Einf. i. d. Meth. d. theor. Physik II → EMTP II

YS, E6-118 (Di 10-12:30 u.n.V.)

www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/emtp2

Orga Vorl Di 8.15-9.00, 9.10-9.55 (H6)
in Pause: Ü-Blatt holen (heute noch nicht)
↳ Ostern...
Ü-Liste eintragen (nur heute)
Übungen Do. 8-10, 10-12, 14-16
Tutoren: s. vor Pause
vor Vorl: Ü-Lsn in Kasten
Regeln: 50% Ü-Pkte + akt Mitarbeit ⇒ Ü-Schein
Ü-Schein + (eine) Klausur best ⇒ Schein
↳ alt OK ↳ 17.7.07, 9.10.07

EMTP I - Klausur: (Statistik: 71% bestanden; Gratu!!)
Besprechung / Fragen diese Woche in Ü → evtl. Afg. zettel mitbringen
(neue Hörer? → als Wdh der EMTP I)
Ü-Schein: Pause
KI-Erfolg nicht EMTP II - Voraussetzung.

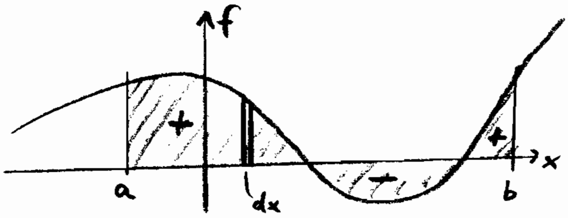
EMTP II: nicht schwerer als I. schöner! interessanter!

Integrale, krumme Koordinaten, δ
Differenzial glen
Felder, Integralsätze
Fourier - Trafo

LIT → s. Web; Schulz PB

6. Integrale (+ deren Gebrauch i.d. Physik)

6.1. Gewöhnliche Integrale



Die so gezählte Fläche ist $\{\text{lin. Op.}\} f(x)$, denn (u.a.) $\{\ \}(-f) = -\{\ \}f$

$$\begin{pmatrix}\text{Fläche}\\ \text{zw. } a, b\end{pmatrix} = \underbrace{\lim \sum}_{\int} \left(dx \cdot f(x)\right) =: \int_a^b dx\, f(x)$$

$$\int_b^a dx\, f := -\int_a^b dx\, f$$

$\int dx :=$ über alle x, d.h. $\int dx\, f := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f$, $\int d\varphi := \int_{(2\pi)} d\varphi$

Dimension: $[\int dx\, f] = [x][f]$, $[a] = [b] = [x]$

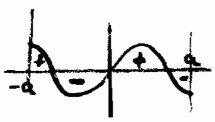
$\int$-Auswertung = Umformung, bis es trivial ist (d.h. die Fläche geometrisch erhältlich ist)

oder $f = \partial_x(\ldots\ldots)$, s.u. "Hauptsatz"

Beispiele:

$$\int_a^a dx\, f = 0$$

$$\int_a^b dx\, \mathrm{const}_x = (b-a) \cdot \mathrm{const}_x \qquad \left(\int_a^{a+\varepsilon} dx\, f(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varepsilon f(a)\right)$$



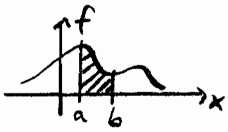
f ungerade $\Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 0$

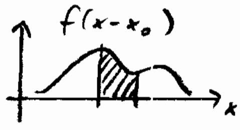
f gerade $\Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 2\int_0^a dx\, f$

$$\int_a^b dx\, (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b dx\, f + \beta \int_a^b dx\, g$$

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \int_a^c - \int_b^c$$

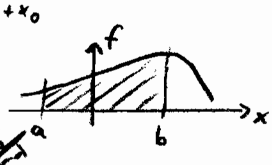
Tricks: Verschieben

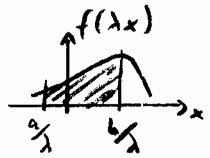




$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{a+x_0}^{b+x_0} dx\, f(x-x_0) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} f(x)\to f(x-x_0) \\ \text{Grenzen}\to \text{Grenzen}+x_0 \end{array}\right)\right)$$

Skalieren



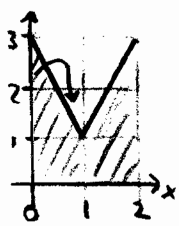


$$\int_a^b dx\, f(x) = \lambda \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx\, f(\lambda x) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} x\to \lambda x \\ dx \to \lambda\, dx \\ \text{Grenzen}\to \text{Grenzen}/\lambda \end{array}\right)\right)$$

Anwendungs-Beispiel

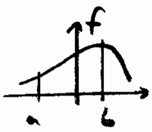
$$\begin{aligned} J &= \int_0^2 dx\, \big(2|x-1|+1\big) && , \quad x\to x+1 \\ &= \int_{-1}^1 dx\, \big(2|x|+1\big) && , \quad x \to \tfrac{1}{2}x \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^2 dx\, \big(|x|+1\big) && , \quad \text{gerade Fkt} \\ &= \int_0^2 dx\, \big(|x|+1\big) = \int_0^2 dx\, (x+1) && , \quad x\to x+1 \\ &= \int_{-1}^1 dx\, (x+2) && , \quad x \text{ ist ungerade Fkt} \\ &= 2\int_{-1}^1 dx = 2\cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

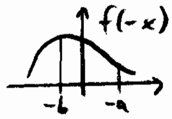
((einfacher Check hier: zeichnen



$f\to 2$, $J = 2\cdot 2 = 4$ ✓))

Spiegeln



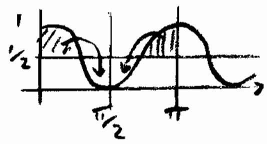


$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{-b}^{-a} dx\, f(-x) = -\int_{-a}^{-b} dx\, f(-x) \qquad \left(\left(\hat{=} \text{ Skalieren, } \lambda = -1\right)\right)$$

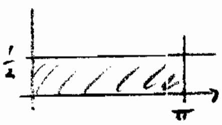
$\text{trig}^2 \to \frac{1}{2}$

$$\int_0^\pi dx \begin{Bmatrix} \cos^2(x) \\ \sin^2(x) \\ \scriptstyle \parallel \\ \scriptstyle 1-c^2 \end{Bmatrix} = \int_0^\pi dx \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{2} \quad ,$$

denn



$= \frac{1}{2}$



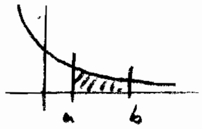
weil $\cos^2(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_0^a dx\, \sin^2(x) = \frac{1}{2} \quad ,$$

denn $\frac{1}{N\pi + O(1)} \cdot \left(N\frac{\pi}{2} + O(1)\right) \to \frac{1}{2}$

$\int \to$ dimensionslos z.B.: $\int_0^{t_1} dt\, v(t) = \int_0^{t_1} dt\, v_0 f(\omega t) = \frac{v_0}{\omega}\int_0^{\omega t} dt\, f(t)$, $t \to \omega t$

$\int$ aus Σ(Scheibchen) z.B.:



$$\int_a^b dx\, e^{-x} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(b-a)}{N} e^{-\left(a+n\frac{b-a}{N}\right)}$$

aus §5, Potenzreihen: $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^N+\frac{x^{N+1}}{1-x}$ (Skript S. 42)

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{(b-a)}{N} e^{-a} \frac{1-e^{-\frac{b-a}{N}(N+1)}}{1-e^{-\frac{b-a}{N}}}$$

Nenner $\to \frac{b-a}{N} + O(\frac{1}{N^2})$

$$= e^{-a}\left(1-e^{-b+a}\right) = e^{-a}-e^{-b}$$

$$\left(\left(\Rightarrow \int_0^\infty dx\, e^{-x} = 1 \right)\right)$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_{x=b} - \left[-e^{-x}\right]_{x=a}$$ ((gilt das immer? s.u.))

"Hauptsatz"

$$\partial_b \int_a^b dx\, f(x) = \frac{\int_a^{b+\varepsilon} dx\, f(x) - \int_a^b dx\, f(x)}{\varepsilon} = \frac{\int_b^{b+\varepsilon} dx\, f(x)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} f(b)\cdot\varepsilon = f(b)$$

Kennt man zu $f(x)$ eine Stammfkt $F(x)$, d.h. eine Lösung der Dgl. $F'(x) = f(x)$, dann ist also

$$\partial_b \int_a^b dx\, f(x) = \partial_b F(b)$$

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) + C$$

$b \to a$: $\quad 0 = F(a) + C$

$$\boxed{\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)}$$

Kommentare zum Hauptsatz

•1 hilft nur, falls man $f = \partial_x \mathcal{F}$ lösen kann
(($f = \sin(x^2) = \partial_x\,(\,???\,)$))

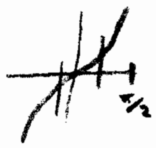
•2 warum es gilt: $\int_a^b dx\, \frac{d\mathcal{F}}{dx} = \mathcal{F}$ - Zunahme ab $\mathcal{F}(a)$

•3 Anwendung: $\int_a^b dx\ \cancel{\ \ } = \int_a^b dx\ \partial_x\,[\ ??\ ] = [\ \ ]_a^b = [\ \ ]_{x=b} - [\ \ ]_{x=a}$

•4 Wunschtabelle: $\frac{1}{1+x^2} = \partial_x \arctan(x)$ etc.
wenn jedoch (s. Bronstein etc.) „$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x)$",
dann lese dies als Tabelle (nicht als Gleichung: d ?!)

•5 $\mathcal{F}$ in Tabelle gefunden
→ zitieren, z.B. [Bronstein, 57]
→ Probe, also $\partial_x(\text{rhs})$ bilden
((sonst: Pkt-Abzug bei Ü))

•6 Bsp: $\partial_1 = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx\ \tan(x)$



ungerade!

$= \int_{+\pi/6}^{\pi/4} dx\ \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\partial_x \ln(\cos(x)) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$= [-\ln(\cos(x))]_{\pi/6}^{\pi/4}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

$= \ln(\sqrt{2}) - [-\ln(\sqrt{1-\frac{1}{4}})] = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2})$

•7 $\int_a^\infty dx\, f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f$: wenn endlich, dann: „es existiert".

Bsp: existiert $\int_0^\infty dx\, (\ln(1+e^x) \underbrace{-x}_{=\ln(e^{-x})})$? $\to\ = \ln(1+e^{-x}) = e^{-x} + O(e^{-2x})$, JA!

•8 „Kandidaten-Methode":

$\partial_2 = \int_0^1 dx\ \arctan(x) = \int_0^1 dx\ \partial_x\,[\ ?\ ]$

$\partial_x\ x\cdot\arctan(x) = \arctan(x) + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=\partial_x(?)}$, $\partial_x \ln(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}$

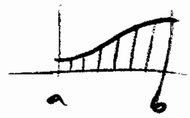
$\Rightarrow [\ ?\ ] = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$= \arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(2) - 0 - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$ (($\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1$ ✓))

6.2. Physik mit (gewöhnl.) Integralen

→ Anwendungsbsp. zur Integration !

Mittelwerte $\frac{h_1+h_2}{2} = \bar h$, Verallg.:



$$\bar f = \frac{\sum f\text{'s}\; dx}{\text{Anzahl } dx} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f$$

$$\overline{f^2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f^2 \quad \text{, etc.}$$

Eigenschaften: $\overline{\alpha f+\beta g} = \alpha\bar f + \beta \bar g$, $\bar 1 = 1$

Schwankung: $\Delta f \stackrel{!}{=} \sqrt{\overline{(f-\bar f)^2}} = \sqrt{\overline{f^2} - 2\overline{f\bar f} + \bar f^2}$

$$= \sqrt{\overline{f^2}-\bar f^2}$$

Bsp harm. Oszi., $x(t)=A\cos(\omega t)$, $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $\omega^2=\frac{\kappa}{m}$ $\left(\left(m\ddot x \stackrel{!}{=} -\kappa x\right)\right)$

Periode $\qquad = -\partial_x \frac{\kappa}{2}x^2$

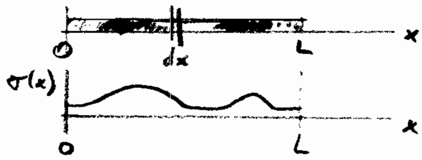
$$\bar x = \frac1T\int_0^T dt\, A\cos(\omega t) = 0$$

mittl. kin. E $\leadsto \bar T = \frac1T\int_0^T dt\, \frac m2 \left(A\omega \underbrace{\sin(\omega t)\big)^2}_{\to \frac12} = \frac m4 \omega^2 A^2$

mittl. pot. E $\leadsto \bar V = \frac1T \int_0^T dt\, \frac\kappa2 \left(A\cos(\omega t)\right)^2 = \frac\kappa4 A^2 = \bar T$

$$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac2\kappa \bar V} = \frac{1}{\sqrt2}A$$

$\sigma(x)$ Massendichte



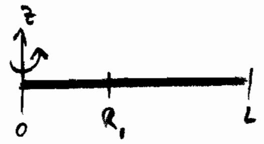
$$\sigma(x) := \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}} = \frac{dm \text{ bei } x}{dx}$$

$M=\sum_a m_a \longrightarrow M=\int_0^L dx\,\sigma(x)$ Ges.-Masse

$R_1 = \frac1M\sum_a m_a x_a \longrightarrow R_1 = \frac1M\int_0^L dx\,\sigma(x)\,x$ Schwerpkt

Erinnerung (§4): Drehimpuls $\vec L = \vec r\times\vec p = \vec r\times m(\vec\omega\times\vec r) \equiv I\vec\omega$ — winkelgeschw. — Trägheitstensor

starrer Körper, $I = \begin{pmatrix} I_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot& I_{33}\end{pmatrix}$, z.B. $I_{33} = \sum_a m_a(x_a^2+y_a^2)$



$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\omega \end{pmatrix}$$

$$I_{33} = \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2) \longrightarrow I_{33} = \int_0^L dx\, \sigma(x)\, x^2$$

Achse durch Ursprung

$$= \int_0^L dx\, \sigma(x) \left[(x-R_1)^2 + 2R_1(x-R_1) + R_1^2 \right]$$

$$= I_{33}^S + 0 + M R_1^2$$ "Satz v. Steiner"

↖ Achse durch Schwerpkt.

Superposition

Grav. Pot. eines Stabes mit $\sigma(x)$

Punktmassen M_a bei $\vec{r}_a$ ziehen m bei $\vec{r}$ an:

$$V(\vec{r}) = \sum_a \left(- \frac{\gamma m M_a}{\sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2}} \right)$$

dünner Stab auf x-Achse: $y_a = 0$, $z_a = 0$

$$\longrightarrow V(\vec{r}) = -\gamma m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}}$$

⇝ Integral sammelt hier die infinitesimalen Fernwirkungen räuml. verteilter Ursachen auf. (($\int dx'$ OK, da $\sigma(x') = 0$ außerhalb $(0,L)$))

1D Newton, $K(t)$

$$\boxed{\dot{v} = \frac{1}{m} K(t), \quad v(t_0) = v_0}$$

(A) • Integral sinnvoll, wenn
- keine Stammfkt. von $K(t)$ zu finden ist
- $K(t)$ grafisch gegeben ist
- man noch allgemein bleiben will.

$$\int_{t_0}^t dt'\, \partial_{t'} v(t') = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt'\, K(t')$$

$$v(t) - v(t_0) =$$

(B) • Integral nicht sinnvoll, wenn $K(t)$ aufleitbar ist:

$$\boxed{\dot{v} = \alpha \omega \cos(\omega t), \quad v(t_0) = v_0}$$

$$= \alpha\, \partial_t \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow v = \alpha \sin(\omega t) + C_1$$

$$v_0 = \alpha \sin(\omega t_0) + C_1 \Rightarrow C_1 ;$$

1D Newton, $K(x)$ (evtl. unlösbar)

$$m\ddot{x} = K(x) = -\partial_x V(x) \qquad \| \cdot \dot{x}$$

$$\partial_t\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right) = -\partial_t V(x(t))$$

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 = E - V(x)$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \qquad \text{((immerhin eine Ableitung weniger!))}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{E-V(x)}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}} \qquad (*)$$

(B): $\partial_t [\,?\,] = C \pm \sqrt{\frac{2}{m}}\, t$, $C = \ldots$, nach x auflösen

(($[\,?\,]$ ist Stammfkt. v. $\frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$ bzgl. x))

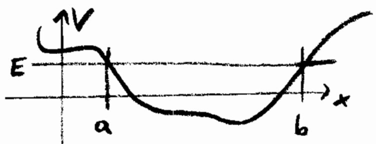
(A): ((finde $[\,?\,]$ nicht, oder will $V(x)$ nicht spezifizieren:))

Strategie: $(*)\cdot dt$ ($\dot{x}\,dt = dx$) und $\int$ darüber [§7: "Trennung der Variablen"]

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E-V(x')}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\int_{t_0}^{t} dt' = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,(t-t_0)$$

$$t = t_0 \pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx\, \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Periode T ?



$$T = 2\int_a^b dx\, \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Arbeit (1D) $:=$ Kraft · Weg

$=$ Σ (dWeg) · Kraft

$=$ pos., wenn Weg in Richtung Kraft

$=$ dem System zugeführte Energie (Arbeit am System)

$A =$ $\int_a^b dx\, K(x) = -\int_a^b dx\, \partial_x V(x)$

$=$ $V(a) - V(b)$

6.3. Integrations-"Methoden"

(($\hat{=}$ Umformungs-Möglichkeiten zur Int.-Chance-Erhöhung))

Man erkenne, daß es Sinn macht, den Integranden $f(x)$ zu lesen ...

