Klausur zu EMTP II   Uni Bielefeld   17.07.2007

[Beginn 09:30, Abgabe 11:30 ; 32 Punkte, bei ≥ 10 garantiert bestanden ; Name+Matrikelnr auf jedes Blatt]

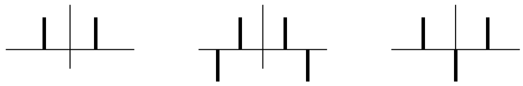
Aufgabe 1: (1 Punkt)
Welche Form haben die Äquipotential–Linien des 2D–Potentials $V(\vec{r}\,) = e^{-3\arctan\left(9y^2/a^2+5+x^2/a^2\right)}$?

Aufgabe 2: Ein gewöhnliches Integral (2 Punkte)
Berechnen Sie $I = \int_0^\infty du\; u^2\, e^{-u^2}$. Läßt sich mit der Idee $-\partial_\alpha J(\alpha)\,\big|_{\alpha=1}$ etwas anfangen ?

Aufgabe 3: Arbeit (3 Punkte)
Welche Arbeit muß an einem Teilchen verrichtet werden, um es im Kraftfeld $\vec{K} = -\frac{\gamma m M}{r^3}\vec{r}$ entlang der Kurve $\vec{r}(\alpha) = R\,(\sin(\alpha) - \alpha\cos(\alpha)\,,\, \cos(\alpha) + \alpha\sin(\alpha))$ von $\vec{r}(0)$ nach $\vec{r}(\pi)$ zu bewegen? [Hinweis: 2D Problem, $r = |\vec{r}\,|$; Es gibt 2 Wege zum Ziel, via Kurvenintegral oder via Potential.]

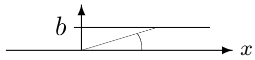
Aufgabe 4: Volumenintegral (3 Punkte)
Eine Halbkugel (Radius R, homogene Massendichte ρ_0) liegt auf der x–y–Ebene. Berechnen Sie die Gesamtmasse M und den Schwerpunkt $\vec{R} = (R_1, R_2, R_3)$. Werten Sie das $\int d^3r$ für MR_3 bitte entweder in Zylinder– oder in Kugelkoordinaten aus.

Aufgabe 5: Delta (1+1+1.5=3.5 Punkte)
(a) 1D Delta-Darstellung (mit $\varepsilon \to 0^+$): $\delta(x) = \alpha\,\theta(x)\,e^{-x^2/\varepsilon^2}$, $\alpha = ?$
(b) 2D Delta-Darstellung (mit $\varepsilon \to 0^+$): $\delta(\vec{r}\,) = \eta\, e^{-r^2/\varepsilon^2}$, $\eta = ?$ [Hier ist $r = |\vec{r}\,| = \sqrt{x^2+y^2}$]
(c) Zeichnen Sie in die drei Skizzen (| bedeutet δ) jeweils die antisymmetrische Stammfunktion ein.



Aufgabe 6: Dgl 1.Ordnung (2 Punkte)
Berechnen Sie die allgemeine Lösung von $\dot{v}(t) = -\alpha v(t) + k_0 e^{\beta t}$ per *PQ–Formel*. [*eine* Konstante?!]

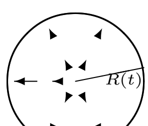
Aufgabe 7: krumme Koordinaten (1 Punkt)
Welche Polarkoordinaten–Darstellung $r(\varphi)$ hat die Horizontale $y = b$?



Aufgabe 8: Gradient (1+2=3 Punkte)
(a) Bilden Sie den Gradienten von $\vec{a}\cdot(\,\vec{b}\times\vec{r}\,)$. [$\vec{a},\,\vec{b} = \vec{\text{const}}$] (b) Bilden Sie $e^{\vec{r}\cdot\nabla}\, r^2$.

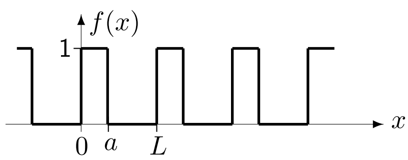
Aufgabe 9: Rotation (3 Punkte)
Kontrollieren Sie am Beispiel $\vec{B} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ ($\vec{\omega} = \vec{\text{const}}$), ob $\vec{A}(\vec{r}\,) = -\vec{r}\,\times\frac{1}{2+(\vec{r}\cdot\nabla)}\,\vec{B}(\vec{r}\,)$ ein Vektorpotential von $\vec{B}(\vec{r}\,)$ sein kann.

Aufgabe 10: Kontinuitätsgleichung (4 Punkte)
Ein Gas aus N Teilchen ist in einer Kugel eingeschlossen. Deren Radius wird nun ab $t{=}0$ mit Geschwindigkeit v vergrößert: $R(t) = R_0 + vt$. Die Teilchendichte $n(t)$ bleibe dabei ortsunabhängig. Berechnen Sie die Teilchen–Stromdichte $\vec{j}\,(r,t)$.



Aufgabe 11: Laplace–Greens (2 Punkte)
$\chi(r) = \frac{1}{r+\varepsilon}$ (mit $\varepsilon \to 0^+$) bettet $\frac{1}{r}$ ein. Zeigen Sie, daß es sich bei $\Delta_r\,\chi$ um eine Darstellung von $-4\pi\,\delta(\vec{r}\,)$ handelt. [Δ_r ist der Radial-Anteil des Laplace-Operators.]

Aufgabe 12: Fourier–Reihe (2 Punkte)
Welche Fourier–Koeffizienten c_n hat die skizzierte periodische Funktion? [Hinweis: c_0 separat angeben.]



Aufgabe 13: Fourier–Transformation (2.5 Punkte)
3D . $T(\vec{r}\,) = \gamma\,\delta(r-R)$. Welche Fourier–Transformierte $\widetilde{T}(\vec{k}\,)$ hat diese heiße Kugeloberfläche ?

Viel Erfolg!