Einf. i. d. Meth. d. theor. Physik II → EMTP II

YS, E6-118 (Di 10-12:30 u.n.V.)

www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/emtp2

Orga

Vorl Di 8.15-9.00, 9.10-9.55 (H6)

in Pause: Ü-Blatt holen (heute noch nicht) ↪ Ostern...

Ü-Liste eintragen (nur heute)

Übungen Do. 8-10, 10-12, 14-16

Tutoren: s. vor Pause

vor Vorl: Ü-Lsn in Karton

Regeln: 50% Ü-Pkte + akt Mitarbeit ⇒ Ü-Schein

Ü-Schein + (eine) Klausur best ⇒ Schein

↪ alt OK ↪ 17.7.07, 9.10.07

EMTP I - Klausur: (Statistik: 71% bestanden; Gratu!!)

Besprechung / Fragen diese Woche in Ü → evtl. Afg.-zettel mitbringen

(neue Hörer? → als Wdh der EMTP I)

Ü-Schein: Pause

KI-Erfolg nicht EMTP II-Voraussetzung.

EMTP II: nicht schwerer als I. schöner! interessanter!

Integrale, krumme Koordinaten, δ

Differenzialgln

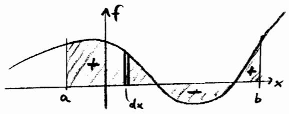
Felder, Integralsätze

Fourier-Trafo

LIT → s. Web; Schulz PB

6. Integrale (+ deren Gebrauch i.d. Physik)

6.1. Gewöhnliche Integrale



Die so gezählte Fläche ist $\{\text{lin. Op.}\} f(x)$, denn (u.a.) $\{\,\}(-f) = -\{\,\} f$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Fläche}\\ \text{zw. } a,b\end{array}\right) = \underbrace{\lim \sum}_{\int} \left(dx \cdot f(x)\right) =: \int_a^b dx\, f(x)$$

$$\int_b^a dx\, f := -\int_a^b dx\, f$$

$\int dx :=$ über alle x, d.h. $\int dx\, f := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f$, $\int d\varphi := \int_{(2\pi)} d\varphi$

Dimension: $\left[\int dx\, f\right] = [x][f]$, $[a] = [b] = [x]$

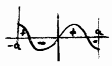
$\int$-Auswertung = Umformung, bis es trivial ist (d.h. die Fläche geometrisch erhältlich ist)

oder $f = \partial_x(\ldots\ldots)$, s.u. "Hauptsatz"

Beispiele:

$$\int_a^a dx\, f = 0$$

$$\int_a^b dx\, \text{const}_x = (b-a)\cdot \text{const}_x \qquad \left(\int_a^{a+\varepsilon} dx\, f(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varepsilon f(a)\right)$$



$$f \text{ ungerade} \Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 0$$

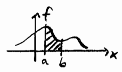
$$f \text{ gerade} \Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 2\int_0^a dx\, f$$

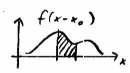
$$\int_a^b dx\, (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b dx\, f + \beta \int_a^b dx\, g$$

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \int_a^c - \int_b^c$$

Tricks:

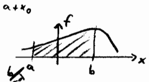
Verschieben

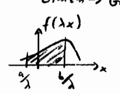




$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{a+x_0}^{b+x_0} dx\, f(x-x_0) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} f(x)\to f(x-x_0)\\ \text{Grenzen} \to \text{Grenzen} + x_0\end{array}\right)\right)$$

Skalieren



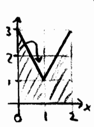


$$\int_a^b dx\, f(x) = \lambda \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx\, f(\lambda x) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} x \to \lambda x\\ dx \to \lambda\, dx \\ \text{Grenzen} \to \text{Grenzen}/\lambda\end{array}\right)\right)$$

Anwendungs-Beispiel

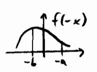
$$\begin{aligned} J &= \int_0^2 dx\, \left(2|x-1|+1\right) &&, \quad x \to x+1 \\ &= \int_{-1}^{1} dx\, \left(2|x|+1\right) &&, \quad x \to \tfrac{1}{2}x \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} dx\, \left(|x|+1\right) &&, \quad \text{gerade Fkt} \\ &= \int_0^2 dx\, \left(|x|+1\right) = \int_0^2 dx\, (x+1) &&, \quad x \to x+1 \\ &= \int_{-1}^{1} dx\, (x+2) &&, \quad x \text{ ist ungerade Fkt} \\ &= 2\int_{-1}^{1} dx = 2\cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

((einfacher Check hier: zeichnen



$f \to 2$, $J = 2\cdot 2 = 4$ ✓))

Spiegeln



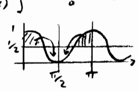
$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{-b}^{-a} dx\, f(-x) = -\int_{-a}^{-b} dx\, f(-x) \qquad ((\hat{=} \text{ Skalieren, } \lambda = -1))$$

$\text{trig}^2 \to \frac{1}{2}$

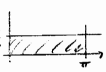
$$\int_0^\pi dx \left\{\begin{array}{c}\cos^2(x)\\ \sin^2(x)\end{array}\right\} = \int_0^\pi dx \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{2},$$

$1-c^2$

denn:



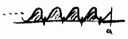
$= \frac{1}{2}$



weil $\cos^2(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_0^a dx\, \sin^2(x) = \frac{1}{2},$$

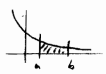
denn $\frac{1}{N\pi + O(1)} \cdot \left(N\frac{\pi}{2} + O(1)\right) \to \frac{1}{2}$



$\int \to$ dimensionslos z.B.:

$$\int_0^{t_1} dt\, v(t) = \int_0^{t_1} dt\, v_0 f(\omega t) = \frac{v_0}{\omega}\int_0^{\omega t} dt\, f(t), \quad t \to \tfrac{1}{\omega} t$$

$\int$ aus Σ(Scheibchen) z.B.:



$$\int_a^b dx\, e^{-x} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(b-a)}{N} e^{-\left(a + n\frac{b-a}{N}\right)}$$

aus §5, Potenzreihen: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}$ (Skript S. 42)

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{(b-a)}{N} e^{-a} \frac{1 - e^{-\frac{b-a}{N}(N+1)}}{1 - e^{-\frac{b-a}{N}}}$$

Nenner $\to \frac{b-a}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$

$$= e^{-a}\left(1 - e^{-b+a}\right) = e^{-a} - e^{-b}$$

$$\left(\left(\Rightarrow \int_0^\infty dx\, e^{-x} = 1\right)\right)$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_{x=b} - \left[-e^{-x}\right]_{x=a} \qquad ((\text{geht das immer? s.u.}))$$

"Hauptsatz"

$$\partial_b \int_a^b dx\, f(x) = \frac{\int_a^{b+\varepsilon} dx\, f(x) - \int_a^b dx\, f(x)}{\varepsilon} =: \frac{\int_b^{b+\varepsilon} dx\, f(x)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} f(b)\cdot\varepsilon = f(b)$$

Kennt man zu $f(x)$ eine Stammfkt $F(x)$, d.h. eine Lösung der Dgl. $F'(x) = f(x)$, dann ist also

$$\partial_b \int_a^b dx\, f(x) = \partial_b F(b)$$

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) + C$$

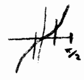
$$b \to a: \quad 0 = F(a) + C$$

$$\boxed{\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)}$$

Kommentare zum Hauptsatz

- $\bullet_1$ hilft nur, falls man $f = \partial_x F$ lösen kann
  (($f = \sin(x^2) = \partial_x\,(???)$))
- $\bullet_2$ warum es gilt: $\int_a^b dx\, \frac{dF}{dx}$ = F-Zunahme ab $F(a)$
- $\bullet_3$ Anwendung: $\int_a^b dx\ ////\ = \int_a^b dx\, \partial_x [\,??\,] = [\ ]_a^b = [\ ]_{x=b} - [\ ]_{x=a}$
- $\bullet_4$ Wunschtabelle : $\frac{1}{1+x^2} = \partial_x \arctan(x)$ etc.
  wenn jedoch (s. Bronstein etc.) „ $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$ ",
  dann lese dies als Tabelle (nicht als Gleichung : C ?!)
- $\bullet_5$ F in Tabelle gefunden
  → zitieren , z.B. [Bronstein, 57]
  → Probe , also $\partial_x(\text{rhs})$ bilden
  ((sonst: Pkt-Abzug bei Ü))
- $\bullet_6$ Bsp:

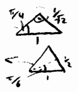
$$\mathcal{J}_1 = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx\, \tan(x)$$



ungerade !

$$= \int_{+\pi/6}^{\pi/4} dx\, \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad , \quad \partial_x \ln(\cos(x)) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$= \left[-\ln(\cos(x))\right]_{\pi/6}^{\pi/4} \quad , \quad \cos(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \sin(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{1}{2}$$



$$= \ln(\sqrt{2}) - \left[-\ln\left(\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}\right)\right] = \tfrac{1}{2}\ln(2) + \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{3}{2})$$

- $\bullet_7$ $\int_a^\infty dx\, f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f$: wenn endlich, dann : „es existiert".
  Bsp: existiert $\int_0^\infty dx\,\left(\ln(1+e^x) - \underbrace{x}_{=\ln(e^x)}\right)$? $\to = \ln(1+e^{-x}) = e^{-x} + O(e^{-2x})$, JA!
- $\bullet_8$ „Kandidaten-Methode" :

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^1 dx\, \arctan(x) = \int_0^1 dx\, \partial_x [\ ?\ ]$$

$$\partial_x\, x\cdot\arctan(x) = \arctan(x) + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=\partial_x(?)} \quad , \quad \partial_x \ln(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}$$

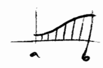
$$\Rightarrow [\ ?\ ] = x\arctan(x) - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$= \arctan(1) - \tfrac{1}{2}\ln(2) - 0 - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) \qquad \left(\left(\tan(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1 \ ✓ \right)\right)$$

6.2. Physik mit (gewöhnl.) Integralen

→ Anwendungsbsp. zur Integration !