... als Partialbruch

$$f = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \partial_x \, \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big]$$

... als $u'v$ (partielle Integration)

$$f = u'v = \partial_x (uv) - uv'$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx \; u'v = [uv]_a^b - \int_a^b dx \; uv'$$

Bsp: $I = \int_0^1 dx \; \underbrace{2x}_{u'} \; \underbrace{\ln(x)}_{v} = \underbrace{\left[x^2 \ln(x)\right]_0^1}_{\overset{!}{=}0} - \int_0^1 dx \; x = -\frac{1}{2} + 0$

$u = x^2 \quad v' = \frac{1}{x}$

wenn keine Randterme, dann: $\partial_x \to -\overleftarrow{\partial_x}$:

$$\overset{!}{=} \int_0^1 dx \; \ln(x) \, \partial_x x^2 = -\int_0^1 dx \; x^2 \, \partial_x \ln(x)$$

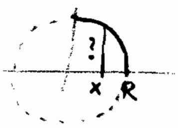
$$= -\int_0^1 dx \; x = -\frac{1}{2} \quad ✓$$

... als $f(x(t))$ (Substitution)

$x = x(t)$ sei monoton in (a, b), $\Rightarrow t = t(x)$

$$\int_a^b dx \; f(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \; \frac{dx}{dt} \; f(x(t))$$

Bsp 1: Kreis (R) - Fläche



$$F_{(R)} = 4 \int_0^R dx \; \sqrt{R^2 - x^2}$$

setze $x = R \sin(\varphi)$ ((t heißt jetzt φ))

$\Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R\cos(\varphi)$

$x_{unten} = 0 = x(\varphi = 0)$

$x_{oben} = R = x(\varphi = \frac{\pi}{2})$

$$\overset{!}{=} 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \; R\cos(\varphi) \; R\sqrt{1 - \sin^2(\varphi)} = 4R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \; \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\to \frac{1}{2}} = \pi R^2$$

((besser? aus $U = 2\pi R$:  $\rightarrow$ 

, $F_{(R)} = R \cdot \frac{1}{2} 2\pi R = \pi R^2$))

Bsp 2

$$I = \int_0^1 dx\ 2x\ \ln(x)$$

setze $t = \ln(x) \Rightarrow x = e^t,\ \dot{x} = e^t$

$x_u = 0$ bei $t = -\infty$, $x_o = 1$ bei $t = 0$

$$= \int_{-\infty}^{0} dt\ e^t\, 2 e^t\, t \qquad \text{((nun } \lambda\text{-Trick mit } \lambda = -1 \text{))}$$

$$= -2 \int_{\infty}^{0} dt\ e^{-2t}(-t) = -2 \int_0^{\infty} dt\ t\, e^{-2t} \qquad ((t \to \tfrac{t}{2}))$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dt\ \underbrace{t}_{v}\,\underbrace{e^{-t}}_{u'} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dt\ t\,(-\partial_t) e^{-t} = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} dt\ e^{-t} = -\frac{1}{2} \quad (\text{s.}\downarrow)$$

Bsp 3 (("uneigentliche" Integrale sind eigentlich eigentliche))

$$\int_0^{\infty} dx\ \underbrace{e^{-x}}_{=t,\ x = -\ln(t)} = \int_1^0 dt \left(-\frac{1}{t}\right) t = \int_0^1 dt = 1$$

... als ∂_α von ... (Differentiation nach Parameter)

$$\int_0^{\infty} dx\ x^n e^{-x} = \Big[(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int_0^{\infty} dx\ e^{-\alpha x}}_{= 1/\alpha} \Big]_{\alpha=1} = \left[\frac{n!}{\alpha^{n+1}} \right]_{\alpha=1} = n!$$

$$\left(\left((-\partial_\alpha)\frac{1}{\alpha} = +\frac{1}{\alpha^2},\quad (-\partial_\alpha)\frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^3},\ \dots \right)\right)$$

... als Parameter-abhängig (vgl. Übung, Aufgabe 42)

$$\partial_7 = -\beta\partial_\beta \ln\left(\int_0^{\infty} dx\ \frac{x}{e^{\beta x}+1} \right) = -\beta\partial_\beta \ln\left(\frac{1}{\beta^2} \int_0^{\infty} dx\ \frac{x}{e^{x}+1} \right)$$

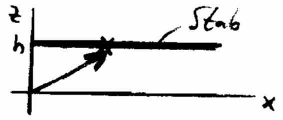
$$= -\beta\partial_\beta \left[-2\ln\beta + \ln\left(\int \dots\right) \right] = 2$$

6.4. Kurven- u.a. Integrale

Strategie: alle auf gewöhnliche Int. zurückführen.

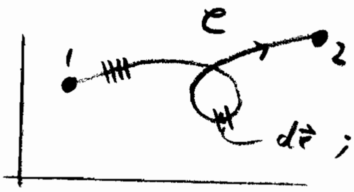
Integral = Summe, also

$$\int_a^b dx\, \vec{F}(x) = \left(\int_a^b dx\, f_1(x),\ \int_a^b dx\, f_2(x),\ \dots \right)$$

Bsp: 

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int_0^L dx\, \sigma(x)\,(x,0,h) = (R_1, 0, h)$$

↳ Schwerpkt.

Kurvenintegral 

$d\vec{r}$; $ds = |d\vec{r}|$

"C gegeben" $\equiv$ $\vec{r}(t)$, t_1, t_2.

↳ Raumkurve ($\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$, ggf t_1 aus $\vec{r}_1$-Angabe)

Bsp für Gebrauch von Kurvenint.:

Länge von C $= \int_C ds = \int_1^2 ds$

$M = \int_1^2 ds\ \sigma(\vec{r})$ Draht-Gesamtmasse

$M\vec{R} = \int_1^2 ds\ \sigma(\vec{r})\,\vec{r}$ Draht-Schwerpkt

$V(\vec{r}) = -\gamma m \int_1^2 ds'\, \sigma(\vec{r}\,')\, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ Draht-Gravi-Pot.

$A = \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{K}$ Arbeit entlang Weg C (auch wenn $\vec{K}$ kein V hat)

Ausrechnen von Kurvenint.:

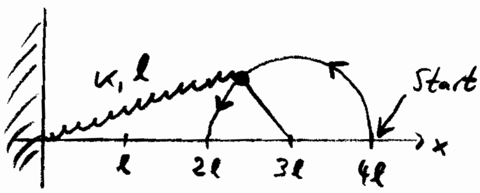
$d\vec{r} = dt \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$, bzw. $ds = dt \cdot |\dot{\vec{r}}|$

z.B. $A = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \dot{\vec{r}} \cdot \vec{K}(\vec{r}(t))$

folgendes "Rezept" nützlich:

„$\int_C$ – Fahrplan"	am Bsp Kreisumfang
1. Größe, d.h. $\int_C$-Art	$U = \int_{Kreis} ds$
2. spezif. C	$\vec r(t) = R(\cos(t), \sin(t), 0)$
3. t_1, t_2	$t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi$
4. $\dot{\vec r} =: \vec v$, ggf v bilden t-Integral	$\vec v = R(-s, c, 0)$ $U = \int_0^{2\pi} dt \; R$
5. $\vec r(t)$ in Integrand einsetzen	– entfällt –
6. ggf. Skalarprod. ausführen	– entfällt –
7. gew. Int. auswerten	$U = R \cdot 2\pi$

Bsp: Mausefalle



Arbeit A als Kurvenintegral!
(Fahrplan-Illustration)

((vorweg: es muß $A = V_{Start} - V_{Ende}$ herauskommen

$$= \frac{\kappa}{2}(4l-l)^2 - \frac{\kappa}{2}(2l-l)^2 = \frac{\kappa}{2} l^2 (9-1) = 4\kappa l^2$$))

1. $A = \int_C d\vec r \cdot \vec K(\vec r)$, $\quad \vec K(\vec r) = \kappa \left(\underset{\vec e_{m\to Haken}}{\frac{-\vec r}{r}}\right)(r-l)$

2. C: $\vec r(t) = l(3+\cos(t), \sin(t))$

3. $t_1 = 0, \quad t_2 = \pi$

4. $\dot{\vec r} = \vec v = l(-s, c)$

$$A = \int_0^\pi dt \; l(-s,c) \cdot \kappa(-\vec r)\left(1 - \frac{l}{r}\right)$$

5. $r = |\vec r| = l\sqrt{9+6c+c^2+s^2} = l\sqrt{10+6c}$

$$A = l^2 \kappa \int_0^\pi dt \; \underbrace{(-s,c)\cdot(-3-c,-s)}_{= 3s + \cancel{sc} - \cancel{sc}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10+6c}}\right)$$

6.

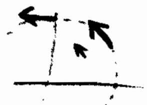
7. $$= 3l^2\kappa \int_0^\pi dt \left(\sin(t) - \frac{\sin(t)}{\sqrt{10+6\cos(t)}}\right)$$

$$= \partial_t\left[-\cos(t) + \frac{1}{3}\sqrt{10+6\cos(t)}\right]$$

$$= 3l^2\kappa\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{4} + 1 - \frac{1}{3}\sqrt{16}\right) = 4l^2\kappa$$ ✓

5 $\int_C$ - Arten: $\int_C ds \begin{Bmatrix}\phi \\ \vec{A}\end{Bmatrix}$ ist $\begin{matrix}\text{Skalar} \\ \text{Vektor}\end{matrix}$, $\int_C d\vec{r} \begin{Bmatrix}\phi \\ \cdot\vec{A} \\ \times\vec{A}\end{Bmatrix}$ ist $\begin{matrix}\text{V.} \\ \text{S.} \\ \text{V.}\end{matrix}$

manchmal geometrisch auswertbar, z.B.:

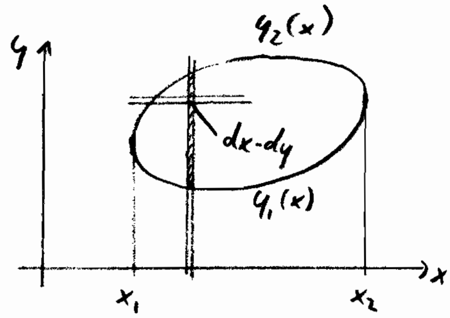
$\vec{E} = \alpha\,\vec{e}_3 \times \vec{r}$, 

$\oint_{Kreis(R)} d\vec{r} \times \vec{E} = \vec{0}$ (weil $d\vec{r}$ stets $\parallel \vec{E}$)

$\oint_{Kr.(R)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 2\pi R \cdot \alpha R$ (weil $d\vec{r} \cdot \vec{E} = ds \cdot |\vec{E}| = ds \cdot \alpha R$)

oft hilft, C geschickt zu legen!

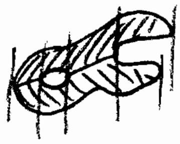
ebenes Flächenint.

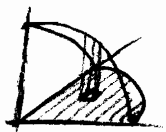


$\phi(x,y) = \frac{\text{etwas}}{\text{Fläche}}$ ← Masse, Heu, ...

gegeben, dann

$$\left.\begin{matrix}\text{gesamtes} \\ \text{etwas}\end{matrix}\right\} = \int_F d^2r \cdot \phi(x,y) \underset{\text{ausrechnen}}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, \phi(x,y)}_{\text{Streifen-etwas}}$$

((Randkurve? Immer? ))

Bsp Kugelvolumen 

$x_1 = 0$, $x_2 = R$, $y_1(x) \equiv 0$, $y_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, ϕ = Höhe $= \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$

$$V_R = 8 \cdot \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad , \quad y \to \sqrt{R^2-x^2}\, y$$

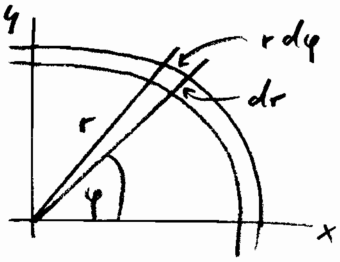
$$= 8 \cdot \int_0^R dx\, (R^2 - x^2) \underbrace{\int_0^1 dy \sqrt{1-y^2}}_{= \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^2(\varphi) = \pi/4} \qquad y = \sin(\varphi),\ \frac{dy}{d\varphi} = \cos(\varphi)$$

$x \to R x$

$$= 2\pi R^3 \underbrace{\int_0^1 dx\, (1 - x^2)}_{= 1 - [\frac{1}{3} - 0] = \frac{2}{3}} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

im letzten Bsp: kugeliges kartesisch ?!
brauchen "runde" Koordinaten!

Polarkoordinaten

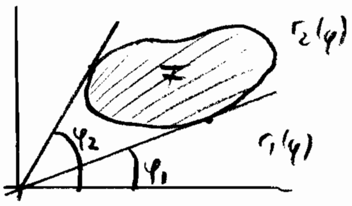


$$d^2r = dr\, r\, d\varphi$$

$$x = r\cos(\varphi)\ ,\quad y = r\sin(\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + n\cdot\pi$$

$$\left(\left(\varphi \text{ in } (0,2\pi):\quad n = 1 + \theta(x) - 2\,\theta(x)\,\theta(y)\right)\right)$$



$$\int_F d^2r\,\phi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr\, r\ \phi(r,\varphi)$$

Test an Kreisfläche ($\stackrel{?}{=} \pi R^2$)

$\phi = 1$,  , $4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, r = 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}R^2$ ✓✓

Bsp Kugelvolumen

$$V_R = 8 \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\varphi}_{\pi/2} \int_0^R dr\, r\sqrt{R^2-r^2} \qquad r \to Rr$$

$$= 4\pi R^3 \int_0^1 dr\, \underbrace{r\sqrt{1-r^2}}_{= \partial_r\left[\left(-\frac{1}{3}\right)(1-r^2)^{3/2}\right]}$$

$$= 4\pi R^3\left(0+\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}R^3 \quad ✓✓$$

Bsp Galaxie mit $\frac{\text{Masse}}{\text{Fläche}} =: \rho = \rho_0 e^{-r^2/a^2}$, $M = ?$

$$M = \int_{\substack{\text{ganze}\\ \text{Ebene}}} d^2r\,\rho = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr\, r\, e^{-r^2/a^2}\ ,\quad r \to ar$$

$$= \rho_0\, 2\pi\, a^2 \int_0^\infty dr\, \underbrace{r\, e^{-r^2}}_{= \partial_r\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]}$$

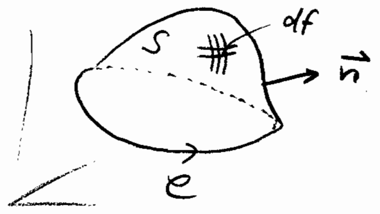
$$= \rho_0\, 2\pi\, a^2\left(0+\frac{1}{2}\right) = \rho_0\,\pi\, a^2$$

Nebenprodukt des letzten Bsp: zu $\rho_0 = 1$, $a = 1$ ist

$$\pi = \int d^2r\, e^{-r^2} = \int dx \int dy\, e^{-x^2-y^2} = \left(\int dx\, e^{-x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \int dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\,, \qquad \int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

<u>Oberflächen-Int.</u>



gegeben: S, Rand $\mathcal{C}$ mit Richtung,

$$\frac{\text{etwas}}{\text{Fläche}} = \phi(\vec r)\,,\ \vec A(\vec r)\,.$$

Sei $\vec n$ ein Normalenvektor (Einheits-Vektor nach "außen" [rechte-Hand-Regel])

$\Rightarrow$ kann $df \cdot \vec n =: d\vec f$ bilden.

also: es gibt 5 Arten $\int_S$: $\int_S df \cdot \begin{cases}\phi \\ \vec A\end{cases}$, $\int_S d\vec f \begin{cases}\phi \\ \cdot \vec A \\ \times \vec A\end{cases}$

<u>Anwendungs-Bsp</u>: Strom durch Fläche $S =: I_S$

zu gegebener Ladungs-Stromdichte $\vec j$

$$\text{Strom} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}\,, \qquad \vec j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}\,\vec e$$

nur $j_{\perp S} = j_{\parallel \vec n}$ erzeugt Strom $df \cdot j_{\parallel \vec n} = df\,(\vec j \cdot \vec n) = d\vec f \cdot \vec j$

$$\Rightarrow I_S = \int_S d\vec f \cdot \vec j(\vec r)$$

Ausrechnen?! S gegeben $\Rightarrow$ finde $\vec r(s,t)$

kann $\partial_s \vec r =: \vec r\,'$ und $\partial_t \vec r =: \dot{\vec r}$ bilden

brauche Flächenelement $d\vec f$:

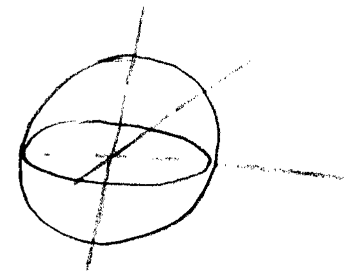
$$d\vec r_1 = ds\ \vec r\,'\,, \qquad d\vec r_2 = dt\ \dot{\vec r}$$

$$d\vec f = d\vec r_1 \times d\vec r_2 = ds\,dt\ \vec r\,' \times \dot{\vec r}$$

$$I_S = \int_{F \text{ in } s\text{-}t\text{-Ebene}} ds\,dt\ \underbrace{(\vec r\,' \times \dot{\vec r}) \cdot \vec j}_{\text{von } s,t \text{ abhängig}}$$

$\Rightarrow$ habe auf <u>ebenes</u> Flächen-Int zurückgeführt.

