$$

((Raumzeitliche FT:

reine Konvention

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^3k\, d\omega\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}\, \tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega)$$

mit $\tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega) = \int d^3r\, dt\, e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t}\, \vec{E}(\vec{r},t)$))

Klausur-Eichstrich

10.3 Anwendungen

Oft:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{f\text{-Gln.}} \arrow[r, dashed, "?"] \arrow[d, "f = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx} \tilde{f} \text{ einsetzen}"'] & \boxed{\text{Lösung } f} \\
\boxed{\tilde{f}\text{-Gln.}} \arrow[r, "\text{lösen}"] & \boxed{\text{Lösung } \tilde{f}} \arrow[u, "\text{„nur noch" Integrieren!}"']
\end{tikzcd}$$

Bsp Elektrostatik

will $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$ lösen

Abstieg:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k\, \underbrace{\begin{Bmatrix} \vec{\nabla}\cdot \\ \vec{\nabla}\times \end{Bmatrix} e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{= \underbrace{\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{= i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}}} \begin{Bmatrix} \cdot \\ \times \end{Bmatrix}} \tilde{\vec{E}}(\vec{k}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\rho}(\vec{k}) \\ 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \to i\vec{k}}$$

Koeff-Vergl.:

$$i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde{\rho} \qquad (\tilde{1})$$

$$i\vec{k}\times\tilde{\vec{E}} = \vec{0} \qquad (\tilde{2})$$

Lösen:

$$i\vec{k}\times(\tilde{2}) \overset{\text{bac-cab}}{=} i\vec{k}\,(\underbrace{i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}}}_{(\tilde{1}) \text{ einsetzen}}) + k^2\tilde{\vec{E}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \tilde{\vec{E}}(\vec{k}) = -\frac{i\vec{k}}{\varepsilon_0 k^2}\tilde{\rho}(\vec{k})$$

Aufstieg:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k\, \underbrace{e^{i\vec{k}\vec{r}}\,(-i\vec{k})}_{= -\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}}} \frac{1}{\varepsilon_0 k^2} \underbrace{\tilde{\rho}(\vec{k})}_{= \int d^3r'\, e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \rho(\vec{r}')}$$

$$= -\vec{\nabla}\int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k\, \frac{4\pi}{k^2} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}_{\equiv K(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \text{ (s.u.)}} \rho(\vec{r}')$$

$$= -\vec{\nabla}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|}$$

(($K(\vec{r}) \overset{\text{Kugelkoord.}}{=} \frac{2}{\pi}\frac{1}{r}\underbrace{\int_0^\infty dk\, \frac{\sin(kr)}{k}}_{= \pi/2} = \frac{1}{r}$, $\boxed{FT\left\{\frac{1}{r}\right\} = \frac{4\pi}{k^2}}$))

$\leftarrow 1 = \int dx\, \delta(x) = \int dx\, \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx\, \frac{\sin(\frac{x}{\varepsilon})}{x}$, $x \to \varepsilon k r$ ■