Mittelwerte $\frac{h_1+h_2}{2} = \bar{h}$, Verallg. :



$$\bar{f} = \frac{\sum f\text{'s}\ dx}{\text{Anzahl}\ dx} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f$$

$$\overline{f^2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f^2 \ , \text{ etc.}$$

Eigenschaften: $\overline{\alpha f + \beta g} = \alpha\bar{f} + \beta\bar{g}$, $\bar{1} = 1$

Schwankung: $\Delta f = \sqrt{\overline{(f-\bar{f})^2}} = \sqrt{\overline{f^2} - \overline{2f\bar{f}} + \bar{f}^2}$
$= \sqrt{\overline{f^2} - \bar{f}^2}$

Bsp harm. Oszi. , $x(t) = A\cos(\omega t)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (Periode), $\omega^2 = \frac{k}{m}$ $\left(\left(m\ddot{x} = -kx = -\partial_x \tfrac{k}{2}x^2 \right)\right)$

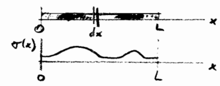
$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, A\cos(\omega t) = 0$$

mittl. kin. E $\leadsto \bar{T} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{m}{2}\left(A\omega\underbrace{\sin(\omega t)}_{\to 1/2}\right)^2 = \frac{m}{4}\omega^2 A^2$

mittl. pot. E $\leadsto \bar{V} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{k}{2}\left(A\cos(\omega t)\right)^2 = \frac{k}{4}A^2 = \bar{T}$

$$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\tfrac{2}{k}\bar{V}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}A$$

$\sigma(x)$ Massendichte

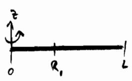


$$\sigma(x) := \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}} = \frac{dm \text{ bei } x}{dx}$$

$M = \sum_a m_a \longrightarrow M = \int_0^L dx\, \sigma(x)$ Ges.-Masse

$R_1 = \frac{1}{M}\sum_a m_a x_a \longrightarrow R_1 = \frac{1}{M}\int_0^L dx\, \sigma(x)\, x$ Schwerpkt

[Erinnerung (§4): Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m(\vec{\omega}\times\vec{r}) \equiv \underline{I}\vec{\omega}$ — winkelgeschw. — Trägheitstensor
starrer Körper, $\underline{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_{33}\end{pmatrix}$, z.B. $I_{33} = \sum_a m_a(x_a^2 + y_a^2)$]



$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\I_{33}\omega\end{pmatrix}$$

$I_{33} = \sum_a m_a(x_a^2 + y_a^2) \longrightarrow I_{33}^L = \int_0^L dx\, \sigma(x)\, x^2$ Achse durch Ursprung

$$= \int_0^L dx\, \sigma(x)\left[(x-R_1)^2 + 2R_1(x-R_1) + R_1^2\right]$$

$$= I_{33}^S + 0 + MR_1^2 \qquad \text{„Satz v. Steiner"}$$

↖ Achse durch Schwerpkt.

Superposition Grav. Pot. eines Stabes mit $\sigma(x)$

Punktmassen M_a bei $\vec{r}_a$ ziehen m bei $\vec{r}$ an :

$$V(\vec{r}) = \sum_a\left(-\frac{\gamma m M_a}{\sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2}}\right)$$

dünner Stab auf x-Achse : $y_a = 0$, $z_a = 0$

$$\longrightarrow V(\vec{r}) = -\gamma m\int_0^L dx'\, \frac{\sigma(x')}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}}$$

⇝ Integral sammelt hier die infinitesimalen Fernwirkungen räuml. verteilter Ursachen auf. (($\int dx'$ OK, da $\sigma(x') = 0$ außerhalb $(0,L)$))

1D Newton, $K(t)$ $\boxed{\dot{v} = \frac{1}{m}K(t)\ ,\ v(t_0) = v_0}$

(A) Integral sinnvoll , wenn
- keine Stammfkt. von $K(t)$ zu finden ist
- $K(t)$ grafisch gegeben ist
- man noch allgemein bleiben will.

$$\underbrace{\int_{t_0}^t dt'\, \partial_{t'} v(t')}_{v(t) - v(t_0)} = \frac{1}{m}\int_{t_0}^t dt'\, K(t')$$

(B) Integral nicht sinnvoll , wenn $K(t)$ aufleitbar ist :

$\boxed{\dot{v} = \alpha\omega\cos(\omega t)\ ,\ v(t_0) = v_0}$
$= \alpha\,\partial_t \sin(\omega t)$

$\Rightarrow v = \alpha\sin(\omega t) + C$
$v_0 = \alpha\sin(\omega t_0) + C \quad \Rightarrow C$;

1D Newton, $K(x)$ (evtl. unlösbar)

$$m\ddot{x} = K(x) = -\partial_x V(x) \qquad \| \cdot \dot{x}$$

$$\partial_t\left(\tfrac{m}{2}\dot{x}^2\right) = -\partial_t V(x(t))$$

$$\tfrac{m}{2}\dot{x}^2 = E - V(x)$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\tfrac{2}{m}(E - V(x))} \qquad \text{((immerhin eine Ableitung weniger !))}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{E - V(x)}} = \pm\sqrt{\tfrac{2}{m}} \qquad (*)$$

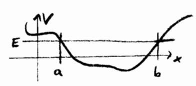
(B) : $\partial_t [\ ?\ ] = C \pm \sqrt{\tfrac{2}{m}}\,t$, $C = \dots$, nach x auflösen
(($[\ ?\ ]$ ist Stammfkt. v. $\frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$ bzgl. x))

(A): ((finde $[\ ?\ ]$ nicht, oder will $V(x)$ nicht spezifizieren:))
Strategie: $(*)\cdot dt$ ($\dot{x}\,dt = dx$) und $\int$ darüber [§7: "Trennung der Variablen"]

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}} = \pm\sqrt{\tfrac{2}{m}}\int_{t_0}^t dt' = \pm\sqrt{\tfrac{2}{m}}(t - t_0)$$

$$t = t_0 \pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx\, \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Periode T ?



$$T = 2\int_a^b dx\, \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Arbeit (1D) := Kraft · Weg
$= \sum(\text{dWeg})\cdot\text{Kraft}$
$=$ pos., wenn Weg in Richtung Kraft
$=$ dem System zugeführte Energie (Arbeit am System)

$$A = \int_a^b dx\, K(x) = -\int_a^b dx\, \partial_x V(x)$$

$$= V(a) - V(b)$$

6.3. Integrations - "Methoden"

(($\hat{=}$ Umformungs-Möglichkeiten zur Int.-Chance-Erhöhung))

Man erkenne, daß es Sinn macht, den Integranden $f(x)$ zu lesen ...