Bsp Kugeloberfläche



$$S_R = 2\cdot \int_{S_{oben}} df$$

s,t : Polarkoord. ρ,φ in xy-Ebene ,

$$\vec r(\rho,\varphi) = \left(\rho\cos(\varphi),\ \rho\sin(\varphi),\ \sqrt{R^2-\rho^2}\right)$$

$$S_R = 2\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\ |\vec r' \times \dot{\vec r}| \cdot \{\phi = 1\}$$

$$\vec r' = \partial_\rho \vec r = \left(c, s, -\frac{\rho}{\sqrt{\ }}\right) \quad , \quad \dot{\vec r} = \partial_\varphi \vec r = (-\rho s, \rho c, 0)$$

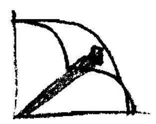
$$\vec r'\times\dot{\vec r} = \left(\frac{\rho^2 c}{\sqrt{\ }}, \frac{\rho^2 s}{\sqrt{\ }}, \rho\right)$$

$$|\vec r'\times \dot{\vec r}| = \sqrt{\frac{\rho^4}{\sqrt{\ }^2} + \rho^2\frac{\sqrt{\ }^2}{\sqrt{\ }^2}} = \frac{\rho R}{\sqrt{\ }}$$

$$= 2\ 2\pi\ R \int_0^R d\rho\ \underline{\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}} = \partial_\rho\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]$$

$$= 4\pi R^2$$

Test Kugelvolumen V_R

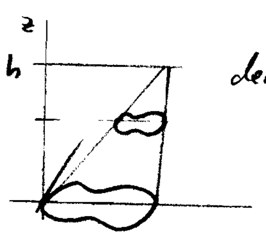


Könnte V_R aus infin. Pyramiden ($\sim df$, $\sim$ Höhe R) aufbauen.

Es muß $V_R = \int$ Pyr.-Vol. $= \int df\cdot R\cdot\lambda = \lambda R S_R$ gelten.

$\lambda = ?$

Beh.: Jede Pyramide hat Vol. $= \frac13 \cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe

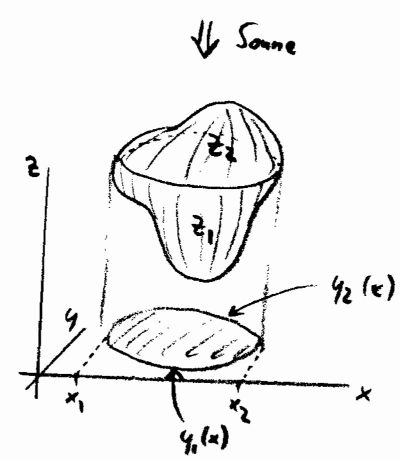


denn: $$V_{F,h} = \int_0^h dz\cdot F\cdot\left(\frac{h-z}{h}\right)^2 = \frac{F}{h^2}\left[h^2z - hz^2 + \frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac13 F h \Rightarrow \lambda = \frac13$$

$$\frac{4\pi}{3}R^3 \stackrel{?}{=} \frac13\cdot R\cdot 4\pi R^2 \quad ✓✓$$

((Welt nicht nur aus Drähten, Häuten usw — auch aus Kartoffeln!))

Volumenintegral



gegeben: $\dfrac{\text{etwas}}{\text{Volumen}} =: \phi(x,y,z)$

und V, d.h. $x_1, x_2, y_1(x), y_2(x)$

und $z_1(x,y), z_2(x,y)$.

$$dx\,dy\,dz =: d^3r$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Gesamtes}\\ \text{etwas in } V\end{array}\right\} = \int_V d^3r\,\phi$$

Auswertung kartesisch

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\ \phi(x,y,z)$$

↳ Würfel in Säule bei x,y

↳ Σ Säulen in Scheibe bei x

↳ Σ Scheibchen

wenn $\rho(\vec r) = \dfrac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}}$, dann (gesamte Ladung in V) $= Q_V = \int_V d^3r\,\rho(\vec r)$

wenn $\rho = \dfrac{\text{Masse}}{\text{Vol.}}$, dann

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vol.}\\ M\\ M\vec R\\ I_{jk}\end{array}\right\} = \int_V d^3r \left\{\begin{array}{l}1\\ \rho\\ \rho\cdot\vec r\\ \rho\,(r^2\delta_{jk} - x_j x_k)\end{array}\right.$$

$$V(\vec r) = -\gamma m \int_V d^3r'\ \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

4 Fragen

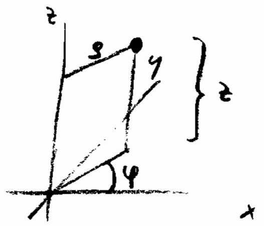
1) $V_R \overset{?}{=} \int_V d^3r \cdot 1 = 8\cdot \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz$, ÜA.

2) obige Formeln ohne V-Index schreiben, d.h. $\int$ über ganzen Raum? ÜA, $\rho := 0$ außerhalb V.

3) Wie folgen $\int_{\text{Draht}}$, $\int_{\text{Haut}}$ aus $\int_V$? $\Rightarrow$ s. §6.6

4) 3D "runde" Koord.? $\Rightarrow$ jetzt, §6.5.

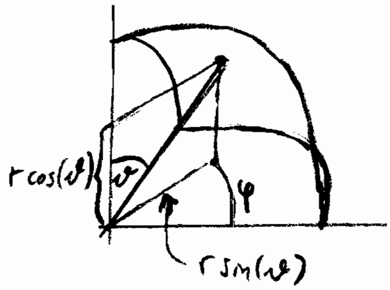
6.5. Krummlinige Koord.



Zylinderkoord.: ρ, φ, z

$$x = \rho \cos(\varphi)$$
$$y = \rho \sin(\varphi)$$
$$z = z$$

$$d^3r = \underbrace{d\rho\, \rho\, d\varphi\, dz}_{\text{Länge}^3 \checkmark} = \text{"Balkon-Vol. am Wasserturm"}$$



Kugelkoord.: r, ϑ, φ

$$x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$$
$$y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$$
$$z = r \cos(\vartheta)$$

$$d^3r = \text{Höhe} \cdot (\text{NS-Breite}) \cdot (\text{W-O Breite})$$
$$= dr \cdot r\, d\vartheta \cdot r \sin(\vartheta)\, d\varphi$$
$$= dr\, r^2 \underbrace{d\vartheta \sin(\vartheta)\, d\varphi}_{\equiv\, d\Omega \,=\, \text{Haus-Grundfläche}/r^2}$$

$\longrightarrow$ "Haus-Grundfläche"

Bsp

$$V_R = \int_{\text{Kugel}(R)} d^3r \cdot 1$$
$$= \int_0^R dr\, r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta)}_{2} \underbrace{\int_{(2\pi)} d\varphi}_{2\pi}$$

$$\left(\Rightarrow \int d\Omega = 4\pi = \text{der max. Raumwinkel} = S_R/R^2 \Rightarrow S_R = 4\pi R^2 \checkmark\checkmark \right)$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3 \checkmark\checkmark$$

Gravi-Pot. bei kugelförmiger Massenverteilung $\rho(r)$:

ohne Pfeil

$$V(\vec r) = -\gamma m \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

Nenner $= \sqrt{r^2+r'^2-2\vec r \vec r'}$

$$= -\gamma m \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \int_{(2\pi)} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin(\vartheta') \frac{1}{\sqrt{\quad}}$$

während $\vec r'$-Integration ist $\vec r$ fest.

$\Rightarrow$ orientiere $\vec r'$-Kugelkoord. um $\vec r$ als "z-Achse"

$\Rightarrow$ $\vec r \vec r' = r r' \cos(\vartheta')$

$$= -\gamma m \, 2\pi \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \int_0^\pi d\vartheta' \frac{\sin(\vartheta')}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\vartheta')}}$$

generell:

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) f(\cos(\vartheta)) = \int_{-1}^1 du \, f(-u) = \int_{-1}^1 du \, f(u)$$

Subst. $u = -\cos(\vartheta)$

$du = d\vartheta \sin(\vartheta)$

$$= -\gamma m \, 2\pi \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \int_{-1}^1 du \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2+2rr'u}} = \partial_u \frac{1}{rr'} \sqrt{\quad} \right)$$

$$= -\gamma m \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty dr' r' \rho(r') \left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2} \right]$$

Jacobi-Determinante

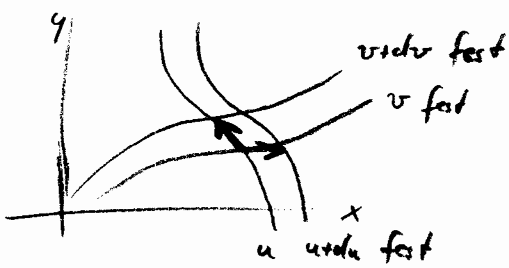
allg. krumme Koord., hier 2D ((denke an Polarkoord.)):

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned}\right\} \vec r(u,v)$$

$d^2r = |d\vec r_1 \times d\vec r_2|$

mit $d\vec r_1 = du \, \partial_u \vec r$

und $d\vec r_2 = dv \, \partial_v \vec r$.



$$d^2r = du\,dv \,\left|(\partial_u x, \partial_u y, 0) \times (\partial_v x, \partial_v y, 0)\right|$$
$$= du\,dv \,\left|\left(0, 0, (\partial_u x)\partial_v y - (\partial_u y)\partial_v x\right)\right|$$
$$= du\,dv \,\Bigg|\underbrace{\begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix}}_{\text{Jacobi-Det.}}\Bigg| \qquad \left(\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} & d^2r = du\,dv\,|J| \\ & \text{mit} \quad J = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix} =: \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{aligned}}$$

Bsp Test mit Polarkoord: $u = r$, $v = \varphi$

$x = r\cos(\varphi)$
$y = r\sin(\varphi)$ $\qquad J = \begin{vmatrix} c & s \\ -rs & rc \end{vmatrix} = r$ ✓

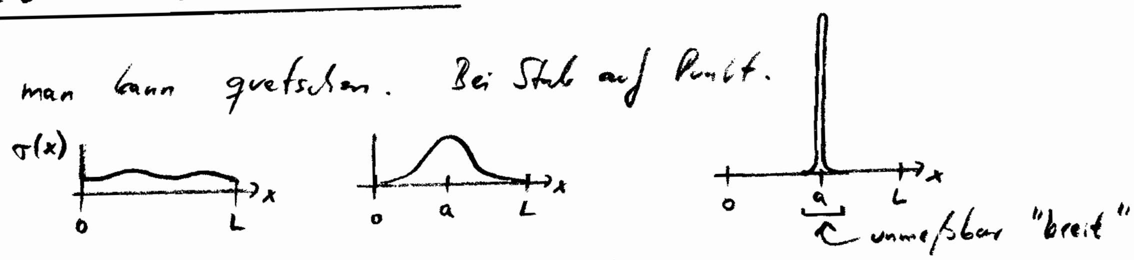
Bsp Test mit Kugelkoord: ...

... $\qquad J = \ldots = r^2 \sin(\vartheta)$ ✓

Durchatmen! bisher: anstrengend!
jetzt: einfach! und schön...

6.6. Delta-Funktion (der Physiker)

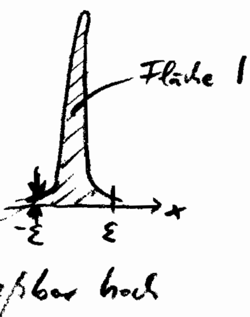
man kann quetschen. Bei Stab auf Punkt.



M bleibt konstant. $\quad \int_0^L dx\, \frac{\sigma(x)}{M} = 1 \quad \frac{\sigma(x)}{M} \rightarrow \delta(x-a)$

1. Def. $\boxed{\begin{aligned} & \delta(x) := \text{gerade unmeßbar eng} \\ & \text{bei } x=0 \text{ konzentrierte Fkt} \\ & \text{mit } \int dx\, \delta(x) = 1 \end{aligned}}$

"eng":



Bemerkung: "dünn, hoch, Fläche 1" genügt.

nicht $\varepsilon \to 0$ ausführen.

man gehe mit $\delta(x)$ um wie mit jeder normalen Fkt,

lediglich sieht man ihre Breite nicht mehr.

Mit normaler weicher Physiker-Fkt $f(x)$ folgt die

2. Def. $\boxed{\begin{array}{l}\text{("definierende Eigenschaft")} \\ \int dx\ \delta(x-a)\, f(x) = f(a)\end{array}}$

((denn: f wird in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ zu $f(a)$))

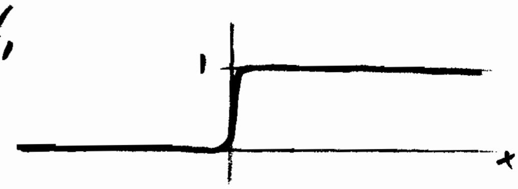
Bem.: Meistens steht δ unter einem Integral, oder wartet auf eins.

3. Def. $\boxed{\delta(x) := \partial_x \Theta(x)}$

wobei $\Theta(x)$ die Stufenfunktion ist,

also eine im ε-Bereich von

0 auf 1 ansteigende Fkt:



((denn: $\int_{-\infty}^{x} dx'\, \delta(x') =$  $= \Theta(x)$

∂_x auf beiden Seiten $\Rightarrow \delta(x) = \partial_x \Theta(x)$))

Definierende Eigenschaft von $\Theta(x)$:

$b>a$, $\int_{-\infty}^{b} dx\, f(x)\, \Theta(x-a) = \int_a^b dx\, f(x)$

Test via Part. Int. u' v

$u = F(x)$ $v' = \delta(x-a)$

$$F(b) - \int_{-\infty}^{b} dx\, F(x)\, \delta(x-a) =$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b dx\, \partial_x F(x)$$

"$\Theta(0) = ?$" — kranke Frage!

δ-Darstellungen

• $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$

denn: dünn ✓ hoch ✓ $\int rhs = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\int dx\, e^{-x^2/\varepsilon^2} \overset{x\to\varepsilon x}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dx\, e^{-x^2} = 1$ ✓

(("$\delta(x) = \alpha\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$, $\alpha = ?$" $\Rightarrow$ $1 \overset{!}{=} \int dx\, \alpha\, e^{\cdots} = \ldots \Rightarrow \alpha$))

• $\Theta(x) = \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$, 

$\delta(x) = \partial_x \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$

• $\delta(x) = \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  , $1 \overset{?}{=} \frac{1}{\pi}\int dx\, \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int dx\, \frac{\sin(x)}{x}}_{=\pi,\ \text{später}\ldots}$ ((s.u.))

