Klausur zu EMTP II   Uni Bielefeld   09.10.2007

[Beginn 09:30, Abgabe 11:30 ; 32 Punkte, bei ≥ 10 garantiert bestanden ; Name+Matrikelnr auf jedes Blatt]

Aufgabe 1: (1 Punkt)
$s \equiv \sin(\varphi)$, $c \equiv \cos(\varphi)$: $\int_{(2\pi)} d\varphi \, \{ \, s \, , \, c \, , \, s^2 \, , \, sc \, , \, s^4 c \, \} \, = \, \{ \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \} \, ?$

Aufgabe 2: Substitution (2 Punkte)
Lösen Sie $I = \int_1^\infty dx \, \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$ per Substitution: erst $x = 1/u$, dann $u = \sin(\varphi)$.

Aufgabe 3: Schwingungsdauer aus Potential (3 Punkte)
Falls die Formel $T = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^a dx \, [E - V(x)]^{-1/2}$ stimmt, sollte sie zum 1D harmonischen Oszillator (m, ω, $V(x) = ?$) auf $T = 2\pi/\omega$ führen. $E = ?$ [Skalierung und Subst. $x = \sin(\varphi)$ helfen.]

Aufgabe 4: Potentiale addieren sich (1+2=3 Punkte)
(a) Ein Halbstab (negative z-Achse, lineare Massendichte σ) hat das Gravitationspotential $V(\vec{r}) = \gamma m \sigma \ln\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + z\big)$. Welches hat folglich ein beidseitig ∞ langer Stab?
(b) Eine dünne Platte in der xz–Ebene, von $x = -a$ bis $x = a$ reichend, soll aus obigen Stäben zusammengesetzt werden und dabei eine Masse/Fläche ρ_0 haben. Das Potential V der Platte entsteht, wenn man zuerst den Faktor σ im (a)-Resultat durch $d\sigma = ?$ ersetzt. $V(\vec{r}) = ?$ Statt das Integral zu lösen, bilden Sie bitte sofort $K_3 = -\partial_y V(0, y, 0)$ und studieren $y \to \pm 0$.

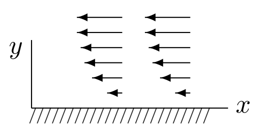
Aufgabe 5: Delta–Darstellungen (1+1+1+1=4 Punkte)
(a) $\delta(x) \overset{!}{=} \beta \, \theta(x) \, e^{-x/\varepsilon} \quad , \quad \beta = ?$
(b) Um $\int dx \; \delta(x-a) \, \delta(x-b) \overset{?}{=} \delta(a-b)$ zu verifizieren, kann man nachsehen, ob die „definierende Eigenschaft“ für beide Seiten Gleiches liefert
(c) oder für die inneren zwei δ's die Darstellung aus (a) verwenden und nachsehen, was bei Integration herauskommt (nämlich eine Darstellung der rhs ?).
(d) $C \, x^n \, \delta(x^3) \overset{!}{=} \delta(x) \quad , \quad n = ? \, , \; C = ?$

Aufgabe 6: dimensionslose Differentialgleichung (3 Punkte)
$\boxed{\ddot{x} = -2\dot{x}^2/2 \, , \; \dot{x}(0) = 1 \, , \; x(0) = 1}$. Besonderheit der Dgl ? Lösung $x(t) = ?$

Aufgabe 7: Greens (3 Punkte)
Der lineare Operator $L = \partial_t + 2t$ ist nicht translationsinvariant. Welche allgemeine Greensche Funktion $G(t, a)$ hat er? [Hinweis: hier eignen sich z.B. Variation der Konstanten, oder PQ-Formel.]

Aufgabe 8: Rotation ($C \equiv \cos(\vartheta)$, $c \equiv \cos(\varphi)$ etc.) (2 Punkte)
Hat das Feld $\vec{e}_\vartheta = (\, Cc \, , \, Cs \, , \, -S \,)$ Wirbel? [Hinweis: ∇ in Kugelkoordinaten is rentabel]

Aufgabe 9: Strömung im Fluss (2 Punkte)
Die Wirbelstärke nimmt vom Ufer (x–Achse) zur Flussmitte hin (y–Richtung) ab: $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{e}_3 \, \omega \, e^{-y/a}$. $\vec{v}(\vec{r}) = ?$
[Hinweis: Ansatz ?! Und nach dem Aufleiten: Konstante sinnvoll fixieren.]



Aufgabe 10: Gauß ($\Delta \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$; $r \equiv |\vec{r}\,|$) (2 Punkte)
Bestimmen Sie den Faktor λ in $\Delta \frac{1}{r} = \lambda \, \delta(\vec{r}\,)$ mittels Gauß'schem Integralsatz.

Aufgabe 11: Laplace (2 Punkte)
$\Delta \, e^{ikx} = ? \quad \arctan(a^2 \Delta) \, e^{ikx} = ? \quad \Delta \, e^{i\vec{k}\,\vec{r}} = ? \quad \Delta \, \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} = ?$ [$\Delta \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$; $r \equiv |\vec{r}\,|$]

Aufgabe 12: Diffusion: $T(\vec{r}, t) = e^{tD\Delta} \, T(\vec{r}, 0)$ per Fourier (3 Punkte)
Was wird aus einem heißen Punkt $T(\vec{r}, 0) = \alpha \, \delta(\vec{r}\,)$ im Laufe der Zeit ? [D und α sind konstant.]

Aufgabe 13: Fourier liefert Integral (1+1=2 Punkte)
(a) Welche Fourier–Transformierte $\widetilde{f}(k)$ hat $f(x) = e^{-\gamma |x|}$ $(\gamma > 0)$?
(b) Aus dem (a)-Resultat können Sie (per $f(x) = \int \ldots$) das Integral $J = \int dk \frac{\cos(kx)}{\gamma^2 + k^2}$ ablesen.

Viel Erfolg!