... als Partialbruch

$$f = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \partial_x \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

... als $u'v$ (partielle Integration)

$$f = u'v = \partial_x(uv) - uv'$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx\, u'v = [uv]_a^b - \int_a^b dx\, uv'$$

Bsp: $I = \int_0^1 dx\, \underbrace{2x}_{u'}\, \underbrace{\ln(x)}_{v} = \underbrace{[x^2 \ln(x)]_0^1}_{=0} - \int_0^1 dx\, x = -\frac{1}{2} + 0$

$u = x^2 \quad v' = \frac{1}{x}$

wenn keine Randterme, dann: $\partial_x \to -\overleftarrow{\partial_x}$:

$$= \int_0^1 dx\, \ln(x)\, \partial_x x^2 = -\int_0^1 dx\, x^2 \partial_x \ln(x) = -\int_0^1 dx\, x = -\frac{1}{2} \quad ✓$$

... als $f(x(t))$ (Substitution)

$x = x(t)$ sei monoton in (a,b), $\Rightarrow t = t(x)$

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\, \frac{dx}{dt}\, f(x(t))$$

Bsp 1: Kreis (R) - Fläche

$$F_{(R)} = 4\int_0^R dx\, \sqrt{R^2 - x^2}$$

setze $x = R\sin(\varphi)$ ((t heißt jetzt φ))

$\Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R\cos(\varphi)$

$x_{unten} = 0 = x(\varphi = 0)$

$x_{oben} = R = x(\varphi = \frac{\pi}{2})$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\varphi\, R\cos(\varphi)\, R\sqrt{1-\sin^2(\varphi)} = 4R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\to \frac{1}{2}} = \pi R^2$$

((besser ? aus $U = 2\pi R$:  $\to$ 

, $F_{(R)} = R \cdot \frac{1}{2} 2\pi R = \pi R^2$))

Bsp 2

$$I = \int_0^1 dx\, 2x \ln(x)$$

setze $t = \ln(x) \Rightarrow x = e^t,\ \dot{x} = e^t$

$x_u = 0$ bei $t = -\infty$, $x_o = 1$ bei $t = 0$

$$= \int_{-\infty}^0 dt\, e^t\, 2e^t\, t \qquad ((\text{nun } \lambda\text{-Trick mit } \lambda = -1))$$

$$= -2\int_{\infty}^0 dt\, e^{-2t}(-t) = -2\int_0^{\infty} dt\, t e^{-2t} \qquad ((t \to \tfrac{t}{2}))$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} dt\, \underbrace{t}_{v}\underbrace{e^{-t}}_{u'} = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} dt\, t(-\partial_t)e^{-t} = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} dt\, e^{-t} = -\frac{1}{2} \quad (s.\downarrow)$$

Bsp 3 (("uneigentliche" Integrale sind eigentlich eigentliche))

$$\int_0^{\infty} dx\, \underbrace{e^{-x}}_{=t,\ x = -\ln(t)} = \int_1^0 dt\left(-\frac{1}{t}\right)t = \int_0^1 dt = 1$$

... als ∂_α von ... (Differentiation nach Parameter)

$$\int_0^{\infty} dx\, x^n e^{-x} = \Big[(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int_0^{\infty} dx\, e^{-\alpha x}}_{=1/\alpha}\Big]_{\alpha=1} = \left[\frac{n!}{\alpha^{n+1}}\right]_{\alpha=1} = n!$$

(($(-\partial_\alpha)\frac{1}{\alpha} = +\frac{1}{\alpha^2}$, $(-\partial_\alpha)\frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^3}$, ...))

... als Parameter-abhängig (vgl. Übung, Aufgabe 42)

$$\partial_7 = -\beta\partial_\beta \ln\left(\int_0^{\infty} dx\, \frac{x}{e^{\beta x}+1}\right) = -\beta\partial_\beta \ln\left(\frac{1}{\beta^2}\int_0^{\infty} dx\, \frac{x}{e^x+1}\right)$$

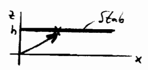
$$= -\beta\partial_\beta\left[-2\ln\beta + \ln(\int ..)\right] = 2$$

6.4. Kurven- u.a. Integrale

Strategie: alle auf gewöhnliche Int. zurückführen.

Integral = Summe. also

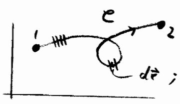
$$\int_a^b dx\, \vec{F}(x) = \left(\int_a^b dx\, f_1(x),\ \int_a^b dx\, f_2(x),\ \dots\right)$$

Bsp: 

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int_0^L dx\, \sigma(x)\,(x,0,h) = (R_1, 0, h)$$

Schwerpkt.

Kurvenintegral



$d\vec{r}$; $ds = |d\vec{r}|$

"C gegeben" $\equiv$ $\vec{r}(t), t_1, t_2$.

Raumkurve $\quad (\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1),\ \vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$, ggf t_1 aus $\vec{r}_1$-Angabe)

Bsp für Gebrauch von Kurvenint.:

Länge von $C = \int_C ds = \int_1^2 ds$

M	$= \int_1^2 ds\, \sigma(\vec{r})$	Draht-Gesamtmasse
$M\vec{R}$	$= \int_1^2 ds\, \sigma(\vec{r})\, \vec{r}$	Draht-Schwerpkt
$V(\vec{r})$	$= -\gamma m \int_1^2 ds'\, \sigma(\vec{r}')\, \frac{1}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}$	Draht-Gravi-Pot.
A	$= \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{K}$	Arbeit entlang Weg C (auch wenn $\vec{K}$ kein V hat)

Ausrechnen von Kurvenint.:

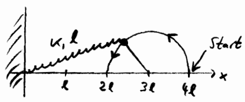
$d\vec{r} = dt \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$, bzw. $ds = dt \cdot |\dot{\vec{r}}|$

z.B. $\quad A = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{K}(\vec{r}(t))$

folgendes "Rezept" nützlich :

„$\int_C$ - Fahrplan"	am Bsp Kreisumfang
1. Größe, d.h. $\int_C$-Art	$U = \int_{Kreis} ds$
2. spezif. C	$\vec{r}(t) = R(\cos(t), \sin(t), 0)$
3. t_1, t_2	$t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi$
4. $\dot{\vec{r}} =: \vec{v}$, ggf v bilden t-Integral	$\vec{v} = R(-s, c, 0)$ $U = \int_0^{2\pi} dt\, R$
5. $\vec{r}(t)$ in Integrand einsetzen	— entfällt —
6. ggf. Skalarprod. ausführen	— entfällt —
7. gew. Int. auswerten	$U = R \cdot 2\pi$

Bsp: Mausefalle



Arbeit A als Kurvenintegral !
(Fahrplan - Illustration)

((vorweg: es muß $A = V_{Start} - V_{Ende}$ herauskommen

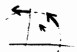
$$= \frac{\kappa}{2}(4\ell - \ell)^2 - \frac{\kappa}{2}(2\ell - \ell)^2 = \frac{\kappa}{2}\ell^2(9-1) = 4\kappa\ell^2 \text{))}$$

1. $A = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{K}(\vec{r})$, $\vec{K}(\vec{r}) = \kappa\left(\frac{-\vec{r}}{r}\right)(r - \ell)$
   $\vec{e}_{m \to Haken}$
2. C: $\vec{r}(t) = \ell(3 + \cos(t), \sin(t))$
3. $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$
4. $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \ell(-s, c)$
   $A = \int_0^{\pi} dt\, \ell(-s,c) \cdot \kappa(-\vec{r})\left(1 - \frac{\ell}{r}\right)$
5. $r = |\vec{r}| = \ell\sqrt{9 + 6c + c^2 + s^2} = \ell\sqrt{10 + 6c}$
   $A = \ell^2\kappa \int_0^{\pi} dt\, \underbrace{(-s,c)\cdot(-3-c,-s)}_{= 3s + \cancel{sc} - \cancel{sc}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{10+6c}}\right)$
6.
7. $= 3\ell^2\kappa \int_0^{\pi} dt\left(\sin(t) - \frac{\sin(t)}{\sqrt{10 + 6\cos(t)}}\right)$
   $= \partial_t\left[-\cos(t) + \frac{1}{3}\sqrt{10 + 6\cos(t)}\right]$
   $= 3\ell^2\kappa\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{4} + 1 - \frac{1}{3}\sqrt{16}\right) = 4\ell^2\kappa$ ✓✓

5 $\int_\mathcal{C}$ - Arten: $\int_\mathcal{C} ds \begin{Bmatrix}\phi\\ \vec A\end{Bmatrix}$ ist Skalar Vektor , $\int_\mathcal{C} d\vec r \begin{Bmatrix}\phi \\ \cdot\vec A \\ \times \vec A\end{Bmatrix}$ ist V. S. V.

manchmal geometrisch auswertbar, z.B.:

$\vec E = \alpha\, \vec e_3 \times \vec r$,

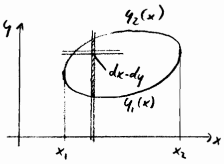


$\oint_{Kreis(R)} d\vec r \times \vec E = \vec 0$ (weil $d\vec r$ stets $\parallel \vec E$)

$\oint_{Kr.(R)} d\vec r\cdot\vec E = 2\pi R\cdot\alpha R$ (weil $d\vec r\cdot\vec E = ds\cdot|\vec E| = ds\cdot\alpha R$)

oft hilft, $\mathcal C$ geschickt zu legen!

ebenes Flächenint.



$\phi(x,y) = \frac{\text{etwas}}{\text{Fläche}}$ ← Masse, Ldg, ...

gegeben, dann

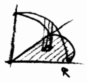
$\left.\begin{matrix}\text{gesamtes}\\ \text{etwas}\end{matrix}\right\} = \int_F d^2r\cdot\phi(x,y) = \int_{x_1}^{x_2}dx \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, \phi(x,y)}_{\text{Streifen-etwas}}$

ausrechnen

((Randkurve? Immer?