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, \Big(\overbrace{\cos(kx)}^{\partial_k \frac{\sin(kx)}{x}} + i\sin(kx)\Big)$ ← weil ungerade , Euler

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, e^{ikx}$

• $\Theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$\delta(x) = \partial_x(\ \times\ ) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon - ix} + \frac{1}{\varepsilon + ix}\right)$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk\, \Big(\underbrace{e^{ikx-\varepsilon k}}_{\text{denn } \overset{!}{=}\ \partial_k \frac{e^{ikx-\varepsilon k}}{ix-\varepsilon}} + \text{c.c.}\Big)$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk\, e^{-\varepsilon k}\, 2\cos(kx)$, $e^{-\varepsilon k} \to e^{-\varepsilon|k|}$

$= \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{-\varepsilon|k|}\left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right)$ ← weil ungerade

$= \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\, e^{-\varepsilon|k|}$ ⟵ Fourier! (später)

((in Lit.: konvergenzerzeugendes $e^{-\varepsilon|k|}$ oft weggelassen.)) $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}$

(($J(k,\varepsilon) \equiv \int dx\, \frac{\sin(kx)}{x}\, e^{-\varepsilon|x|}$, $\varepsilon \to 0^+$, $\partial_k J = \int dx\, \cos(kx)\, e^{-\varepsilon|x|} = 2\int_0^\infty dx\, \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)e^{-\varepsilon x}$

$= \frac{2\varepsilon}{k^2+\varepsilon^2}$

$\Rightarrow J(k,\varepsilon) = \text{Const}_k + 2\arctan\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$; J ungerade in k $\Rightarrow$ Const $= 0$

$\Rightarrow J(1, 0^+) = \pi$ $\Rightarrow$ $\int dx\, \frac{\sin(x)}{x} = \pi$))

- allg. Darst. $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

  aus gegebenem $g(x)$, mit $F = \int dx\, g(x)$

δ-Formeln

- Dimension: $[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$
- $\delta(-x) = \delta(x)$ ((denn: $\int dx\, \delta(-x) f(x) = \int dx\, \delta(x) f(-x) = f(0)$))
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ ((denn: $\delta(ax) \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(ax)^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\pi}\frac{(\varepsilon/|a|)}{x^2+(\varepsilon/|a|)^2} = \frac{1}{|a|}\delta(x)$))
- etc, siehe $\boxed{\text{Sonderblatt}}$
- 2D: $\int d^2r\, \delta^{(2)}(\vec r-\vec a)\, \phi(\vec r) = \phi(\vec a)$

  3D: $\int d^3r\, \delta^{(3)}(\vec r-\vec a)\, \phi(\vec r) = \phi(\vec a)$

  $\Rightarrow$ kann kartesisch denken und $\delta(\vec r) = \begin{cases} \text{2D: } \delta(x)\delta(y) \\ \text{3D: } \delta(x)\delta(y)\delta(z) \end{cases}$

  schreiben, muß aber nicht ($\to$ Ü 56 f-h)

Bem.: $\delta(x-a)$ ist die Kontinuums-Version des Kronecker-δ:

$$\sum_{k=1}^{3} \delta_{jk} f_k = f_j \quad \Leftrightarrow \quad \int dx\, \delta(a-x) f(x) = f(a)$$

Physik mit δ

Kann mit δ Häute, Drähte, Punkte in 3D formulieren.

Dichte enthaltende Formeln (z.B. $V = -g m \int d^3r' \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$)

bleiben gültig, nur $\rho(\vec r)$ $\left(= \frac{\text{Masse od. Ladung}}{\text{Vol.}}\right)$ spezialisiert sich:

<u>z.B.</u> • hom. Scheibe (M,R): $\rho(\vec r) = A\, \delta(z)\, \Theta(R-\rho)$

$$M \overset{!}{=} \int d^3r\, \rho(\vec r) = A \int_0^R d\rho\, \rho \underbrace{\int d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int dz\, \delta(z)}_{1} = A\frac{R^2}{2}2\pi \Rightarrow A = \frac{M}{\pi R^2}$$

• hom. Stab (M,L): $\rho(\vec r) = B\, \delta(y)\, \delta(z)\, \Theta(x(L-x))$

$$M \overset{!}{=} B \int_0^L dx \int dy \int dz\, \delta(y)\delta(z) = BL \Rightarrow B = \frac{M}{L}$$

- Punktmasse (M) am Ursprung

$$\rho(\vec r) = C\,\delta(\vec r)\,, \quad M \overset{!}{=} \int d^3r\, C\,\delta(\vec r) = C \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec r) = M\,\delta(\vec r)$$

- Punktladung (m, q) mit $\vec r_0(t)$

((jetzt $\rho = \frac{\text{Ladung}}{\text{Vol.}}$, $\vec j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}}$))

$$\rho(\vec r,t) \equiv q\,\delta(\vec r - \vec r_0(t))$$

$$\vec j(\vec r,t) = \dot{\vec r}_0(t)\, q\, \delta(\vec r - \vec r_0(t))$$

((⇒ Teilchenstrahlen ; DESY ; CERN !))

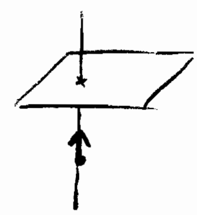
<u>Bsp</u> Q und I zu $\vec r_0(t) = vt\,\vec e_3 = (0,0,vt)$

$$Q = \int d^3r\, \rho(\vec r) = q\int d^3r\, \delta(\vec r - \vec r_0(t)) = q$$

$$\underset{xy\text{-Ebene}}{I(t)} = \int_{z=0} d\vec f\cdot\vec j = \int dx\int dy\; \vec e_3\cdot v\vec e_3\, q\,\delta(\vec r - vt\vec e_3)\Big|_{z=0}$$

$$= vq\int dx\int dy\; \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(0-vt)$$

$$= vq\,\delta(vt) = q\,\delta(t)$$



- Hohlkugel (M, R) um Ursprung

$$\rho(\vec r) = \alpha\,\delta(r-R)\,, \quad M \overset{!}{=} \int d^3r\, \alpha\,\delta(r-R) = \alpha\, 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2\,\delta(r-R) = \alpha\, 4\pi R^2$$

$$\Rightarrow \rho(\vec r) = \frac{M}{4\pi R^2}\,\delta(r-R)$$

<u>Bsp</u> Gravitationspotential einer Hohlkugel (M, R) (vgl. Ü 55a)

((benutze $V(\vec r)$ für $\rho(r)$, Skript S. 71))

$$V(\vec r) = -\gamma m\,\frac{2\pi}{r}\int_0^\infty dr'\, r'\,\frac{M}{4\pi R^2}\,\delta(r'-R)\left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2}\right]$$

$$= -\gamma m\,\frac{M}{2Rr}\,\big[\,|r+R| - |r-R|\,\big] \qquad [\ldots] = \begin{cases} 2R & \text{für } r>R \text{ (außen)} \\ 2r & \text{für } r<R \text{ (innen)} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\gamma m M}{r} & \text{außen} \\ -\dfrac{\gamma m M}{R} & \text{innen} \end{cases}$$

((⇒ <u>innen</u> <u>keine</u> Kraft ! Hohlwelt ⇒ umsonst nach USA, nur abstoßen ; Realität ? Ladung Q auf Metallkugel sammelt sich auf Oberfläche !))

Zusatzmaterial zu EMTP II	15.05.2007

Definierende Eigenschaft der **Delta–Funktion**: $\int dx\, \delta(x-x_0)\, f(x) \;=\; f(x_0)$

δ–Darstellungen:

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{2\,\varepsilon} \quad \text{für} \quad -\varepsilon < x < \varepsilon \quad \text{und 0 sonst}$$

$$\delta(x) \;=\; \partial_x \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}} = -\partial_x \frac{1}{\mathrm{e}^{x/\varepsilon}+1}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad , \quad \delta(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon^2}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, \cos(kx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, \mathrm{e}^{ikx}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int dk\, \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon|k|} = \frac{1}{2\pi} \int dk\, \mathrm{e}^{ikx} \left(\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\right)$$

allgemein: $$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{mit} \quad F := \int dx\, g(x)$$

Stufenfunktion θ: $\partial_x \theta(x) = \delta(x)$, $\partial_x \Big(\theta(x)\text{–Darst.} \Big) \;=\; \delta(x)\text{–Darst.}$

$$\theta(x) = 1 - \theta(-x) \;\; , \;\; \mathrm{sign}\,(x) = \frac{x}{|x|} = 2\,\theta(x) - 1$$

δ–Formeln: $\delta(-x) = \delta(x)$, $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\Big(\delta(x-a)+\delta(x+a)\Big)$

allgemein: $\delta\big(f(x)\big) \;=\; \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\, \delta(x-x_n)$, x_n sind die Nullstellen von f

$\frac{1}{i} \int_0^\infty dk\, \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon k} = \frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$, $\mathcal{P}$ für *Principal value* (Hauptwert)

$$\int dx\, f(x)\, \delta'(x) = -f'(0) \quad , \quad -x\,\delta'(x) = \delta(x) \quad , \quad \int dx\, \delta(x-a)\, \delta(x-b) \;=\; \delta(a-b)$$

δ–Physik:

Punktladung q bei $\vec{r}_0(t)$: $\varrho(\vec{r},t) = q\,\delta\Big(\vec{r}-\vec{r}_0(t)\Big)$, $\vec{\jmath}\,(\vec{r},t) = \dot{\vec{r}}_0(t)\;\, q\,\delta\Big(\vec{r}-\vec{r}_0(t)\Big)$

Geladener Kreisring : $\varrho(\vec{r}\,) = \frac{Q}{2\pi R}\, \delta(\varrho - R)\, \delta(z)$

Geladene Metallkugel : $\varrho(\vec{r}\,) = \frac{Q}{4\pi R^2}\, \delta(r-R)$

Der Ortsoperator X (Wirkungsweise $x\cdot$) hat gemäß $x\,\delta(x-a) = a\,\delta(x-a)$ die kontinuierlich mit a numerierten Eigenfunktionen $\delta(x-a)$.

Sei L ein (auf x–Abh. wirkender) linearer Operator, und $L\,y(x) = f(x)$. Gesucht ist $y(x)$. Wenn man dieses Problem für eine „Punktquelle“, d.h. das Hilfsproblem $L\,G(x,a) = \delta(x-a)$ lösen kann und somit eine „Greensche Funktion“ $G(x,a)$ kennt, dann erhält man ein $y(x)$ durch Anwenden des Operators $\int da\; f(a)$ auf beiden Seiten des Hilfsproblems:

$$\begin{aligned} \int da\; f(a)\, L\, G(x,a) \;&=\; \int da\; f(a)\, \delta(x-a) \\ L \int da\; f(a)\, G(x,a) \;&=\; f(x) \qquad \curvearrowright \qquad y(x) = \int da\; f(a)\, G(x,a) \quad . \end{aligned}$$

((Metallbügel wie Holzbügel, denn:

Elektrostatik $\Rightarrow$ unbewegliche Pkt-Ladung Q übt auf Probeladung q die Kraft $\vec{K} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ aus.

(Kenne $\vec{K}$ aus Experiment; oder Maxwell-Gln.)

$\vec{K} \overset{?}{=} -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V) \Rightarrow V \equiv q\phi, \ \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

"Coulomb-Potential"))

7. Gewöhnliche DGLN

Rückblick auf WS, auf etwas höherem Niveau

WS - Lösungsmethoden: Ansatz, $u+a$, $v=\frac{1}{y}$, $e^{\mu t} w$, ..

jetzt: zuerst besser sprechen; dann 10 Fälle

7.1 Vokabeln, 3 Sätze

Bsp: Der getriebene, 1D harmonische Oszillator mit Reibung,

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - m\omega^2 x + m k(t)$$

folgt der Dgl. $y'' + \gamma y' + \omega^2 y = f(x)$.

Diese ist

- gewöhnlich ($\neq$ partiell: $(\partial_t - \partial_x)y = h(x,t)$),
- 2. Ordnung (max. $'$-Anzahl),
- linear (y, y', y'' hoch eins),
- inhomogen ($f \neq 0$),
- explizit ($\neq F(y'', y', y, x) = 0$).

Die allg. Lsg. einer Dgl. n-ter Ordnung ist eine n-parametrige Schar von Lsn.

Bsp: $y'' + \omega^2 y = k_0$, d.h. $L_2 y = k_0$ mit $L_2 = \partial_x^2 + \omega^2$

hat $y_{allg.}(x) = \underbrace{\frac{k_0}{\omega^2}}_{\text{spezielle Lsg. der inhomogenen.}} + \underbrace{A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)}_{\text{allg. Lsg. der hom. Dgl.}}$

((Erinnerung: Fktn. lin. unabh. $\Leftrightarrow$ aus LK (Fktn.) = 0 folgt Koeffs. = 0))

Zur allg. lin. Dgl. n-ter Ordnung, d.h.

$$\boxed{L_n y(x) = f(x) \ , \ \text{mit } L_n = \partial_x^n + f_{n-1}(x)\,\partial_x^{n-1} + \ldots + f_0(x)}$$

gibt es 3 Sätze:

- $L_n y = 0$ hat genau n lin. unabh. Lsn: $y_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$
- •• Die allg. Lsg von $L_n y = 0$ ist $y_{hom} = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$
- ••• Die allg. Lsg von $L_n y = f$ ist $y_{allg} = y_{hom} + y_{sp}$,
  wobei y_{sp} <u>eine</u> spez. Lsg von $L_n y = f$ ist.

((Beweis-Ideen:

- • denke an Newton. kann bei $x = 0$ starten mit AB

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \ldots$$

$\Rightarrow$ es gibt also n Möglichkeiten (und nicht mehr; sonst LK)

- •• hat n und löst $L_n y = 0$
- •••

$$\begin{array}{l} L_n y_{allg} = f \\ \underline{L_n y_{sp} = f} \\ L_n(y_{allg} - y_{sp}) = 0 \end{array} \quad , \quad \text{d.h. } y_{allg.} - y_{sp.} = y_{hom.}$$

))

7.2 10 Fälle

"Repertoire", Wahrnehmungsraster; schon $F' = f$ gar fast nie!

(1) Potenzansatz $\quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

$\boxed{\text{hom, lin, } x\text{-} = \partial\text{-Potenz}}$

$y = x^\lambda$, $\quad \lambda(\lambda-1)x^2 x^{\lambda-2} - 2\lambda x x^{\lambda-1} + 2x^\lambda = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\quad \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$\Rightarrow y_{allg} = C_1 x + C_2 x^2$

(2) neue Variable (viele Möglichkeiten!)

setze $x = x(\tau)$

benutze $y(x) = y(x(\tau)) = u(\tau) = u(\tau(x))$

habe $y' = u'^{\tau} \cdot \tau'^{x}$ usw. (y'', ...)

erhalte Dgl. für $u(\tau)$

Bsp $\quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ (s.o.), $0 < x$

setze $x = e^\tau$; $y(x) = y(e^\tau) = u(\tau) = u(\ln(x))$,

$y' = u'^{\tau} \frac{1}{x} = u'^{\tau} e^{-\tau}$, $\quad y'' = u'' \frac{1}{x^2} - \frac{u'}{x^2} = u'' e^{-2\tau} - u' e^{-2\tau}$,

erhalte $\quad e^{2\tau}(u'' - u')e^{-2\tau} - 2e^\tau u' e^{-\tau} + 2u = 0$

$u'' - 3u' + 2u = 0 \quad (*)$

(3) e-Ansatz: bei $\boxed{\text{lin, hom, } \underline{\text{konst}} \text{ Koeff.}}$

Bsp $\quad (*)$ mit $u = e^{\omega t}$ gibt $\omega^2 - 3\omega + 2 = 0 \Rightarrow \omega = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$u_{allg} = C_1 e^\tau + C_2 e^{2\tau}$

Bsp $\quad (\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2)\, x(t) = 0$ (harm. Oszi. mit Reibung)

$x = e^{\omega t}$, $\quad \omega^2 + 2\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$, $\quad \omega = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ $\quad (\omega_0 < \gamma)$

$x_{allg}(t) = C_1 e^{-\gamma t - \Gamma t} + C_2 e^{-\gamma t + \Gamma t}$

$\gamma < \omega_0$: $\quad \omega = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\underline{\gamma = \omega_0}$: nur 1 Lsg ? falsch !

studiere $\omega_0 \to \gamma$: $\Gamma = \varepsilon$, dann $\varepsilon \to 0$

$$x_{allg}^{\gamma=\omega_0}(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{-\varepsilon t} + C_2 e^{\varepsilon t}\right) \quad , \quad e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$= e^{-\gamma t}\left(\underbrace{C_1 + C_2}_{} + \underbrace{(C_2 - C_1)\varepsilon}_{} t + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)$$
$$= e^{-\gamma t}\left(A + B\, t\right)$$

④ neue Fkt. (viele Möglichkeiten !)

Bsp allg. lin. inhom. Dgl. 1.O. $\boxed{y' + P(x)\, y = Q(x)}$

y_{hom}: $\frac{y'}{y} = \ln(y)'^{x} = -P(x)$

$$\ln(y) = -\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')$$

Setze $y = y_{hom} \cdot u(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')}\, u(x)$

$$\Rightarrow \cancel{-P e^{-} u} + e^{-} u' + \cancel{P e^{-} u} = Q$$

$$u' = Q e^{+} \quad , \quad u = \int_{x_1}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{+\int^{x'}\cdots} + C$$

$$y_{allg}(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')}\left(C + \int_{x_1}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{\int_{x_0}^{x'} dx''\, P(x'')}\right)$$

„P-Q-Formel".

3 Konstanten ?↯ Nein, nur 2: bei (x_0, x_1)-Änderung ändert sich C.

⑤ Variation der Konstanten

Bsp allg. lin. inhom. Dgl. 2.O. $\boxed{y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x)}$

wenn man eine Lsg $y_1(x)$ der hom. Dgl. kennt,
dann reduziert $y = y_1 \cdot u$ die Ordnung um 1.

$\ulcorner\ \partial_x^n f \cdot g = \left(\partial_x^{vorne} + \partial_x^{hinten}\right)^n f \cdot g\ \lrcorner$

$$\underline{y_1'' u} + 2 y_1' u' + y_1 u'' + \underline{a y_1' u} + a y_1 u' + \underline{b y_1 u} = f$$

$\underline{\quad}$ = 0 nach Voraussetzung haben also $y_1 u'' + (2y_1' + a y_1) u' = f$

setze $u' =: v$, $v' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + a\right) v = f/y_1$

ist l.O. $\Rightarrow$ nun P-Q-Formel!

⑥ Trennung der Variablen

((erstmals nicht-linear. Fall))

$\boxed{y'(x) = f(x)\, g(y)}$, alle y nach links

$$\underbrace{\frac{1}{g(y)}}_{=\partial_y H(y)} y'(x) = \underbrace{f(x)}_{=\partial_x F(x)}$$

Stammfktn suchen

$$\partial_x H(y(x)) = \partial_x F(x) \quad \Rightarrow \quad H(y) = F(x) + C$$

((zur Not: $y' = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{g} = dx \cdot f$, $\int_{y_0}^{y} dy' \frac{1}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} dx' f(x')$))

⑦ Reduktion(en) der Ordnung

ⓐ $\boxed{y'' = f(y, y')}$ Besonderheit: kein x

setze $y' = p(y)$: $y'' = p'^y y'^x = p'^y p$

$\Rightarrow$ $p'^y = \frac{1}{p} f(y, p)$ ist Dgl l.O. für $p(y)$

Bsp: $m\ddot{x} = -\partial_x V(x)$, kein t, setze $\dot{x} = v(x)$, Strich $= \partial_x$,

$m v v' = \left(\frac{m}{2} v^2\right)' = -V'(x)$, $\frac{m}{2} v^2(x) = E - V(x)$.

ⓑ $\boxed{y'' = f(y', x)}$ Besonderheit: kein y

setze $y' = u$, $u' = f(u, x)$ ist Dgl l.O.

ⓒ Landau-Trick : wenn $L = L_1 L_2$, d.h. $\boxed{L_1 L_2 y = f}$,

setze $u = L_2 y$, löse $L_1 u = f$ für u, danach $L_2 y = u$.

Bsp: $\ddot{x} + \omega^2 x = b(t)$

$$\underbrace{(\partial_t + i\omega)}_{L_1}\underbrace{\underbrace{(\partial_t - i\omega)}_{L_2} x}_{u} = b(t)$$

, löse $(\partial_t + i\omega) u = b(t)$ usw.

(8) Dgl. $\geq$ 2.O. $\underset{(\longleftarrow)}{\longrightarrow}$ Dgl-System 1.O.

((geht immer ; Computer froh über System))

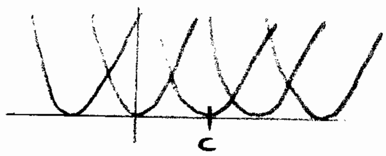
Bsp $\quad y'' = f(y', y, x)$

setze $y' = z \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z' = f(z, y, x) \\ y' = z \end{array} \right\}$

(9) singuläre Lsn (nur bei nichtlinearen Dgln)

Bsp $\quad y'^2 = 4y \;,\; y' = \pm 2\sqrt{y} \;,$ TdV: $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{y}}}\, y' = \pm 1 \qquad = \partial_y \sqrt{y}$

$\Rightarrow \sqrt{y}'^{*} = \pm 1 \;,\; \sqrt{y} = \pm x + C \;,\; y = (\pm x + C)^2 \;,\; y_{allg} = (x - C)^2$



Die Einhüllende $y \equiv 0$ löst die Dgl auch! — "Singuläre Lsg"

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{alle} \\ \text{Lsn} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{in der} \\ \text{allg. Lsg} \\ \text{enthaltene} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{eventuelle} \\ \text{singuläre} \\ \text{Lsn} \end{array} \right\}$$

(10) Greensche Funktion (!) (s. auch Sonderblatt)

Problem : $\quad L y(x) = f(x) \quad$, gesucht: $y(x)$ für $x \in \{\text{Bereich}\}$.

ersetze "Ursache" $f(x)$ durch "Punkt-Ursache" $\delta(x-a)$

Hilfsproblem: $\boxed{L\, G(x,a) = \delta(x-a)}$

Wenn Lsg $G(x,a)$ (die Greensche Fkt von L) bekannt,

dann $\quad \int_B da\, f(a)\; \overset{\text{wirkt}}{L}\, G(x,a) = \int_B da\, f(a)\, \delta(x-a)$

$$\underbrace{L \int_B da\, f(a)\, G(x,a)}_{= y(x)} = f(x)$$

$\Rightarrow$ ein G gibt ein y , d.h. y_{sp} in $y = y_{hom} + y_{sp}$

((haben Antwort y aus Punkt-Ursache – Antworten G zusammengesetzt.))

<u>Bsp</u> $\dot{v} = -g$ (freier Fall), $v(t) = ?$

$v_{hom} = C$, Bereich: $0 < t < T$, $L_1 = \partial_t$

Hilfsproblem: $\partial_t G(t,a) = \delta(t-a)$

aufleiten: $G(t,a) = \Theta(t-a) + A$

$$\Rightarrow v(t) = \int_0^T da\, \big(\Theta(t-a) + A\big)(-g)$$

$$= -g \int_0^t da \underbrace{- gAT}_{C} = -gt + C$$

<u>Bem.</u>: $G(t,a)$ hängt nur von $t-a$ ab

<u>allg.</u>: wenn L "translationsinvariant",

d.h. $[L f(x)]_{x \to x-a} = L f(x-a)$

(also z.B. $L = \partial_x, \partial_x^2, \partial_x + C$; <u>nicht</u> $x\partial_x$),

dann genügt es, $L\,G(x) = \delta(x)$ zu lösen,

und dann $G(x,a) = G(x-a)$ zu setzen.

<u>Bsp</u> $\dot{v} + \gamma v = k(t)$

⟪ hat via "P-Q-Formel" (4) $(P = \gamma,\ \int^t dt'\, P = \gamma t)$

die allg. Lsg. $v = e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t dt'\, k(t') e^{\gamma t'}\right)$ ⟫

jetzt via Green. $L = (\partial_t + \gamma)$ ist transl.-inv.

$\rightsquigarrow$ muß $(\partial_t + \gamma)\, G(t) = \delta(t)$ lösen.

z.B. Ans ("γ muß weg") $G(t) = u(t) e^{-\gamma t}$

$$\Rightarrow \quad u' e^{-\gamma t} - \gamma u e^{-\gamma t} + \gamma u e^{-\gamma t} = \delta(t)$$

$$u' = \delta(t) e^{\gamma t} = \delta(t) \cdot 1, \quad u = \text{const}_t + \Theta(t)$$

also $G(t) = (\text{const}_t + \Theta(t))\, e^{-\gamma t}$

und
$$v(t) = \int_0^T da\, k(a)\, \big(\text{const} + \Theta(t-a)\big)\, e^{-\gamma(t-a)}$$

$$= e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t da\, k(a) e^{\gamma a}\right) \checkmark\checkmark.$$

<u>Bem.</u>: • L mußte nur <u>linearer</u> Op. sein: es gibt viele L's.

• Punkt-Ursache in höheren Dim.: $\delta(\vec{r})$ bzw. $\delta(\vec{r})\,\delta(t)$.

((Bem. L transl.-inv. $\Leftrightarrow$ $[L f(x)]_{x \to x-a} = L f(x-a)$

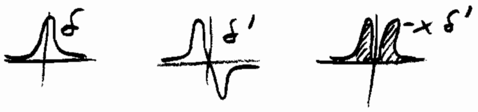
(Skript S. 44: Taylor) d.h. $e^{-a\partial_x} L f = L e^{-a\partial_x} f \quad \forall f$

d.h. $0 = L e^{-a\partial_x} - e^{-a\partial_x} L$

$\equiv [L, e^{-a\partial_x}]$

Kommutator
$[a,b] \equiv ab - ba$))

Bem. $-x\delta'(x) \overset{?!}{\equiv} \delta(x)$ (s. Sonderblatt) ($\to$ Ü 636)

denn:  $\Rightarrow$ beide Seiten hoch, schmal

Vorfaktor ok? $\int dx\, (\underbrace{-x}_{u}\, \underbrace{\delta'(x)}_{v'}) = -x\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int dx\, \delta(x) = 1$ ✓✓

8. Felder

bisher: gew. Dgln, z.B. Newton: nur ∂_t
⟨ rechte Seite: $\vec{K}(\vec{r},t)$

„Feld" := etwas $(\vec{r},t)$

kennen schon $T(\vec{r},t)$, $p(\vec{r},t)$, $V(\vec{r},t)$, $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$, $\vec{v}(\vec{r},t)$,
$\vec{K}(\vec{r},t)$, $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ $\to$ deren Bewgln ?

z.B. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}}$

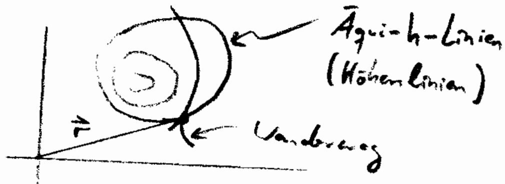
$\Rightarrow$ Maxwell-Gln. brauchen $\nabla\cdot$, $\nabla\times$, partielle Dgln

Das "etwas" muß sich verhalten bei Koord.-Drehung,
ist also Skalarfeld $\phi(\vec{r},t)$
Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$
(Tensorfeld $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{r},t)$)

8.1. Gradient und Nabla

wollen statische Felder $\left(\phi(\vec r), \vec A(\vec r)\right)$ in Nähe der Stelle $\vec r$ charakterisieren

z.B. Karte: Berg hat Höhe $h(x,y)$ über Meeresspiegel-Ebene



Steilheit? In Wegrichtung? Richtung des größten Anstiegs?

in 3D: gegeben $\phi(\vec r)$.

gehe ab $\vec r$ in Richtung $\vec e$. Erlebe $\phi(\vec r + s\vec e)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Steilheit}\\ \text{in } \vec e\text{-Richtung}\\ \text{bei } \vec r\end{array}\right\} = \text{Richtungsableitung}$$

$$= \left[\partial_s \phi(x+se_1,\, y+se_2,\, z+se_3)\right]_{s=0}$$

$$= e_1 \partial_x \phi + e_2 \partial_y \phi + e_3 \partial_z \phi$$

$$= \vec e \cdot (\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi)$$

$$= \vec e \cdot \vec\nabla \phi$$

Kann verschiedene $\vec e$ wählen.

Finde z.B. $\vec e \cdot \vec\nabla\phi = 0$, d.h. keinen Anstieg, d.h. $\vec e$ liegt in Äqui-h-Fläche $\Rightarrow$ $\vec\nabla\phi$ steht $\perp$ auf Äqui.

Finde z.B. $\vec e \cdot \vec\nabla\phi = \max$, d.h. $\vec\nabla\phi \sim \vec e$

$$\Rightarrow \vec\nabla\phi = \begin{pmatrix}\text{Einh.-Vektor}\\ \text{in Richtung}\\ \text{max. Zunahme}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{diese}\\ \text{Zunahme}\end{pmatrix}$$

$$= (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\,\phi = \operatorname{grad}\phi$$

mit $\boxed{\vec\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)}$ = „Nabla-Operator"

$\vec\nabla$ Skalarfeld heißt „Gradient"

(aber $\vec\nabla\cdot$, $\vec\nabla\times$ Vektorfeld heißt anders, s. später)

(kann $\vec\nabla$ oder ∇ schreiben ...)

$\vec{\nabla}$ ist Vektor

Erinn.: Kap. 4, $\vec{a}$ ist V. $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\,' = D\vec{a}$

$\rightsquigarrow$ Frage, ob $\boxed{\vec{\nabla}\,' = D\vec{\nabla}}$ Sinn macht

Testen diesen Operator-Identität: $(\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'})\,\phi(\vec{r} = D^T\vec{r}\,') \stackrel{?}{=} D\vec{\nabla}\phi$

hiervon die j-te Komp. ($x = x_1,\ y = x_2,\ z = x_3$) ist

$$(\nabla'\phi)_j = \partial_{x'_j}\phi\left(^{l\text{-te}}(D^T)_{lm}x'_m = D_{ml}x'_m\right) = (\partial_{x_l}\phi)\,D_{ml}\,\delta_{mj}$$

$$= D_{jl}\,\partial_{x_l}\phi = (D\vec{\nabla}\phi)_j$$

$\Rightarrow$ also ist $\vec{\nabla}'\phi = D\vec{\nabla}\phi \quad \forall\,\phi$ ∎

$\vec{\nabla}$ in Kugelkoord.

darf statt der $\vec{e}_j$ in $\vec{\nabla} = \vec{e}_1\partial_x + \vec{e}_2\partial_y + \vec{e}_3\partial_z$

andere orthonormale Basis verwenden, z.B.

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\,\partial_{\text{Weg n. oben}} + \vec{e}_\vartheta\,\partial_{\text{Weg n. Süden}} + \vec{e}_\varphi\,\partial_{\text{Weg n. Osten}}$$

$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = (Sc, Ss, C)$ $\qquad S \equiv \sin(\vartheta)$

$\vec{e}_\varphi = (-s, c, 0)$ $\qquad s \equiv \sin(\varphi)$

$\vec{e}_\vartheta = (Cc, Cs, -S)$

((s. Kap. 6; zu $\vec{e}_\varphi$:  , $\vec{e}_\varphi = \frac{(-y, x, 0)}{|\cdot|} = \frac{(-Ss, Sc, 0)}{S}$

zu $\vec{e}_\vartheta$: $\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta$))

Weg nach Süden: $r\vartheta$; Weg nach Osten: $(rS)\cdot\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} = \vec{e}_r\,\partial_r + \vec{e}_\vartheta\,\frac{1}{r}\,\partial_\vartheta + \vec{e}_\varphi\,\frac{1}{rS}\,\partial_\varphi}$$

Dimension: $[\vec{\nabla}] = \frac{1}{\text{Länge}} = [\text{rhs}]$ ✓

Gradient in Physik

kennen (s. Newton, Kap. 3) Kraft auf gel. T. (q)

$$\vec K = q\vec E + q\,\vec v \times \vec B$$

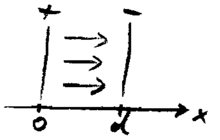
zu $\vec B = 0$: $\vec K = q\vec E \overset{?!}{=} -\vec\nabla V$

"el.-statisches Potential"

$$\Rightarrow \vec E = -\vec\nabla\phi \quad \text{mit } \phi = \frac{V}{q}$$

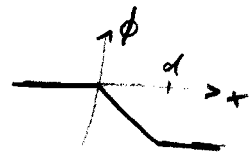
ϕ- Unterschied =: Spannung U

Bsp Plattenkondensator



$$\vec E_{innen} = (E,0,0) \overset{?!}{=} -\vec\nabla\phi$$

$$\Rightarrow \phi = -Ex \ (+C)$$



Spannung $U = 0 - (-Ed) = Ed$

Bsp ruhende Punktladung (Q) hat Coulomb-Potential $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

$$\Rightarrow \vec E = -\vec\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r}{r^3}$$

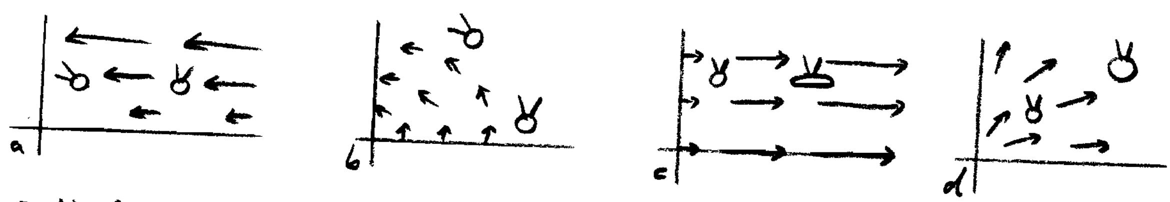
8.2 Rotation

gegeben: Vektorfeld $\vec A(\vec r, t)$

lokale Charakteristika? $\vec\nabla\cdot\vec A \rightsquigarrow$ § 8.3

$\vec\nabla\times\vec A \rightsquigarrow$ hier

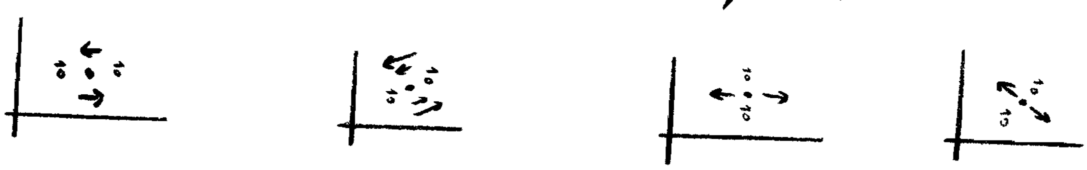
((Realisierung: setze $\vec A(\vec r,t) = \alpha\,\vec v(\vec r,t)$, lasse Wasser mit $\vec v$ strömen))