))

Bsp Kugelvolumen



$x_1=0,\ x_2=R,\ y_1(x)\equiv 0,\ y_2(x) = \sqrt{R^2-x^2}$, ϕ = Höhe $= \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$

$V_R = 8\cdot\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $y\to\sqrt{R^2-x^2}\,y$

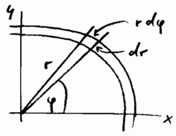
$= 8\cdot\int_0^R dx\,(R^2-x^2)\underbrace{\int_0^1 dy\sqrt{1-y^2}}$; $y=\sin(\varphi)$, $\frac{dy}{d\varphi}=\cos(\varphi)$; $=\int_0^{\pi/2} d\varphi\,\cos^2(\varphi) = \pi/4$

$x\to Rx$

$= 2\pi R^3\underbrace{\int_0^1 dx\,(1-x^2)}_{=1-[\frac13-0]=\frac23} = \frac{4\pi}{3}R^3$

im letzten Bsp: kugeliges kartesisch ?!
brauchen "runde" Koordinaten!

Polarkoordinaten



$d^2r = dr\, r\,d\varphi$

$x = r\cos(\varphi)$, $y=r\sin(\varphi)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + n\cdot\pi$

((φ in $(0,2\pi)$: $n = 1+\theta(x)-2\theta(x)\theta(y)$))

$\int_F d^2r\,\phi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr\, r\,\phi(r,\varphi)$

Test an Kreisfläche ($\stackrel{?}{=}\pi R^2$)

$\phi=1$,

, $4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^R dr\,r = 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac12 R^2$ ✓

Bsp Kugelvolumen

$V_R = 8\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^R dr\, r\sqrt{R^2-r^2}$

$\pi/2$ $\qquad r\to Rr$

$= 4\pi R^3\int_0^1 dr\, \underbrace{r\sqrt{1-r^2}}_{=\partial_r[(-\frac13)(1-r^2)^{3/2}]}$

$= 4\pi R^3(0+\frac13) = \frac{4\pi}{3}R^3$ ✓

Bsp Galaxie mit $\frac{\text{Masse}}{\text{Fläche}} =: \rho = \rho_0 e^{-r^2/a^2}$, $M=?$

$M = \int_{\substack{\text{ganze}\\ \text{Ebene}}} d^2r\,\rho = \rho_0\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\infty dr\,r\,e^{-r^2/a^2}$, $r\to ar$

$= \rho_0 2\pi a^2\int_0^\infty dr\,\underbrace{r e^{-r^2}}_{=\partial_r[-\frac12 e^{-r^2}]}$

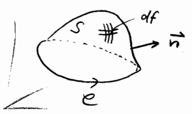
$= \rho_0 2\pi a^2(0+\frac12) = \rho_0\pi a^2$

Nebenprodukt des letzten Bsp: zu $\rho_0=1$, $a=1$ ist

$\pi = \int d^2r\, e^{-r^2} = \int dx\int dy\, e^{-x^2-y^2} = (\int dx\, e^{-x^2})^2$

$\Rightarrow \int dx\,e^{-x^2} = \sqrt\pi$, $\int_0^\infty dx\,e^{-x^2} = \frac12\sqrt\pi$

Oberflächen-Int.



gegeben: S, Rand $\mathcal C$ mit Richtung,

$\frac{\text{etwas}}{\text{Fläche}} = \phi(\vec r), \vec A(\vec r)$.

Sei $\vec n$ ein Normalenvektor (Einheits-Vektor nach "außen" [rechte-Hand-Regel])

⇒ kann $df\cdot\vec n =: d\vec f$ bilden.

also: es gibt 5 Arten $\int_S$: $\int_S df\cdot\begin{Bmatrix}\phi\\ \vec A\end{Bmatrix}$, $\int_S d\vec f\begin{Bmatrix}\phi \\ \cdot\vec A \\ \times \vec A\end{Bmatrix}$

Anwendungs-Bsp: Strom durch Fläche S =: I_S

zu gegebener Ladungs-Stromdichte $\vec j$

Strom = $\frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}$, $\vec j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}}\,\vec e$

nur $j_\perp = j_{\parallel\vec n}$ erzeugt Strom $df\cdot j_{\parallel\vec n} = df(\vec j\cdot\vec n) = d\vec f\cdot\vec j$

$\Rightarrow I_S = \int_S d\vec f\cdot\vec j(\vec r)$

Ausrechnen?! S gegeben ⇒ finde $\vec r(s,t)$

dann $\partial_s\vec r =: \vec r\,'$ und $\partial_t\vec r =: \dot{\vec r}$ bilden

brauche Flächenelement $d\vec f$:

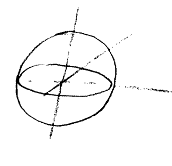
$d\vec r_1 = ds\,\vec r\,'$, $d\vec r_2 = dt\,\dot{\vec r}$

$d\vec f = d\vec r_1\times d\vec r_2 = ds\,dt\,\vec r\,'\times\dot{\vec r}$

$I_S = \int_{F \text{ in } s\text{-}t\text{-Ebene}} ds\,dt\,\underbrace{(\vec r\,'\times\dot{\vec r})\cdot\vec j}_{\text{von } s,t \text{ abhängig}}$

⇒ habe auf ebenes Flächen-Int zurückgeführt.

Bsp Kugeloberfläche



$S_R = 2\cdot\int_{S_{oben}} df$

s,t: Polarkoord. ρ,φ in xy-Ebene

$\vec r(\rho,\varphi) = (\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi), \sqrt{R^2-\rho^2})$

$S_R = 2\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\, |\vec r\,'\times\dot{\vec r}|\cdot\{\phi=1\}$

$\vec r\,' = \partial_\rho\vec r = (c,s,-\frac{\rho}{r})$, $\dot{\vec r} = \partial_\varphi\vec r = (-\rho s,\rho c, 0)$

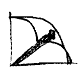
$\vec r\,'\times\dot{\vec r} = (\frac{\rho^2 c}{r}, \frac{\rho^2 s}{r}, \rho)$

$|\vec r\,'\times\dot{\vec r}| = \sqrt{\frac{\rho^4}{r^2}+\rho^2\frac{r^2}{r^2}} = \frac{\rho R}{r}$

$= 2\cdot 2\pi R\int_0^R d\rho\,\underbrace{\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}}_{=\partial_\rho[-\sqrt{R^2-\rho^2}]}$

$= 4\pi R^2$

Test Kugelvolumen V_R

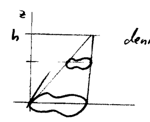


könnte V_R aus infin. Pyramiden ($\sim df$, ~ Höhe R) aufbauen.

Es muß $V_R = \int \text{Pyr.-Vol.} = \int df\cdot R\cdot\lambda = \lambda R S_R$ gelten.

$\lambda = ?$

Beh.: Jede Pyramide hat Vol. $=\frac13\cdot$ Grundfläche · Höhe



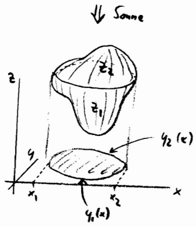
denn: $V_{F,h} = \int_0^h dz\,F\cdot(\frac{h-z}{h})^2 = \frac{F}{h^2}[h^2z - hz^2 + \frac{z^3}{3}]_0^h$

$= \frac13 Fh \Rightarrow \lambda=\frac13$

$\frac{4\pi}{3}R^3 \stackrel{?}{=} \frac13\cdot R\cdot 4\pi R^2$ ✓

((Welt nicht nur aus Drähten, Häuten usw — auch aus Kartoffeln!))

Volumenintegral



gegeben: $\frac{\text{etwas}}{\text{Volumen}} =: \phi(x,y,z)$

und V, d.h. $x_1, x_2, y_1(x), y_2(x)$

und $z_1(x,y), z_2(x,y)$.

$dx\,dy\,dz =: d^3r$

$$\left.\begin{matrix}\text{Gesamtes}\\ \text{etwas in } V\end{matrix}\right\} = \int_V d^3r\, \phi$$

Auswertung kartesisch $= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\ \phi(x,y,z)$

↳ Würfel in Säule bei x,y

↳ Σ Säulen in Scheibe bei x

↳ Σ Scheibchen

wenn $\rho(\vec r) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}}$, dann (gesamte Ladung in V) $= Q_V = \int_V d^3r\, \rho(\vec r)$

wenn $\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Vol.}}$, dann

$$\left.\begin{matrix}\text{Vol.}\\ M\\ M\vec R\\ I_{jk}\end{matrix}\right\} = \int_V d^3r \begin{cases}1\\ \rho\\ \rho\vec r\\ \rho(r^2\delta_{jk} - x_j x_k)\end{cases}$$

$$V(\vec r) = -\gamma m \int_V d^3r'\, \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

4 Fragen

1) $V_R \stackrel{?}{=} \int_V d^3r \cdot 1 = 8 \cdot \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz$, Ja.

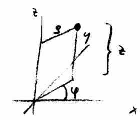
2) obige Formeln ohne V-Index schreiben, d.h. $\int$ über ganzen Raum? Ja, $\rho := 0$ außerhalb V.