" ♉ ≙ treibender Wasserfloh "

$\vec A$ ist charakterisiert durch Rotation (a,b), Dehnung (c,d) "Divergenz"

Floh fährt mit, hat bei $\vec r$ also $v(\vec r)$, sieht



$$d\vec v = \vec v(\vec r + d\vec r) - v(\vec r) \qquad \left(\overset{?}{=} \text{Matrix}\cdot d\vec r\right)$$

$$= \left(v_1(x+dx, y+dy, z+dz) - v_1(\vec r), \dots, \dots\right)$$

$$= \left(v_1'^x\, dx + v_1'^y\, dy + v_1'^z\, dz, \dots, \dots\right)$$

$$= \begin{pmatrix} v_1'^x & v_1'^y & v_1'^z \\ v_2'^x & v_2'^y & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \equiv V\, d\vec r$$

aufspalten in sy/asy: $V = V_S + V_A = \frac{1}{2}(V+V^T) + \frac{1}{2}(V-V^T)$

$$\Rightarrow d\vec v = d\vec v_S + d\vec v_A = V_S\, d\vec r + V_A\, d\vec r$$

dreht Fluß <u>nicht</u> (dehnt ihn nur),

denn $D\, d\vec v_S = \underline{D V_S D^T} D\, d\vec r$

$$d\vec v_S' = V_S'\, d\vec r', \qquad V_S' = \begin{pmatrix} V_{S_{11}}' & 0 & 0 \\ 0 & V_{S_{22}}' & 0 \\ 0 & 0 & V_{S_{33}}' \end{pmatrix}$$

((kann symm. Matrix immer diagonalisieren, s. Kap. 4.3 : HT))

$$d\vec v_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_1'^y - v_2'^x}{2} & \frac{v_1'^z - v_3'^x}{2} \\ & 0 & \frac{v_2'^z - v_3'^y}{2} \\ \text{anti} & & 0 \end{pmatrix} d\vec r \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ & 0 & -\omega_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} d\vec r = \vec\omega \times d\vec r$$

also $2\vec\omega = \left(v_3'^y - v_2'^z,\ v_1'^z - v_3'^x,\ v_2'^x - v_1'^y\right) = \vec\nabla \times \vec v$

<u>Def</u> $\operatorname{rot}\vec A = \alpha \operatorname{rot}\vec v := \alpha\, 2\vec\omega$

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec A = \vec\nabla \times \vec A = \text{Wirbelfeld von } \vec A}$$

<u>Bsp</u> wirbelfreie zirkulare Strömung

$\vec\nabla \times \vec v = \vec 0$. $\vec v(\vec r) = ?$ partielle Dgl. lösen!

"zirkular": $\vec v = \vec e_\varphi \cdot v(\rho) = (-y, x, 0)\underbrace{\frac{v(\rho)}{\rho}}_{= f(\rho)}$

$= (-yf, xf, 0)$

$$\vec\nabla \times \vec v = \left(0, 0, (xf)'^x + (yf)'^y\right) \overset{!}{=} \vec 0$$

$$2f(\rho) + \rho f'(\rho) = 0$$

lösen: Trick ①, $f = \rho^\lambda$, $2 + \lambda = 0$, $f_{allg} = \frac{c}{\rho^2}$

$\Rightarrow \vec v = \frac{c}{\rho}\vec e_\varphi$ ((z.B. Bohrinsel: ))

(ist wirbelfrei, ausgenommen z-Achse)

8.3. Divergenz

(Vorsicht: Doppelbedeutung)

gegeben $\vec{A}(\vec{r},t)$.

realisiere als $\vec{A} = \alpha\vec{v}$, $\vec{v}$ von Gas

dehnbarer Fluß strömt mit

<u>Def</u> $\operatorname{div} \vec{A} := \alpha \frac{\dot{Vol}}{Vol}$ (relative Volumenänderung)

Berechne Vol.-Änderung: $d\vec{v} = d\vec{v}_S + d\vec{v}_A$ (s.o., S.88)

$d\vec{v}_A$: antisym; dreht nur, dehnt nicht

$$d\vec{v}_S{}' = V_S{}' d\vec{r}{}' = \left(V'_{S_{11}} dx', V'_{S_{22}} dy', V'_{S_{33}} dz' \right)$$

lege Quader (dx', dy', dz') an Stelle $\vec{r}{}'$

rechte Wand bewegt sich um $V'_{S_{11}} dx'$ schneller als linke, usw.

$$\Rightarrow \dot{Vol} = (dy'dz')\, V'_{S_{11}} dx' + (dx'dz')\, V'_{S_{22}} dy' + (dx'dy')\, V'_{S_{33}} dz'$$

$$= Vol. \cdot \left(V'_{S_{11}} + V'_{S_{22}} + V'_{S_{33}} \right) = Vol. \cdot Sp(V_S{}') = Vol. \cdot Sp(V_S)$$

Spur inv. bei Dreh.

$$= Vol. \left(\partial_x v_1, \partial_y v_2, \partial_z v_3 \right)$$

$$= Vol. \; \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{Quellenfeld von } \vec{A}}$$

<u>Bsp</u> quellenfreie kugelsymm.-radiale Strömung

$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. $\vec{j}(\vec{r}) = ?$

"kugelsy.": $\vec{j} = \vec{e}_r \cdot j(r) = \vec{r}\, \underbrace{\frac{j(r)}{r}}_{= f(r)}$

$= (xf, yf, zf)$

$\partial_x r = \frac{x}{r}$ usw.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = (xf)'^x + (yf)'^y + (zf)'^z = 3f(r) + r f'(r) \stackrel{!}{=} 0$$

lösen: wieder Potenzansatz ①, $f = r^\lambda$, $3 + \lambda = 0$, $f_{allg} = \frac{C}{r^3}$

$\Rightarrow \vec{j} = \frac{C}{r^2} \vec{e}_r$ ((z.B. Coulomb-Feld (s.o.) $\vec{E} \sim -\operatorname{grad} \frac{Q}{r} = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$))

(ist quellenfrei, ausgenommen Ursprung)

Navier-Stokes Gln

Strömungsgeschw. $\vec{u}(\vec{r},t)$, Druck $p(\vec{r},t)$

in inkompressiblen Flüssigkeiten / Gasen

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{u}} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} &= \nu \underbrace{\Delta}_{\vec{\nabla}^2} \vec{u} - \vec{\nabla} p \\ \vec{\nabla}\vec{u} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

4 Gln

4 Variablen: $\vec{u}, p$

$\Rightarrow$ Existenzbeweis von (glatten, physikalischen) Lsn

gibt $\boxed{\text{1 Million Dollar}}$!

$\rightsquigarrow$ www.claymath.org , "Millennium Problems"

System von nichtlinearen, partiellen Dgln 2. Ordnung

((nicht einmal der Fall $\nu = 0$, die „Euler Gleichungen", sind gelöst))

Kontinuitätsglg (Conti)

(die wichtigste (?) partielle Dgl. [leider 4 Unbekannte]

Dichte $\rho = \frac{\text{etwas}}{\text{Volumen}}$ ("etwas" = Ladung q, Energie E, Teilchenzahl N, ...)

$$\dot{\rho} = \partial_t \rho(\vec{r}, t) = \partial_t \rho(\vec{r}, t) - (\partial_t \vec{r} \cdot \vec{\nabla})\rho = \partial_t \frac{N}{Vol.} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho$$

in "mitströmenden Volumen" bleibt Teilchenzahl N const, nur Vol. ändert sich:

$$= -\frac{N}{Vol.} \frac{\dot{Vol.}}{Vol.} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho \overset{(s.S.89)}{=} -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho$$

$$= -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \equiv -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0} \qquad \text{(Conti)}$$

Bem:
- gilt, wenn "etwas" (pro Volumen gedacht) erhalten ist.
- lokale Glg: gilt an jedem Pkt $\vec{r}$ der Welt und seit 13.7 ± 0.2 Mrd. Jahren (WMAP)
- überlebt Relativitätstheorie, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie
- 1 Gl. für 4 Unbekannte $\Rightarrow$ braucht noch andere Gln (z.B. Maxwell: Conti folgt)

((relativistisch: $\partial_{ct}\, c\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$, $[\vec{\nabla}] = [\partial_{ct}] = \frac{1}{\text{Länge}}$

$$\partial_{ct}\, c\rho - (-\vec{\nabla})\vec{j} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{ct} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}}_{\equiv \partial} \bullet \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = 0, \qquad \partial_\mu j^\mu = 0$$

$\bullet$ Vierer-Skalarprodukt ($a \bullet b = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b}$)))

8.4 $\vec\nabla$ mal $\vec\nabla$

bisher: Feld-Charakterisierung linear in $\vec\nabla$

jetzt: quadratisch

Räumliche Krümmungen gibt es

in 1D eine: $\partial_x^2 f(x)$ $\{= \Delta_1 f\}$

in 2D zwei: $\nabla\cdot(\nabla\phi)$ $\{= \Delta_2 f\}$

$\nabla(\nabla\cdot\vec A) = \text{grad div } \vec A$

in 3D drei ?! – denn zwei der folgenden fünf sind Null

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\phi \arrow[r] & \vec\nabla\phi \arrow[r] \arrow[dr] & \vec\nabla\times(\vec\nabla\phi) & (\text{Null}) \\
 & & \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\phi) & = \Delta\phi \\
 & \vec\nabla\times\vec A \arrow[r] \arrow[dr] & \vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) & = \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \Delta\vec A \\
\vec A \arrow[ur] \arrow[dr] & & \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A) & (\text{Null}) \\
 & \vec\nabla\cdot\vec A \arrow[r] & \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) &
\end{tikzcd}$$

- $\vec\nabla\times(\vec\nabla\phi) = \text{rot grad } \phi = \vec 0$,

  denn 1. Komp. $= \partial_y\partial_z\phi - \partial_z\partial_y\phi$ etc

- $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\phi) \equiv \Delta\phi$, mit $\boxed{\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \vec\nabla^2}$

  Laplace-Operator

- $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) = \text{rot rot } \vec A$

  "bac-cab" $= \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \Delta\vec A$ $\quad ((\Delta\vec A = (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3)))$

- $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A) = \text{div rot } \vec A = 0$,

  denn $\partial_x(\partial_y A_3 - \dots) + \partial_y(\dots - \partial_x A_3)$ etc

- $\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) = \text{grad div } \vec A$

Die Nullen:

Ein Feld $(\vec K, \vec E)$ ist als grad ϕ darstellbar $\xrightarrow{\text{rot}(\text{grad}\,\phi) = \vec 0}$ es hat keine Wirbel

$\longleftarrow ? \longrightarrow$ (s.u., Theorem 1)

Ein Feld $(\vec B)$ ist als rot $\vec A$ darstellbar $\xrightarrow{\text{div}(\text{rot}\,\vec A) = 0}$ es hat keine Quellen

$\longleftarrow ? \longrightarrow$ (s.u., Theorem 2)

Laplace

Bsp

ϕ	x	x^2	x^2+y^2	x^2-y^2	$\frac{1}{r}$
$\Delta\phi$	0	2	4	0	0 ? ⚡, denn

$$\Delta \frac{1}{r} = \partial_x\left(-\frac{x}{r^3}\right) + \partial_y\left(-\frac{y}{r^3}\right) + \partial_z\left(-\frac{z}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \left(x \cdot 3\,\frac{x}{r^5} + \dots + \dots\right) = 0 \quad \text{für } \underline{\underline{r>0}} \;(!)$$

$\leadsto \forall r$: s.u.

Δ in Kugelkoord.

$$\Delta = \vec\nabla\cdot\vec\nabla = \left(\vec e_r \partial_r + \vec e_\vartheta \frac{1}{r}\partial_\vartheta + \vec e_\varphi \frac{1}{rS}\partial_\varphi\right)\cdot\left(\vec e_r\partial_r + \vec e_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\frac{1}{rS}\partial_\varphi\right)$$

9 Terme. z.B.

$((\vec e_{r,\vartheta,\varphi}$: s. S. 86$))$

$$= \vec e_\varphi \frac{1}{rS}\left(\partial_\varphi \vec e_r\right)\partial_r + \vec e_\varphi \frac{1}{rS}\,\vec e_r\,\partial_\varphi\partial_r$$

$$\partial_\varphi \vec e_r = \partial_\varphi\left(Sc, Ss, C\right) = \left(-Ss, Sc, 0\right) = S\vec e_\varphi$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r + 0$$

$(($

	$\vec e_r$	$\vec e_\vartheta$	$\vec e_\varphi$
∂_r	0	0	0
∂_ϑ	$\vec e_\vartheta$	$C\vec e_\varphi$	0
∂_φ	$S\vec e_\varphi$	$-\vec e_r$	$(-S\vec e_r - C\vec e_\vartheta)$

$))$

$$\boxed{\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta^2 + \frac{C}{r^2 S}\partial_\vartheta + \frac{1}{r^2S^2}\partial_\varphi^2}\,, \quad S = \sin(\vartheta),\; C = \cos(\vartheta)$$

$$\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r = \Delta_r = \left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)\partial_r = \frac{1}{r}\left(r\partial_r + 2\right)\partial_r = \frac{1}{r}\left(\partial_r r + 1\right)\partial_r = \frac{1}{r}\partial_r\left(\underbrace{r\partial_r + 1}_{=\partial_r r}\right)$$

$\partial_r r = 1 + r\partial_r$

$$\boxed{\Delta_r = \frac{1}{r}\partial_r^2 r}$$

Green von Δ (behandle das "⚡" oben genauer)

s.o.: $\Delta\frac{1}{r}$ war "krank" bei $r=0$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{r}$-Spitze einbetten / abrunden

z.B. $\frac{1}{r} \to \left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}\right.$ (s. Schulz-Buch P8), $\frac{1}{r}\left(1-e^{-r/\varepsilon}\right)$ (s. Ü 70a), … $\}$

hier: $\frac{1}{r} \to \frac{1}{r}\,\Theta(r-\varepsilon)$

betrachte $\Delta \frac{1}{r}\Theta(r-\varepsilon) = \frac{1}{r}\partial_r^2 \Theta(r-\varepsilon) = \frac{1}{r}\delta'(r-\varepsilon)$

rhs ist in ε- Bereich lokalisiert, und hat

$$\begin{aligned}\int d^3r\, \frac{1}{r}\delta'(r-\varepsilon) &= 4\pi \int_0^\infty dr\, r\,\delta'(r-\varepsilon) \\ &= 4\pi\left[r\,\delta(r-\varepsilon)\right]_0^\infty - 4\pi\int_0^\infty dr\, \delta(r-\varepsilon) \\ &= -4\pi \quad , \quad \text{ist also } \delta\text{-Fkt}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \frac{1}{r}\Theta(r-\varepsilon) = -4\pi\,\delta(\vec r)$$

$$\overset{\varepsilon\to 0^+}{\Rightarrow} \quad \boxed{\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta(\vec r)}$$

8.5 3 Theoreme (der Vektoranalysis)

$\mathcal{G}$:= einfach zusammenhängendes Gebiet

d.h.  , aber nicht 

I	Sei $\vec E$ ein in $\mathcal{G}$ wirbelfreies Feld, d.h. $\operatorname{rot}\vec E = \vec 0$	$\Rightarrow$	$\vec E$ hat in $\mathcal{G}$ ein Potential, d.h. $\vec E = -\operatorname{grad}\phi$

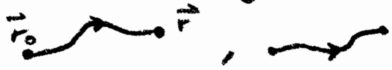
Beweis:

- OBdA nahe Ursprung, $\vec E = E(\vec o) + S\vec r + A\vec r + \mathcal{O}(\vec r^{\,2})$ (S: symm. Matrix, A: antisy. Matrix)
  - $\operatorname{rot}\vec E = \vec o \Rightarrow A \overset{!}{=} 0$

    ((denn $A\vec r = \vec\omega\times\vec r$, s. S. 88; keine Rotation $\hat= \vec\omega = 0$))
  - $\vec E = \vec E(\vec o) + S\vec r + \ldots$ hat $\phi = -\vec E(\vec o)\,\vec r - \frac{1}{2}\vec r S \vec r + \ldots$

    ((denn $(\vec E)_i = -\partial_i\phi = -\partial_i\left[-E_k(0)r_k - \frac{1}{2}r_k S_{kl} r_l + \ldots\right] = E_i(0) + S_{il}r_l \ldots$
- im ganzen $\mathcal{G}$: $\phi = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} d\vec r\,'\cdot \vec E(\vec r\,')$

  ((denn $-\partial_x\phi = \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{\vec r_0}^{\vec r+\varepsilon\vec e_1}\cdots - \int_{\vec r_0}^{\vec r}\cdots\right] = \frac{1}{\varepsilon}\int_{(x,y,z)}^{(x+\varepsilon,y,z)} d\vec r\,'\cdot\vec E(\vec r\,') = \frac{1}{\varepsilon}\vec E\cdot\vec e_1\varepsilon = E_1$))
  - ϕ unabhängig vom Weg ?!

    d.h.  geben gleiches ϕ ?!

    $\overset{?!}{=} 0$, wg. "Stokes"-Satz, Kap. 9

$\boxed{2}$ Sei $\vec{B}$ ein in $\mathcal{G}$ quellenfreies Feld, d.h. $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ $\Longrightarrow$ $\vec{B}$ hat in $\mathcal{G}$ ein Vektorpotential, d.h. $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$

Beweis:

- lokal: $\vec{B} = \vec{B}(\vec{0}) + S\vec{r} + \underbrace{A\vec{r}}_{\vec{\omega}\times\vec{r}} + \mathcal{O}(\vec{r}^{\,2})$

- $\operatorname{div}\vec{B} = \partial_i\left[B_i(0) + S_{ij}r_j + A_{ij}r_j\right] = S_{ii} + \cancel{A_{ii}}^{\,0} = Sp(S) \overset{!}{=} 0$

- $\vec{B}$ hat $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}(0)\times\vec{r} - \frac{1}{3}\vec{r}\times S\vec{r} - \frac{1}{3}\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

((denn $\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{2}\vec{B}(0)\times\vec{r}\right) \overset{\text{bekannt}}{=} \frac{1}{2}\vec{B}(0)\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) - \frac{1}{2}(\vec{B}(0)\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = \frac{1}{2}[3-1]\,\vec{B}(0)$

und $\vec{\nabla}\times\left(-\frac{1}{3}\vec{r}\times S\vec{r}\right) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{3}S\vec{r}\times\vec{r}\right) \underset{\text{Ü 66 b}}{=} \frac{1}{3}\Big(2S\vec{r} - \vec{r}\,\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot S\vec{r})}_{=0,\text{ s.o.}} + r\partial_r S\vec{r}\Big)$

$= S\vec{r}$, denn $r\partial_r S\vec{r} = S\,\underbrace{r\partial_r r}_{=1}\,\vec{e}_r = S\vec{r}$ ← nur winkelabhängig))

- global: $\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{2}\vec{r}\vec{\nabla}}}\,\vec{B}(\vec{r})$ ← als Reihe gedacht: $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i$

((→ s. S. 99))

Bem.: $\vec{A}$ nicht eindeutig festgelegt:

$\left.\begin{array}{l}\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}_I\\ \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}_{II}\end{array}\right\}$ $\vec{0} = \vec{\nabla}\times\underbrace{(\vec{A}_I - \vec{A}_{II})}$ kann ein Gradient sein! (s. S. 92: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$)

also $\vec{A}_I = \vec{A}_{II} + \vec{\nabla}\chi(\vec{r})$ möglich.

$\vec{B}$ merkt von dieser "Umeichung" nichts.

$\boxed{3}$ Unter den Lösungen $\vec{A}(\vec{r})$ des Problems $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{A} = Q(\vec{r})\\ \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\omega}(\vec{r})\end{array}\right\}$ mit ganz im Endlichen liegenden gegebenen Quellen $Q, \vec{\omega}$ gibt es nur ein von $Q, \vec{\omega}$ verursachtes Feld $\vec{A}$. Es fällt mind. $\sim 1/r^2$ ab.

- "gibt es": setze $\vec{A} = \vec{E} + \vec{B}$ mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = Q$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$; $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\omega}$

kenne $\vec{E} = -\vec{\nabla}\int d^3r'\,\frac{Q(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\int d^3r'\,\frac{\vec{\omega}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

Test: $\vec\nabla\times\vec B = \vec\nabla\times\left(\vec\nabla\times\int_{\dots}\right) \overset{\text{bac-cab}}{\downarrow =} \vec\nabla\left(\vec\nabla\cdot\int_{\dots}\right) - \Delta\int_{\dots} =: \vec\nabla ① + ②$

$$② = -\int d^3r'\,\frac{\vec w(\vec r')}{4\pi}\,\underbrace{\boxed{\Delta\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}}_{= -4\pi\,\delta(\vec r-\vec r')} = \vec w(\vec r)$$

$$① = \vec\nabla\cdot\int_{\dots} = \int d^3r'\,\frac{\vec w(\vec r')}{4\pi}\cdot\underbrace{\boxed{\vec\nabla\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}}_{= -\vec\nabla'\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}$$

$$\int dx'\,w_1(\vec r')\,(-\partial_{x'})\,\frac{1}{|\ |} = \int dx'\,\frac{1}{|\ |}\,\partial_{x'}w_1 \qquad \text{(part. Int.)}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{1}{|\ |}\,\underbrace{\boxed{\vec\nabla'\cdot\vec w(\vec r')}}_{= \vec\nabla'\cdot(\vec\nabla'\times\vec B(\vec r')) = 0} \qquad \text{((s. S. 92: div rot } \vec A = 0))$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \vec\nabla\times\vec B = \vec w$ ✓✓ ((und $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$ ✓✓ wg. div rot $\vec A = 0$))

• "nur ein": gäbe es zwei $\vec A$, müßte die Differenz $\vec C = \vec A_I - \vec A_{II}$ die Gln $\left\{\begin{matrix}\vec\nabla\cdot\vec C = 0\\ \vec\nabla\times\vec C = \vec 0\end{matrix}\right\}$ erfüllen

(vgl. ⑧: System 1. Ordng → weniger Gln. 2. Ordng)

per $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec C) = \vec 0 \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec\nabla\underbrace{(\vec\nabla\cdot\vec C)}_{\overset{!}{=}0 \text{ nach Voraussetzung}} - \Delta\vec C$

$$\Rightarrow \Delta C_1 \overset{!}{=} 0,\quad \Delta C_2 \overset{!}{=} 0,\quad \Delta C_3 \overset{!}{=} 0$$

es gilt aber:

> Weil eine Lsg ϕ von $\Delta\phi = 0$ nirgends max. oder min. werden kann, liegen die betragsmäßig größten Werte am Rand.

((denn: hätte ϕ Max $\Rightarrow (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\,\phi$ neg, nicht 0))

$\Rightarrow$ da am "Rand" des $\mathbb{R}^3$ $\vec A \to \vec 0$ (nach Vorr. in $\boxed{B} \sim \frac{1}{r^2}$), so auch jede Differenz $\vec C$, also $\vec C \equiv \vec 0$ überall ∎

9. Integralsätze

((Kap. 8 war lokale Analyse, Steigungen und Krümmungen. Auch Conti (und Maxwell) gelten lokal, in Umgebung jedes Punktes der Welt. Hier: einige globale Gleichungen, die manchmal nützlich sind))

9.1 Gauß und Stokes

(0.) $\int_a^b dx\, \partial_x F(x) = F(b) - F(a)$

(1.) $\int_1^2 d\vec{r} \cdot \mathrm{grad}\,\phi = \phi(2) - \phi(1)$

((denn: $\mathrm{lhs} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{\nabla}\phi}_{\stackrel{!}{=} \partial_t \phi(\vec{r}(t))} = \phi(\vec{r}(t_2)) - \phi(\vec{r}(t_1))$))

(2.) Gauß: $\boxed{\int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\vec{E} = \oint_S d\vec{f} \cdot \vec{E}}$

ein raumfestes Volumen ggf. mehrfach zus.h.

die Oberfläche von V ggf. mehrere Teile ($\oint$ weil geschlossen)

Beweis: physikalisch, via Conti. $\dot{\varrho} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$ ("etwas" = Ladung = erhalten)

"was rausging, ist nicht mehr drin"

$$I_S \stackrel{!}{=} -\partial_t Q_V$$

$$\int_S d\vec{f} \cdot \vec{j} \stackrel{!}{=} -\partial_t \int_V d^3r\, \varrho = \int_V d^3r\, (-\dot{\varrho}) \stackrel{\text{(Conti)}}{=} \int_V d^3r\, \mathrm{div}\,\vec{j}$$

(3.) Stokes: $\boxed{\int_S d\vec{f} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{B} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{B}}$

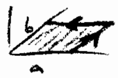
gewölbtes Flächenstück — dessen Randkurve

(auch mehrfach zus.h.)

Beweis: (a) für Rechtecke

(b) für beliebige ebene Fläche

(c) für gewölbte Fläche

(a) oBdA: Rechteck in xy-Ebene  , $d\vec{f} = \vec{e}_3 \cdot d^2r$

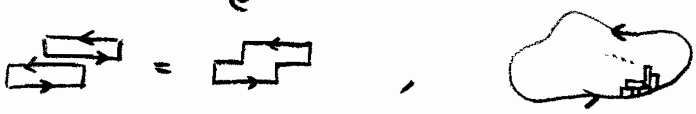
$$\int_S d\vec{f} \cdot \text{rot}\,\vec{B} = \int_{\text{Rechteck}} d^2r \; \vec{e}_3 \cdot \left(\ldots, \ldots, \partial_x B_2 - \partial_y B_1\right)\Big|_{z=0}$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \left(\partial_x B_2(x,y,0) - \partial_y B_1(x,y,0)\right)$$

$$= \int_0^b dy\, B_2(a,y,0) - \int_0^b dy\, B_2(0,y,0)$$

$$- \int_0^a dx\, B_1(x,b,0) + \int_0^a dx\, B_1(x,0,0)$$

$$= \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{B}$$

(b) 

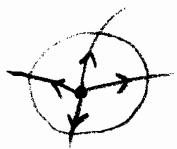
(c)  usw.

Bem
- alle Int-Sätze sind Skalar = Skalar
- $\int_{n\text{-fach}} \nabla \ldots = \int_{(n-1)\text{fach}} \ldots$
- (merken:) $\int_1^2 d\vec{r} \cdot \text{grad}\,\phi = \phi_2 - \phi_1$

$$\int_S d\vec{f} \cdot \text{rot}\,\vec{A} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{A}$$

$$\int_V d^3r \cdot \text{div}\,\vec{A} = \oint_S d\vec{f} \cdot \vec{A}$$

9.2. Anwendungsbeispiele

Bsp Kirchhoffs Regel  $\sum_\ell I_\ell = 0$

$\int_V d^3r$ über $0 = \dot{\rho} + \text{div}\,\vec{j}$ gilt

n. Vorr.: nur Drähte in V

$$0 = \partial_t \int_V d^3r\, \rho + \int_V d^3r\, \text{div}\,\vec{j} \overset{(\text{Gauß})}{=} \partial_t Q_V + \oint_S d\vec{f} \cdot \vec{j} = 0 + \sum_\ell I_\ell$$

Bsp Magnetfeld von geradem Draht

(4. Maxwellglg.) $\text{rot}\,\vec{B} = \vec{j}/\varepsilon_0 c^2$ (Stokes)

$$\Rightarrow \int_S d\vec{f} \cdot \text{rot}\,\vec{B} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \int_S d\vec{f} \cdot \vec{j}/\varepsilon_0 c^2$$

wähle S so, daß $\vec{B} \perp$ oder $\parallel \mathcal{C}$ ist, und daß Strom durch S fließt, z.B. gerader Draht, Strom I, $\oint_{\varrho}$

$S =$ Kreis(ϱ) ; stets ist $d\vec{r} \parallel \vec{B}$

$$\rightsquigarrow \quad B \cdot 2\pi\varrho = I/\varepsilon_0 c^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \, \frac{1}{\varrho} \, \vec{e}_\varphi$$

<u>Bsp</u> räumliche partielle Integration

$$\int_V d^3r \; \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi = \int_V d^3r \left(\vec{\nabla}(\vec{A}\phi) - \phi\, \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \right)$$

$$\stackrel{\text{(Gauß)}}{=} \oint_S d\vec{f}\cdot\vec{A}\phi - \int_V d^3r \; \phi\, \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

wenn $V = \mathbb{R}^3$, d.h. $S =$ dessen Rand, und $\vec{A} \to 0$ am Rand, dann ist offenbar "$\boxed{\overrightarrow{\vec{\nabla}} \longrightarrow -\overleftarrow{\vec{\nabla}}}$" erlaubt

<u>Nachtrag</u> zu S. 95, Beweis zu $\boxed{2}$:

$$\vec{A} = \vec{r} \times \vec{C}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{C}(\vec{r}) \equiv -\frac{1}{2}\, \frac{1}{1+\frac{1}{2}\vec{r}\vec{\nabla}}\, \vec{B}(\vec{r})$$

wurde behauptet. Zeige: $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, falls $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.

$$\vec{B} \stackrel{?!}{=} \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{C}) \stackrel{\text{(bac-cab)}}{=} \vec{r}(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{\nabla}\vec{r}) + (\vec{C}\vec{\nabla})\vec{r} - (\vec{r}\vec{\nabla})\vec{C}$$

a) $$(\vec{\nabla}\vec{C}) = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^n \vec{B}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ \left(-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^n \vec{\nabla}\cdot\vec{B} + n\left(-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\right)\vec{B} \right\}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \left\{ \partial_j r_i \partial_i = \partial_j = \vec{\nabla} \right.$$

b) $(\vec{\nabla}\vec{r}) = \partial_i r_i = 3$

c) $(\vec{C}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = C_i \partial_i r_j = C_j = \vec{C}$

$$= 0 - 3\vec{C} - \vec{C} - (\vec{r}\vec{\nabla})\vec{C} = -2\left(1 + \frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{C} = \vec{B} \quad \blacksquare$$

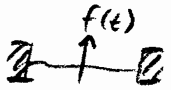
10. Fourier ($\hat{=}$ §12 in PB)

die wichtigste Rechenmethode ? (in allen Gebieten der Physik)

ähnlich §5.3 : Potenzreihen

hier: "harmonische Analyse"

10.1 Fourier-Reihe

Ein Ton (Trommelfell-Auslenkung 

) sollte aus Grund- und Obertönen bestehen:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Stärke}_n \cdot \text{Oberton}_n(t) \qquad ((\text{Oberton}_1 \equiv \text{Grundton}))$$

Anteil n ist experimentell herausfilterbar.

Also sollte (könnte) jede $\underset{\sim}{L\text{-periodische}}$ Fkt $f(x)$ $((f(x+L) \equiv f(x)))$ wie folgt darstellbar sein

$$f(x) \overset{?}{=} f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) \right]$$

Euler $e^{ix} = c + is$

$$= \underbrace{f_0}_{\equiv c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right)}_{\equiv c_n} e^{in\frac{2\pi}{L}x} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right)}_{\equiv c_{-n}} e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

Falls OK, welche c_n ? Wende Op. $\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x}$ an:

$$\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{i(n-m)\frac{2\pi}{L}x}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m$$

$$= \begin{cases} n = m: & 1 \\ n \neq m: & \frac{1}{L} \dfrac{e^{i(n-m)2\pi} - 1}{i(n-m)2\pi/L} = \frac{1}{L} \dfrac{\overbrace{\cos[(n-m)2\pi]}^{=1} + i\sin\overbrace{[\ldots]}^{0} - 1}{\ldots} = 0 \end{cases}$$

Haben auch $f_0 = c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x) = \bar{f}$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, \cos\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) f(x)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \ \cdots \ \sin \ \cdots\cdots$$

((Nachweis, daß ② unnötig ist:

gegeben f, berechne $c_n = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x)$,

bilde damit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} =: f_F(x)$,

prüfe ob $f_F = f$.

$$f_F(x) = \int_0^L dx' \underbrace{\frac{1}{L}\sum_n e^{in\frac{2\pi}{L}(x-x')}}_{\equiv K(x-x')} f(x')$$

$$K(x) = \frac{1}{L}\sum_n \left(e^{i\frac{2\pi}{L}x}\right)^n = \frac{1}{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-\infty}^{0} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{1}{1-()} + \frac{1}{1-1/()} - 1\right) = \frac{1}{L}\,\frac{1-()-1+()}{1-()} = 0,$$

außer bei $x = 0, \pm L$, usw.!

$$K(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{L}\int dn\, e^{i\frac{2\pi}{L}xn} = \frac{1}{L}\, 2\pi\, \delta\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = \delta(x)$$

also $K(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

$$= \int_0^L dx' \sum_m \delta(x-x'+mL) f(x') = f(x) \quad \bullet \quad))$$

Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{L\text{-per.}}(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} \\ \text{mit } c_n &= \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \end{aligned}}$$

Nebenprodukt (s.o.): $\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{L}x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

<u>Bem.:</u> bei c_n-Berechnung ist $(0,L)$-Verschiebung erlaubt (weil Integrand $f\cdot e^{\cdots}$ L-per. ist):

$$\int_0^L = \int_0^{L-a} + \int_{L-a}^{L} = \int_0^{L-a} + \int_{-a}^{0} = \int_{-a}^{L-a}.$$