3) Wie folgen $\int_{\text{Dnlt}}, \int_{\text{Kut}}$ aus $\int_V$? ⇒ s. §6.6

4) 3D "runde" Koord.? ⇒ jetzt, §6.5.

6.5. Krummlinige Koord.

Zylinderkoord.: ρ, φ, z



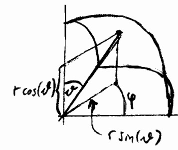
$x = \rho\cos(\varphi)$

$y = \rho\sin(\varphi)$

$z = z$

$d^3r = \underbrace{d\rho\ \rho\, d\varphi\ dz}_{\text{Länge}^3\ ✓}$ = "Balkon-Vol. am Wasserturm"

Kugelkoord.: r, ϑ, φ



$x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$

$y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$

$z = r\cos(\vartheta)$

$d^3r =$ Höhe · (NS-Breite) · (W-O Breite)

$= dr \cdot r\,d\vartheta \cdot r\sin(\vartheta)\,d\varphi$

$= dr\ r^2\, \underbrace{d\vartheta\,\sin(\vartheta)\,d\varphi}_{=:\, d\Omega \,=\, \text{Haus-Grundfläche}/r^2}$

→ "Haus-Grundfläche"

Bsp $V_R = \int_{\text{Kugel}(R)} d^3r \cdot 1$

$= \int_0^R dr\, r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta\,\sin(\vartheta)}_{2} \underbrace{\int_{(2\pi)} d\varphi}_{2\pi}$

$\left(\left(\Rightarrow \int d\Omega = 4\pi = \text{der max. Raumwinkel} = S_R/R^2 \Rightarrow S_R = 4\pi R^2\ ✓✓ \right)\right)$

$= \frac{4\pi}{3}R^3$ ✓✓

Gravi-Pot. bei kugelförmiger Massenverteilung $\rho(r)$:

ohne Pfeil

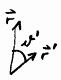
$$V(\vec r) = -\gamma m \int d^3r'\, \frac{\rho(r')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

Nenner $= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec r\vec r\,'}$

$= -\gamma m \int_0^\infty dr'\, r'^2 \rho(r') \int_{(2\pi)} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin(\vartheta')\, \frac{1}{\sqrt{}}$

während $\vec r\,'$-Integration ist $\vec r$ fest.

⇒ orientiere $\vec r\,'$-Kugelkoord. um $\vec r$ als "z-Achse"



⇒ $\vec r\vec r\,' = rr'\cos(\vartheta')$

$= -\gamma m\, 2\pi \int_0^\infty dr'\, r'^2 \rho(r') \int_0^\pi d\vartheta'\, \frac{\sin(\vartheta')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\vartheta')}}$

generell:

$\int_0^\pi d\vartheta\,\sin(\vartheta)\, f(\cos(\vartheta)) = \int_{-1}^1 du\, f(-u) = \int_{-1}^1 du\, f(u)$

Subst. $u = -\cos(\vartheta)$

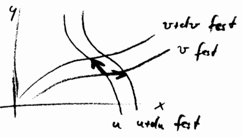
$du = d\vartheta\,\sin(\vartheta)$

$= -\gamma m\, 2\pi \int dr'\, r'^2 \rho(r') \int_{-1}^1 du \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'u}} = \partial_u \frac{1}{rr'} \sqrt{} \right)$

$= -\gamma m\, \frac{2\pi}{r} \int_0 dr'\, r' \rho(r') \left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2}\right]$

Jacobi-Determinante

allg. krumme Koord., hier 2D ((denke an Polar Koord.)):



$$\left.\begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{matrix}\right\} \vec r(u,v)$$

$d^2r = |d\vec r_1 \times d\vec r_2|$

mit $d\vec r_1 = du\, \partial_u \vec r$

und $d\vec r_2 = dv\, \partial_v \vec r$.

$d^2r = du\,dv\, |(\partial_u x, \partial_u y, 0) \times (\partial_v x, \partial_v y, 0)|$

$= du\,dv\, |(0, 0, (\partial_u x)\partial_v y - (\partial_u y)\partial_v x)|$

$= du\,dv\, \left| \underbrace{\begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix}}_{\text{Jacobi-Det.}} \right|$ $\left(\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \right)\right)$

$$\Rightarrow \boxed{ d^2r = du\,dv\, |J| \quad \text{mit } J = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix} =: \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} }$$

Bsp Test mit Polarkoord: $u = r$, $v = \varphi$

$x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$ $\quad J = \begin{vmatrix} c & s \\ -rs & rc \end{vmatrix} = r$ ✓✓

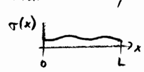
Bsp Test mit Kugelkoord: ...

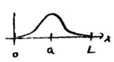
... $J = \ldots = r^2\sin(\vartheta)$ ✓✓

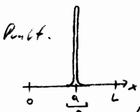
Durchatmen! bisher: anstrengend! jetzt: einfach! und schön...

6.6. Delta-Funktion (der Physiker)

man kann quetschen. Bei Stab auf Punkt.



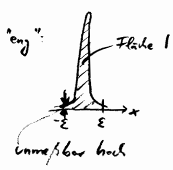




M bleibt konstant. $\int_0^L dx\, \frac{\sigma(x)}{M} = 1$ → $\delta(x-a)$

1.Def.

$\boxed{\delta(x) := \text{jede unmeßbar eng bei } x = 0 \text{ konzentrierte Fkt mit } \int dx\,\delta(x) = 1}$



<u>Bemerkung:</u> "dünn, hoch, Fläche 1" genügt.
nicht $\varepsilon \to 0$ ausführen.
man gehe mit $\delta(x)$ um wie mit jeder normalen Fkt,
lediglich <u>sieht</u> man ihre Breite nicht mehr.

Mit normaler weicher Physiker-Fkt $f(x)$ folgt die

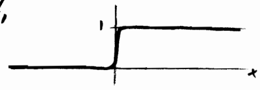
<u>2. Def.</u> $\boxed{\begin{array}{l}(\text{"definierende Eigenschaft"}) \\ \int dx\, \delta(x-a)\, f(x) = f(a)\end{array}}$

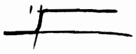
((denn: f wird in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ zu $f(a)$))

<u>Bem.:</u> Meistens steht δ unter einem Integral, oder wartet auf eins.

<u>3. Def.</u> $\boxed{\delta(x) := \partial_x \theta(x)}$

wobei $\theta(x)$ die <u>Stufenfunktion</u> ist,
also eine in ε-Bereich von
0 auf 1 ansteigende Fkt:



((denn: $\int_{-\infty}^{x} dx'\, \delta(x') =$  $= \theta(x)$
∂_x auf beiden Seiten $\Rightarrow \delta(x) = \partial_x \theta(x)$))

Definierende Eigenschaft von $\theta(x)$:
$b > a$, $\int_{-\infty}^{b} dx\, f(x)\, \theta(x-a) = \int_a^b dx\, f(x)$

Test via Part. Int. $\quad u' \quad v$
$\quad u = F(x) \quad v' = \delta(x-a)$

$F(b) - \int_{-\infty}^{b} dx\, F(x)\, \delta(x-a) =$
$F(b) - F(a) = \int_a^b dx\, \partial_x F(x)$

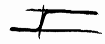
"$\theta(0) = ?$" — kranke Frage!

<u>δ-Darstellungen</u>

- $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$

denn: dünn ✓ hoch ✓ $\int \text{rhs} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int dx\, e^{-x^2/\varepsilon^2} \overset{x\to\varepsilon x}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx\, e^{-x^2} = 1$ ✓

(("$\delta(x) = \alpha\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$, $\alpha = ?$" $\Rightarrow 1 \overset{!}{=} \int dx\, \alpha\, e^{\cdots} = \ldots \Rightarrow \alpha$))

- $\theta(x) = \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$, 

$\delta(x) = \partial_x \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$

- $\delta(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  , $1 \overset{?}{=} \frac{1}{\pi}\int dx\, \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int dx\, \frac{\sin(x)}{x}}_{=\pi,\ \text{später} \ldots\ ((\text{s.u.}))}$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk \left(\overbrace{\cos(kx)}^{\partial_k \frac{\sin(kx)}{x}} + i \sin(kx) \right)$, Euler
weil ungerade

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, e^{ikx}$

- $\theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$\delta(x) = \partial_x(\,\times\,) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon - ix} + \frac{1}{\varepsilon + ix}\right)$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk \left(\underbrace{e^{ikx-\varepsilon k}}_{\text{denn } = \partial_k \frac{e^{ikx-\varepsilon k}}{ix-\varepsilon}} + \text{c.c.} \right)$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk\, e^{-\varepsilon k}\, 2\cos(kx)$, $e^{-\varepsilon k} \to e^{-\varepsilon|k|}$

$= \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{-\varepsilon|k|}\left(\cos(kx) + i\sin(kx)\right)$
weil ungerade

$= \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\, e^{-\varepsilon|k|}$ $\Leftarrow$ Fourier! (später)