<u>Eigenschaften:</u>

f reell $\Leftrightarrow$ $c_n^* = c_{-n}$

f gerade $\Leftrightarrow$ $c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, f(x)\cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) = c_{-n}$

d.h. $b_n = 0$, reine cos-Reihe

f ungerade $\Leftrightarrow$ $c_n = -c_{-n}$, d.h. $a_n = 0$, reine sin-Reihe und $f_0 = 0$

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n \, in\frac{2\pi}{L}} \, e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

hat diese Koeff'n

$$f(x-a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n \, e^{-in\frac{2\pi}{L}a}} \, e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

hat diese Koeff!

wichtig: $f(x) = \delta_{per.}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

gilt $c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \, \delta(x) \, e^{-\cdots} = \frac{1}{L}$

und $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$

<u>Bem:</u> Fourier-Reihe kann auch endlich viele δ's, sowie Stufen usw. darstellen. (s. Ü 74)

<u>Anwendungen</u>

1) Diffusion (vgl. Ü 73) mit period. Start-Temp.

$$\dot{T} = D\Delta T, \quad T(x,t) = e^{tD\partial_x^2} T(x,0)$$

$$= e^{tD\partial_x^2} \sum_n c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

$$= \sum_n c_n e^{-tDn^2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

2) gedämpfter, periodisch angeregter Oszi.

$$\left(\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2\right) x(t) = b(t) = b(t+T)$$

nach Einschwingen auch $x(t) = x(t+T)$

$$\sum_n c_n \underbrace{(\;)} e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_n b_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\hookrightarrow -\left(n\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \gamma \, in\frac{2\pi}{T} + \omega_0^2 =: [\;]_n$$

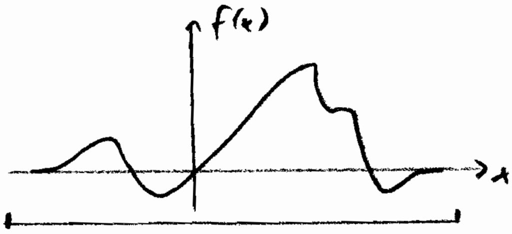
Koeff-Vergl.: $c_n [\;]_n = b_n \Rightarrow c_n = \frac{b_n}{[\;]_n}$

3) Fourier-Reihe liefert Fourier-Transformation (s. § 10.2)

10.2 Fourier-Transformation

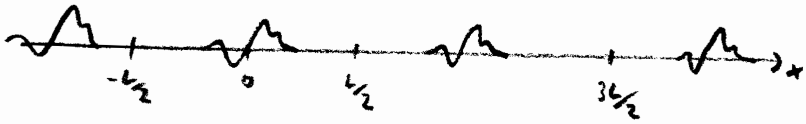
Motiv.: Geräusch statt Ton

"Physik ist nicht ewig periodisch"



Physik stets im Endlichen (?), wenn man nur weit genug blickt bzw. lange genug wartet / rückverfolgt

Kann endliche Physik periodisch fortsetzen, als F-Reihe schreiben, und $L \to \infty$ studieren.



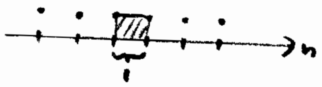
$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_n (L c_n)\, e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

mit $\displaystyle L c_n = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \underbrace{f(x)}_{\text{bleibt fest bei } L\to\infty} \xrightarrow{L\to\infty} \int dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x) =: \tilde{f}\left(n\frac{2\pi}{L}\right)$

$$= \frac{1}{L} \sum_n \tilde{f}\left(n\frac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

beide nur schwächer von n abh.

Suche asympt. führenden f-Term bzgl. $L \to \infty$



$\sum_n \ldots = \sum_n 1 \cdot \ldots \to \int dn \ldots$

$$\to \frac{1}{L} \int dn\, \tilde{f}\left(n\frac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

((

, $O(1) = \int dx\, g(x) = \sum_n \varepsilon g(\varepsilon n) + O(\varepsilon)$

$\varepsilon \int dx\, g(\varepsilon x)$ $\quad \| \cdot \frac{1}{\varepsilon}$

$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \underline{\int dx}\, g(\varepsilon x) = \underline{\sum_n} g(\varepsilon n) + O(1)$))

Subst. $n\frac{2\pi}{L} = k$, $dn = \frac{L}{2\pi} dk$ gibt nun

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{ikx} \tilde{f}(k) \\ \text{mit} \quad \tilde{f}(k) &= \int dx\, e^{-ikx} f(x) \end{aligned}}$$

- $\tilde{f}$ heißt die Fourier-Transformierte von f.
- 2π-Konvention!! (hier: ~ QFT)

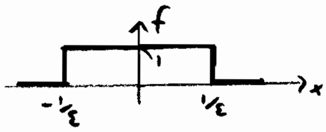
((Nachweis direkt: $f_{\mathcal{F}}(x)$ bilden, $f_{\mathcal{F}}=f$ zeigen,

$$f_{\mathcal{F}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\left[\int dx'\, e^{-ikx'} f(x')\right]$$

$$\overset{!}{=} \int dx' \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ik(x-x')}}_{=\delta(x-x')} f(x') = f(x)\,, \quad \text{qed.} \;))$$

((s. Kap. 6, Skript S. 74))

Bsp "Kastan" $f(x) = \Theta\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - x^2\right)$



$$\tilde{f}(k) = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx\, e^{-ikx} = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon}$$

oder $\tilde{f} = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx \left(\cos(kx) = \frac{1}{k}\partial_k \sin(kx)\right) = \frac{2}{k}\sin(k/\varepsilon)$

$\Rightarrow$ $f = \Theta\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - x^2\right)$ hat $\tilde{f} = 2\pi \frac{1}{\pi k}\sin(k/\varepsilon)$

Bei $\varepsilon \to 0$ erhält man ((Erinnerung Kap. 6, S. 74, $\frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$))

	$f(x) = 1$	hat	$\tilde{f}(k) = 2\pi\,\delta(k)$
und	$f(x) = \delta(x)$	hat	$\tilde{f}(k) = 1$

Bem.:
- im physikalisch vollverstandenen Sinne sind Konstante und δ's $\mathcal{F}$-transformierbar
- f eng (große ε), $\tilde{f}$ breit
  f breit, $\tilde{f}$ eng
- bei kleinen (großen) x und f durch große (kleine) k in $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde{f}(k)$ gut dargestellt. [grobe Regel]

Bsp Gauß $f(x) = A e^{-\alpha x^2}$

$$\tilde{f}(k) = A\int dx\, \underbrace{e^{-ikx}}_{\to \cos(kx) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(kx)^{2n}} e^{-\alpha x^2}$$

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!} k^{2n} \underbrace{(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int dx\, e^{-\alpha x^2}}_{=\alpha^{-1/2}\sqrt{\pi}}}_{=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\frac{1}{2^n}\alpha^{-\frac{1}{2}-n}}$$

((Kap. 6, S. 67))

Klausurtipp: Integrale sammeln?

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1) \overset{!}{=} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\tilde{f}(k) \overset{\varphi}{=} A \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right)^n = \underline{A \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-k^2/4\alpha}}$$

Bem.:
- erneut: f eng $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ breit
- $FT\{\text{Gauß}\} = \text{Gauß}$

  eine Forminvarianz unter F.T.!

  es gibt mehr (∞ viele): $FT\left\{\frac{1}{\cosh(x)}\right\} = \frac{\pi}{\cosh(\frac{\pi}{2}k)}$

  $FT\left\{\sqrt{\frac{a}{|x|}}\right\} = \sqrt{\frac{2a\pi}{|k|}}$

allg. Eigenschaften

- f reell $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}^*(k) = \tilde{f}(-k)$
- $f(-x) = \pm f(x) \Leftrightarrow \tilde{f}(-k) = \pm \tilde{f}(k)$ $\hat{=}$ $\begin{cases} \cos - \text{Entwicklung} \\ \sin - \text{Entwicklung} \end{cases}$
- $$\int dx\, |f|^2 = \underbrace{\int dx \frac{1}{2\pi}}\int dk\, \underbrace{e^{ikx}}\tilde{f}(k)\frac{1}{2\pi}\int dq\, \underbrace{e^{-iqx}}\tilde{f}^*(q)$$

  $\delta(k-q)$

  $$= \frac{1}{2\pi}\int dk\, |\tilde{f}(k)|^2$$ "Parseval's Theorem"

- Tabellen: $f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)$

  $=: \quad g(x) \quad + \quad u(x)$

$$\tilde{f}(k) = \int dx\, e^{-ikx}\left(g(x)+u(x)\right)$$
$$= \int dx \cos(kx)\, g(x) - i\int dx \sin(kx)\, u(x)$$

Räumliche FT

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int dk_1\, e^{ik_1x}\,\underbrace{\tilde{\tilde{\tilde{f}}}(k_1,y,z)}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int dk_2\, e^{ik_2y}\,\underbrace{\tilde{\tilde{f}}(k_1,k_2,z)}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int dk_3\, e^{ik_3z}\,\tilde{f}(k_1,k_2,k_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &f(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\,\tilde{f}(\vec{k}) \\ &\text{mit } \tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\vec{r}} f(\vec{r}) \end{aligned}}$$

((Raumzeitliche FT: $\quad$ reine Konvention

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^3k \, d\omega \; e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} \, \tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega)$$

mit $\tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega) = \int d^3r \, dt \; e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t} \, \vec{E}(\vec{r},t)$))

Klausur-Eichstrich

10.3 Anwendungen

Oft:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{f\text{-Glg.}} & \overset{?}{- - - \rightarrow} & \boxed{\text{Lösung } f} \\ \big\downarrow \; f = \frac{1}{2\pi}\int dk \, e^{ikx} \tilde{f} \text{ einsetzen} & & \big\uparrow \; \text{"nur noch" Integrieren!} \\ \boxed{\tilde{f}\text{-Glg.}} & \xrightarrow{\text{lösen}} & \boxed{\text{Lösung } \tilde{f}} \end{array}$$

Bsp Elektrostatik

will $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \; , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$ lösen

Abstieg:
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \vec{\nabla}\cdot \\ \vec{\nabla}\times \end{matrix} \right\} e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{= \underbrace{\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{= i\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}}} \left\{ \begin{matrix} \cdot \\ \times \end{matrix} \right\}} \vec{E}(\vec{k}) = \left\{ \begin{matrix} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \, e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\rho}(\vec{k}) \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}}$$

Koef-Vergl.:
$$i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde{\rho} \qquad (\tilde{1})$$
$$i\vec{k}\times\tilde{\vec{E}} = \vec{0} \qquad (\tilde{2})$$

Lösen:
$$i\vec{k}\times(\tilde{2}) \overset{\text{bac-cab}}{=} i\vec{k}\,(\underbrace{i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}}}_{(\tilde{1}) \text{ einsetzen}}) + k^2\tilde{\vec{E}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\vec{E}}(\vec{k}) = -\frac{i\vec{k}}{\varepsilon_0 k^2}\tilde{\rho}(\vec{k})$$

Aufstieg:
$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \underbrace{e^{i\vec{k}\vec{r}}(-i\vec{k})}_{= -\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}}} \frac{1}{\varepsilon_0 k^2} \underbrace{\tilde{\rho}(\vec{k})}_{= \int d^3r' \, e^{-i\vec{k}\vec{r}'}\rho(\vec{r}')}$$

$$= -\vec{\nabla}\int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \, \frac{4\pi}{k^2} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}_{\equiv K(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \text{ (s.u.)}} \rho(\vec{r}')$$

$$= -\vec{\nabla}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|}$$

(($K(\vec{r}) \overset{\text{Kugelkoord.}}{=} \frac{2}{\pi}\frac{1}{r}\underbrace{\int_0^\infty dk \, \frac{\sin(kr)}{k}}_{= \pi/2} = \frac{1}{r} \; , \quad \boxed{FT\left\{\frac{1}{r}\right\} = \frac{4\pi}{k^2}}$))

$\leftarrow \; 1 = \int dx \, \delta(x) = \int dx \, \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx \, \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x} \; , \quad x \to \varepsilon k r$ ■

FT → FR

$$f(x) - f(x+L) = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\left[1 - e^{ikL}\right]\tilde{f}(k) = 0$$

Koeff-Vergl.: $\left[1 - e^{ikL}\right]\tilde{f} = 0$

$$\tilde{f}(k) = \sum_n 2\pi c_n\, \delta\!\left(k - n\tfrac{2\pi}{L}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx} \sum_n 2\pi c_n\, \delta\!\left(k - n\tfrac{2\pi}{L}\right) \overset{!}{=} \sum_n c_n\, e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

Maxwell-Gln. in Unterwelt

((Erinnerung: Intro Kap. 8, Skript S. 84: $\vec\nabla\vec E = \rho$, $\vec\nabla\times\vec E = -\dot{\vec B}$, $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$, $\vec\nabla\times\vec B = \vec j + \dot{\vec E}$))

setze $\vec E, \rho, \vec B, \vec j$ 4D-entwickelt ein

benutze
$$\left.\begin{matrix}\vec\nabla\cdot \\ \vec\nabla\times \\ \partial_t\end{matrix}\right\} e^{i\vec k\vec r - i\omega t}\,\vec{\tilde E} = \left.\begin{matrix} i\vec k\cdot \\ i\vec k\times \\ -i\omega\end{matrix}\right\} e^{\cdots}\,\vec{\tilde E}$$

also $\vec\nabla \to i\vec k$, $\partial_t \to -i\omega$

Koeff-Vergl. gibt also

$$\boxed{\begin{array}{ll} i\vec k\cdot\vec{\tilde E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde\rho, & i\vec k\cdot\vec{\tilde B} = 0 \\ i\vec k\times\vec{\tilde E} = i\omega\vec{\tilde B}, & i\vec k\times\vec{\tilde B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{\tilde j} - \frac{i\omega}{c^2}\vec{\tilde E} \end{array}}$$

⇒ $\widetilde{\text{Max}}$ ist nur noch System von Vektorgln.,
leicht auflösbar nach $\vec{\tilde E}$, $\vec{\tilde B}$ (selber machen? Trick: z.B. $i\vec k\times$(Glg.))

⇒ Aufstieg zur kausalen Lösung (selber ?!)
füge "infinit. Leitfähigkeit (Reibung!) des $\mathbb{R}^3$" dazu,
via $\vec{\tilde j} \to \vec{\tilde j} + (\varepsilon_0 c^2 \varepsilon)\vec{\tilde E}$, $\vec j \to \vec j + (\varepsilon_0 c^2\varepsilon)\vec E$

Klausur - Hinweise

Di 17.7.07, 9.15 - 11.30, H6/H5

→ Perso-, Studi-Ausweis

20 Blatt Papier, je Name + Matr-Nr. o. re.

Skript, Ü + eigene Lsn, Spickzettel, Schulz-Buch

nicht erlaubt: Computer, Taschenrechner, Handy

Vorbereitung: zu jeder Ü.: "was zu tun war" notieren

(Ü waren Trainingsprogramm

– und nun Di kommt der Test auf Ihre Fitness.)

Do im Tutorium → die dazu entstandenen Fragen

Mo abend: , Material sortieren.

Di 9.15 kommen.

9.30 los – Überangebot.

durchlesen.

nicht der Reihe nach rechnen.

nicht fest rechnen. → "[illegible]"?

Wiederholung / Semester-Überblick

[s. Kap. 6 - 10]

Rückblick

q in $\vec{E}, \vec{B}$ $\quad m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ $\quad$ z.B. "Elektron"

weiß Natur das?

minimiert Zahl der Welt $\quad S = \int_1^2 dt \left(\frac{m}{2} v^2 - q\phi + q\vec{v}\vec{A} \right)$

mehrere T. $\quad \sum_a \left(\frac{m_a}{2} v_a^2 - q_a \phi(\vec{r}_a, t) + q_a \vec{v}_a \vec{A}(\vec{r}_a, t) \right)$

Rel.? $\quad \frac{m}{2} v^2 \to -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$

andere Hälfte Theorie: Felder-begr.? Max!

$$S_{Max} = \int dt \int d^3r \left(-\rho\phi + \vec{j}\vec{A} + \frac{\varepsilon_0}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \right)$$

oben: $\quad \sum_a \left(-q_a\phi + q_a \vec{v}_a \cdot \vec{A} \right) \to \int d^3r \left(-\rho\phi + \vec{j}\vec{A} \right)$

genug! Natur-Harmonie erschließt sich erst in Formel-Sprache.

Ausblick $\quad$ Theorie I (Lag, Ham, ED rel ..)

$\qquad\qquad$ II QM

etc

verwirrt?! $\quad$ eigenes Skript

üben; rechnen; kämpfen; können

es gibt nur eine Natur

nur eine Physik

nur eine Erde

nur ein Leben

— nutzen Sie es!