((in Lit.: konvergenzerzeugendes $e^{-\varepsilon|k|}$ oft weggelassen.)) $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}$

(($J(k,\varepsilon) \equiv \int dx\, \frac{\sin(kx)}{x}\, e^{-\varepsilon|x|}$, $\varepsilon \to 0^+$, $\partial_k J = \int dx\, \cos(kx)\, e^{-\varepsilon|x|} = 2\int_0^\infty dx\, \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)e^{-\varepsilon x} = \frac{2\varepsilon}{k^2+\varepsilon^2}$

$\Rightarrow J(k,\varepsilon) = \text{Const}_\varepsilon + 2\arctan\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$; J ungerade in k $\Rightarrow$ Const $= 0$
$\Rightarrow J(1, 0^+) = \pi \quad \Rightarrow \int dx\, \frac{\sin(x)}{x} = \pi$))

- allg. Darst. $\quad \delta(x) = \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$
aus gegebenem $g(x)$, mit $F = \int dx\, g(x)$

<u>δ-Formeln</u>

- Dimension: $[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$
- $\delta(-x) = \delta(x)$ ((denn: $\int dx\, \delta(-x) f(x) = \int dx\, \delta(x) f(-x) = f(0)$))
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ ((denn: $\delta(ax) \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(ax)^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\pi}\frac{(\varepsilon/|a|)}{x^2+(\varepsilon/|a|)^2} = \frac{1}{|a|}\delta(x)$))
- etc, siehe $\boxed{\text{Sonderblatt}}$
- 2D: $\int d^2r\, \delta^{(2)}(\vec r - \vec a)\, \phi(\vec r) = \phi(\vec a)$
3D: $\int d^3r\, \delta^{(3)}(\vec r - \vec a)\, \phi(\vec r) = \phi(\vec a)$
$\Rightarrow$ kann kartesisch denken und $\delta(\vec r) = \begin{cases} 2D: & \delta(x)\delta(y) \\ 3D: & \delta(x)\delta(y)\delta(z) \end{cases}$
schreiben, muss aber nicht ($\to$ Ü 56 f-h)

Bem.: $\delta(x-a)$ ist die Kontinuums-Version des Kronecker-δ:
$\sum_{k=1}^{3} \delta_{jk} f_k = f_j \quad \Leftrightarrow \quad \int dx\, \delta(a-x) f(x) = f(a)$

<u>Physik mit δ</u>

Kann mit δ Häute, Drähte, Punkte in 3D formulieren.
Dichte enthaltende Formeln (z.B. $V = -\gamma m \int d^3r'\, \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$)
bleiben gültig, nur $\rho(\vec r)$ $\left(= \frac{\text{Masse od. Ladung}}{\text{Vol.}}\right)$ spezialisiert sich:

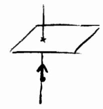
<u>z.B.</u> • hom. Scheibe (M,R) : $\rho(\vec r) = A\, \delta(z)\, \theta(R-\rho)$
$M \overset{!}{=} \int d^3r\, \rho(\vec r) = A \int_0^R d\rho\, \rho \underbrace{\int d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int dz\, \delta(z)}_{1} = A\frac{R^2}{2}2\pi \Rightarrow A = \frac{M}{\pi R^2}$

• hom. Stab (M,L) : $\rho(\vec r) = B\, \delta(y)\, \delta(z)\, \theta(x(L-x))$
$M \overset{!}{=} B \int_0^L dx \int dy \int dz\, \delta(y)\delta(z) = BL \Rightarrow B = \frac{M}{L}$

- Punktmasse (M) am Ursprung
$\rho(\vec r) = C\delta(\vec r)$, $M \overset{!}{=} \int d^3r\, C\,\delta(\vec r) = C \Rightarrow \rho(\vec r) = M\delta(\vec r)$

- Punktladung (m,q) mit $\vec r_0(t)$
((jetzt $\rho = \frac{\text{Ladung}}{\text{Vol.}}$, $\vec j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}}$))
$\rho(\vec r, t) = q\, \delta(\vec r - \vec r_0(t))$
$\vec j(\vec r, t) = \dot{\vec r}_0(t)\, q\, \delta(\vec r - \vec r_0(t))$
(($\Rightarrow$ Teilchenstrahlen ; DESY ; CERN !))

<u>Bsp</u> $\quad Q$ und I zu $\vec r_0(t) = vt\,\vec e_3 = (0,0,vt)$
$Q = \int d^3r\, \rho(\vec r) = q\int d^3r\, \delta(\vec r - \vec r_0(t)) = q$
$\underset{xy\text{-Ebene}}{I(t)} = \int_{z=0} d\vec f \cdot \vec j = \int dx \int dy\, \vec e_3 \cdot v\vec e_3\, q\, \delta(\vec r - vt\vec e_3)\Big|_{z=0}$
$= vq \int dx \int dy\, \delta(x)\delta(y)\delta(0-vt)$
$= vq\, \delta(vt) = q\,\delta(t)$



- Hohlkugel (M,R) um Ursprung 

$\rho(\vec r) = \alpha\,\delta(r-R)$, $M \overset{!}{=} \int d^3r\, \alpha\,\delta(r-R) = \alpha 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \delta(r-R) = \alpha 4\pi R^2$
$\Rightarrow \rho(\vec r) = \frac{M}{4\pi R^2}\delta(r-R)$

<u>Bsp</u> Gravitationspotential einer Hohlkugel (M,R) (vgl. Ü 55a)
((benutze $V(\vec r)$ für $\rho(r)$, Skript S. 71))
$V(\vec r) = -\gamma m \frac{2\pi}{r}\int_0^\infty dr'\, r'\, \frac{M}{4\pi R^2}\delta(r'-R)\left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2}\right]$
$= -\gamma m \frac{M}{2Rr}\left[|r+R| - |r-R|\right]$ $= \begin{cases} 2R & \text{für } r > R \text{ (außen)} \\ 2r & \text{für } r < R \text{ (innen)} \end{cases}$
$= \begin{cases} -\frac{\gamma m M}{r} & \text{außen} \\ -\frac{\gamma m M}{R} & \text{innen} \end{cases}$

(($\Rightarrow$ <u>innen</u> <u>keine</u> Kraft! Hohlwelt $\Rightarrow$ umsonst nach USA, nur abstoßen;
Realität? Ladung Q auf Metallkugel sammelt sich auf Oberfläche!))

Zusatzmaterial zu EMTP II 15.05.2007

Definierende Eigenschaft der **Delta–Funktion**: $\int dx\, \delta(x-x_0)\, f(x) \;=\; f(x_0)$

δ–Darstellungen:

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{2\varepsilon} \quad \text{für } -\varepsilon < x < \varepsilon \quad \text{und 0 sonst}$$

$$\delta(x) \;=\; \partial_x \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}} = -\partial_x \frac{1}{\mathrm{e}^{x/\varepsilon}+1}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad , \quad \delta(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon^2}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, \cos(kx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, \mathrm{e}^{ikx}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int dk\, \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon|k|} = \frac{1}{2\pi} \int dk\, \mathrm{e}^{ikx} \left(\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\right)$$

allgemein: $\delta(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ mit $F := \int dx\, g(x)$

Stufenfunktion θ: $\partial_x \theta(x) = \delta(x)$, $\partial_x \Big(\theta(x)\text{–Darst.}\Big) \;=\; \delta(x)\text{–Darst.}$

$\theta(x) = 1 - \theta(-x)$, $\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{|x|} = 2\,\theta(x) - 1$

δ–Formeln: $\delta(-x) = \delta(x)$, $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\Big(\delta(x-a)+\delta(x+a)\Big)$

allgemein: $\delta\big(f(x)\big) \;=\; \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\, \delta(x-x_n)$, x_n sind die Nullstellen von f

$\frac{1}{i}\int_0^\infty dk\, \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon k} = \frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$, $\mathcal{P}$ für *Principal value* (Hauptwert)

$\int dx\, f(x)\, \delta'(x) = -f'(0)$, $-x\,\delta'(x) = \delta(x)$, $\int dx\, \delta(x-a)\, \delta(x-b) \;=\; \delta(a-b)$

δ–Physik:

Punktladung q bei $\vec{r}_0(t)$: $\varrho(\vec{r},t) = q\, \delta\Big(\vec{r}-\vec{r}_0(t)\Big)$, $\vec{\jmath}(\vec{r},t) = \dot{\vec{r}}_0(t)\; q\, \delta\Big(\vec{r}-\vec{r}_0(t)\Big)$

Geladener Kreisring : $\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi R}\, \delta(\varrho - R)\, \delta(z)$

Geladene Metallkugel : $\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\, \delta(r-R)$

Der Ortsoperator X (Wirkungsweise $x\cdot$) hat gemäß $x\,\delta(x-a) = a\,\delta(x-a)$ die kontinuierlich mit a numerierten Eigenfunktionen $\delta(x-a)$.

Sei L ein (auf x–Abh. wirkender) linearer Operator, und $L\,y(x) = f(x)$. Gesucht ist $y(x)$. Wenn man dieses Problem für eine „Punktquelle", d.h. das Hilfsproblem $L\, G(x,a) = \delta(x-a)$ lösen kann und somit eine „Greensche Funktion" $G(x,a)$ kennt, dann erhält man ein $y(x)$ durch Anwenden des Operators $\int da\, f(a)$ auf beiden Seiten des Hilfsproblems:

$$\begin{aligned} \int da\, f(a)\, L\, G(x,a) \;&=\; \int da\, f(a)\, \delta(x-a) \\ L \int da\, f(a)\, G(x,a) \;&=\; f(x) \qquad \curvearrowright \qquad y(x) = \int da\, f(a)\, G(x,a) \quad . \end{aligned}$$

((Metallkugel wie Hohlkugel, denn:

Elektrostatik $\Rightarrow$ unbewegliche Pkt-Ladung Q übt auf Probeladung q die Kraft $\vec{K} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ aus.

(Kenne $\vec{K}$ aus Experiment; oder Maxwell-Gln.)

$\vec{K} \overset{?}{=} -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V) \Rightarrow V \equiv q\phi$, $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

"Coulomb-Potential"))

7. Gewöhnliche DGLN

Rückblick auf WS , auf etwas höherem Niveau

WS - Lösungsmethoden: Ansatz, $u+a$, $v=\frac{1}{y}$, $e^{\mu t} w$, ..

jetzt: zuerst besser sprechen ; dann 10 Fälle

7.1 Vokabeln, 3 Sätze

Bsp: Der getriebene, 1D harmonische Oszillator mit Reibung,

$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - m\omega^2 x + m\,k(t)$

folgt der Dgl. $y'' + \gamma y' + \omega^2 y = f(x)$.

Diese ist
- gewöhnlich ($\neq$ partiell : $(\partial_t - \partial_x) y = k(x,t)$),
- 2. Ordnung (max. '-Anzahl),
- linear (y, y', y'' hoch eins),
- inhomogen ($f \neq 0$),
- explizit ($\neq F(y'', y', y, x) = 0$).

Die allg. Lsg. einer Dgl. n-ter Ordnung ist eine n-parametrige Schar von Lsn.

Bsp: $y'' + \omega^2 y = k_0$, d.h. $L_2 y = k_0$ mit $L_2 = \partial_x^2 + \omega^2$

hat $y_{allg.}(x) = \underbrace{\frac{k_0}{\omega^2}}_{\text{spezielle Lsg. der inhomogenen.}} + \underbrace{A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)}_{\text{allg. Lsg. der hom. Dgl.}}$

((Erinnerung: Fktn. lin. unabh. $\Leftrightarrow$ aus LK (Fktn.) = 0 folgt Koeffs. = 0))

Zur allg. lin. Dgl. n-ter Ordnung, d.h.

$$\boxed{L_n y(x) = f(x) \;, \quad \text{mit } L_n = \partial_x^n + f_{n-1}(x)\,\partial_x^{n-1} + \ldots + f_0(x)}$$

gibt es 3 Sätze:

- $L_n y = 0$ hat genau n lin. unabh. Lsn: $y_j(x)$, $j = 1, .., n$
- •• Die allg. Lsg von $L_n y = 0$ ist $y_{hom} = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$
- ••• Die allg. Lsg von $L_n y = f$ ist $y_{allg} = y_{hom} + y_{sp}$, wobei y_{sp} eine spez. Lsg von $L_n y = f$ ist.

((Beweis-Ideen:

- denke an Newton. kann bei $x=0$ starten mit AB $\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ oder ...

  $\Rightarrow$ es gibt also n Möglichkeiten (und nicht mehr; sonst LK)
- •• hat n und löst $L_n y = 0$
- ••• $L_n y_{allg} = f$

  $\underline{L_n y_{sp} = f}$

  $L_n(y_{allg} - y_{sp}) = 0$, d.h. $y_{allg.} - y_{sp.} = y_{hom.}$))

7.2 10 Fälle

"Repertoire", Wahrnehmungsraster; schon $F' = f$ ging fast nie!

① Potenzansatz $\quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

$\boxed{\text{hom, lin, } x\text{-} = \partial\text{-Potenz}}$

$y = x^\lambda$, $\lambda(\lambda-1)x^2 x^{\lambda-2} - 2\lambda x x^{\lambda-1} + 2x^\lambda = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$\Rightarrow y_{allg} = C_1 x + C_2 x^2$

② neue Variable (viele Möglichkeiten!)

setze $x = x(\tau)$

benutze $y(x) = y(x(\tau)) = u(\tau) = u(\tau(x))$

habe $y' = u'^{\tau} \cdot \tau'^{x}$ usw. (y'', ...)

erhalte Dgl. für $u(\tau)$

Bsp $\quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ (s.o.) , $0 < x$

setze $x = e^\tau$; $y(x) = y(e^\tau) = u(\tau) = u(\ln(x))$,

$y' = u'^{\tau}\frac{1}{x} = u'^{\tau} e^{-\tau}$, $y'' = u''\frac{1}{x^2} - \frac{u'}{x^2} = u'' e^{-2\tau} - u' e^{-2\tau}$,

erhalte $e^{2\tau}(u'' - u')e^{-2\tau} - 2e^\tau u' e^{-\tau} + 2u = 0$

$u'' - 3u' + 2u = 0 \qquad (*)$

③ e-Ansatz : bei $\boxed{\text{lin, hom, } \underline{\text{konst}} \text{ Koeff.}}$

Bsp $\quad (*)$ mit $u = e^{\omega t}$ gibt $\omega^2 - 3\omega + 2 = 0 \Rightarrow \omega = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$u_{allg} = C_1 e^\tau + C_2 e^{2\tau}$

Bsp $\quad (\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2)\,x(t) = 0$ (ham. Oszi. mit Reibung)

$x = e^{\omega t}$, $\omega^2 + 2\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$, $\omega = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ ($\omega_0 < \gamma$)

$x_{allg}(t) = C_1 e^{-\gamma t - \Gamma t} + C_2 e^{-\gamma t + \Gamma t}$

$\gamma < \omega_0$: $\omega = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\underline{\gamma = \omega_0}$: nur 1 Lsg ? falsch !

studiere $\omega_0 \to \gamma$: $\Gamma = \varepsilon$, dann $\varepsilon \to 0$

$$X_{allg}^{\gamma=\omega_0}(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{-\varepsilon t} + C_2 e^{\varepsilon t}\right) \quad , \quad e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$
$$= e^{-\gamma t}\left(\underbrace{C_1 + C_2} + \underbrace{(C_2 - C_1)\varepsilon}\, t + O(\varepsilon^2)\right)$$
$$= e^{-\gamma t}\left(A + B\, t \right)$$

(4) neue Fkt. (viele Möglichkeiten !)

<u>Bsp</u> allg. lin. inhom. Dgl. 1.O. $\boxed{y' + P(x)\, y = Q(x)}$

y_{hom}: $\frac{y'}{y} = \ln(y)'^{x} = -P(x)$

$\ln(y) = -\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')$

setze $y = y_{hom} \cdot u(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')}\, u(x)$

$\Rightarrow \cancel{-P e^{-} u} + e^{-} u' + \cancel{P e^{-} u} = Q$

$u' = Q e^{+}$, $u = \int_{x_1}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{+\int^{x'} \cdots} + C$

$$y_{allg}(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')}\left(C + \int_{x_1}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{\int_{x_0}^{x'} dx''\, P(x'')}\right)$$

„P-Q-Formel".

3 Konstanten ?↯ Nein, nur 2: bei (x_0, x_1)-Änderung ändert sich C.

(5) Variation der Konstanten

<u>Bsp</u> allg. lin. inhom. Dgl. 2.O. $\boxed{y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x)}$

<u>wenn</u> man <u>eine</u> Lsg $y_1(x)$ der hom. Dgl. kennt,
dann reduziert $y = y_1 \cdot u$ die Ordnung um 1.

$\ulcorner \partial_x^n f \cdot g = (\partial_x^{vorne} + \partial_x^{hinten})^n f \cdot g \ \lrcorner$

$\underline{y_1'' u} + 2 y_1' u' + y_1 u'' + \underline{a y_1' u} + a y_1 u' + \underline{b y_1 u} = f$

$\underline{\quad} = 0$ nach Voraussetzung

haben also $y_1 u'' + (2 y_1' + a y_1) u' = f$

setze $u' =: v$, $v' + \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + a\right) v = \frac{f}{y_1}$

ist 1.O. $\Rightarrow$ nun P-Q-Formel!

(6) Trennung der Variablen

((erstmals <u>nicht</u>-linear. Fall))

$\boxed{y'(x) = f(x)\, g(y)}$, alle y nach links

$$\underbrace{\frac{1}{g(y)}}_{=\partial_y H(y)} y'(x) = \underbrace{f(x)}_{=\partial_x F(x)} \qquad \text{Stammfktn suchen}$$

$\partial_x H(y(x)) = \partial_x F(x) \quad \Rightarrow \quad H(y) = F(x) + C$

((zur Not : $y' = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{g} = dx \cdot f$, $\int_{y_0}^{y} dy' \frac{1}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} dx'\, f(x')$))

(7) Reduktion(en) der Ordnung

(a) $\boxed{y'' = f(y, y')}$ Besonderheit: kein x

setze $y' = p(y)$: $y'' = p'^{y} y'^{x} = p'^{y} p$

$\Rightarrow p'^{y} = \frac{1}{p} f(y, p)$ ist Dgl 1.O. für $p(y)$

<u>Bsp</u>: $m\ddot{x} = -\partial_x V(x)$, kein t, setze $\dot{x} = v(x)$, Strich $= \partial_x$,

$m v v' = \left(\frac{m}{2} v^2\right)' = -V'(x)$, $\frac{m}{2} v^2(x) = E - V(x)$.

(b) $\boxed{y'' = f(y', x)}$ Besonderheit: kein y

setze $y' = u$, $u' = f(u, x)$ ist Dgl 1.O.

(c) Landau-Trick : wenn $L = L_1 L_2$, d.h. $\boxed{L_1 L_2\, y = f}$,

setze $u = L_2 y$, löse $L_1 u = f$ für u, danach $L_2 y = u$.

<u>Bsp</u>: $\ddot{x} + \omega^2 x = b(t)$

$\underbrace{(\partial_t + i\omega)}_{L_1} \underbrace{\underbrace{(\partial_t - i\omega)}_{L_2} x}_{u} = b(t)$, löse $(\partial_t + i\omega) u = b(t)$ usw.

(8) Dgl. ≥ 2.O. $\xrightarrow{\quad}$ ($\xleftarrow{\quad}$) Dgl-System 1.O.

((geht immer ; Computer froh über System))

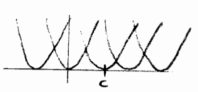
<u>Bsp</u> $y'' = f(y', y, x)$

setze $y' = z$ $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} z' = f(z, y, x) \\ y' = z \end{array} \right\}$

(9) singuläre Lsn (nur bei nichtlinearen Dgln)

<u>Bsp</u> $y'^2 = 4y$, $y' = \pm 2\sqrt{y}$, TdV: $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{y}}} y' = \pm 1$ $= \partial_y \sqrt{y}$

$\Rightarrow \sqrt{y}'^{x} = \pm 1$, $\sqrt{y} = \pm x + C$, $y = (\pm x + C)^2$, $y_{allg} = (x - C)^2$



Die Einhüllende $y \equiv 0$ löst die Dgl auch ! — "Singuläre Lsg"

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{alle} \\ \text{Lsn} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{in der} \\ \text{allg. Lsg} \\ \text{enthaltene} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{eventuelle} \\ \text{singuläre} \\ \text{Lsn} \end{array} \right\}$$

(10) Greensche Funktion (!) (s. auch Sonderblatt)

Problem : $L y(x) = f(x)$, gesucht: $y(x)$ für $x \in \{\text{Bereich}\}$.

ersetze "Ursache" $f(x)$ durch "Punkt-Ursache" $\delta(x-a)$

Hilfsproblem: $\boxed{L\, G(x,a) = \delta(x-a)}$

<u>Wenn</u> Lsg $G(x,a)$ (die Greensche Fkt von L) bekannt,

<u>dann</u> $\int_B da\, f(a)\, L \overset{\text{wirkt}}{G(x,a)} = \int_B da\, f(a)\, \delta(x-a)$

$\underbrace{L \int_B da\, f(a)\, G(x,a)}_{= y(x)} = f(x)$

$\Rightarrow$ <u>ein</u> G gibt <u>ein</u> y , d.h. y_{sp} in $y = y_{hom} + y_{sp}$

((haben Antwort y aus Punkt-Ursache – Antworten G zusammengesetzt.))

<u>Bsp</u> $\dot{v} = -g$ (freier Fall) , $v(t) = ?$

$v_{hom} = C$, Bereich : $0 < t < T$, $L_1 = \partial_t$

Hilfsproblem: $\partial_t G(t,a) = \delta(t-a)$

aufleiten : $G(t,a) = \Theta(t-a) + A$

$\Rightarrow v(t) = \int_0^T da\, (\Theta(t-a) + A)(-g)$

$= -g \int_0^t da \ \underbrace{- g A T}_{C} = -gt + C$

<u>Bem.</u>: $G(t,a)$ hängt nur von $t-a$ ab

<u>allg.</u>: wenn L "translationsinvariant",
d.h. $[L f(x)]_{x \to x-a} = L f(x-a)$
(also z.B. $L = \partial_x, \partial_x^2, \partial_x + C$; <u>nicht</u> $x \partial_x$),
dann genügt es, $L\, G(x) = \delta(x)$ zu lösen,
und dann $G(x,a) = G(x-a)$ zu setzen.

<u>Bsp</u> $\dot{v} + \gamma v = b(t)$

((hat via "P-Q-Formel" (4) ($P = \gamma$, $\int^t dt'\, P = \gamma t$)
die allg. Lsg $v = e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t dt'\, b(t')\, e^{\gamma t'}\right)$))

jetzt via Green. $L = (\partial_t + \gamma)$ ist transl.-inv.

$\rightsquigarrow$ muß $(\partial_t + \gamma)\, G(t) = \delta(t)$ lösen.

z.B. Ans ("γ muß weg") $G(t) = u(t)\, e^{-\gamma t}$

$\Rightarrow u' e^{-\gamma t} - \gamma u e^{-\gamma t} + \gamma u e^{-\gamma t} = \delta(t)$

$u' = \delta(t)\, e^{\gamma t} = \delta(t) \cdot 1$, $u = const_t + \Theta(t)$

also $G(t) = (const_t + \Theta(t))\, e^{-\gamma t}$

und $v(t) = \int_0^T da\, b(a)\, (const + \Theta(t-a))\, e^{-\gamma(t-a)}$

$= e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t da\, b(a)\, e^{\gamma a}\right)$ ✓✓.

<u>Bem.</u>: • L mußte nur <u>linearer</u> Op. sein : es gibt viele L's.
• Punkt-Ursache in höheren Dim.: $\delta(\vec{r})$ bzw. $\delta(\vec{r})\, \delta(t)$.

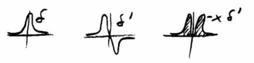
((Bem.: L transl.-inv. $\Leftrightarrow$ $[Lf(x)]_{x\to x-a} = L f(x-a)$

(Skript S. 44: Taylor) d.h. $e^{-a\partial_x} L f = L e^{-a\partial_x} f \quad \forall f$

d.h. $0 = L e^{-a\partial_x} - e^{-a\partial_x} L \equiv [L, e^{-a\partial_x}]$

Kommutator
$[a,b] \equiv ab - ba$))

Bem. $-x\delta'(x) \overset{?!}{=} \delta(x)$ (s. Sonderblatt) ($\to$ Ü 636)

denn:  $\Rightarrow$ beide Seiten hoch, schmal

Vorfaktor ok? $\int dx\, (\underbrace{-x}_{u}\underbrace{\delta'(x)}_{v'}) = -x\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int dx\, \delta(x) = 1$ ✓

8. Felder

bisher: gew. Dgln, z.B. Newton: nur ∂_t
rechte Seite: $\vec{K}(\vec{r},t)$

„Feld" := etwas $(\vec{r},t)$

kennen schon $T(\vec{r},t)$, $p(\vec{r},t)$, $V(\vec{r},t)$, $\varrho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$, $\vec{v}(\vec{r},t)$,
$\vec{K}(\vec{r},t)$, $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ $\to$ deren Dgln?

z.B. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varrho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}}$

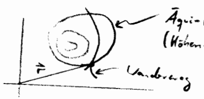
$\Rightarrow$ Maxwell-Gln. brauchen $\vec{\nabla}\cdot$, $\vec{\nabla}\times$, partielle Dgl

Das "etwas" muß sich verhalten bei Koord.-Drehung,
ist also Skalarfeld $\phi(\vec{r},t)$
Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$
(Tensorfeld $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{r},t)$)

8.1. Gradient und Nabla

wollen statische Felder $(\phi(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r}))$ in Nähe der Stelle $\vec{r}$ charakterisieren

z.B. Karte: Berg hat Höhe $h(x,y)$ über Meeresspiegel-Ebene



Steilheit? In Wegrichtung? Richtung des größten Anstiegs?

in 3D: gegeben $\phi(\vec{r})$.
gehe ab $\vec{r}$ in Richtung $\vec{e}$. Erlebe $\phi(\vec{r}+s\vec{e})$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Steilheit}\\ \text{in } \vec{e}\text{-Richtung}\\ \text{bei } \vec{r}\end{array}\right\} = \text{Richtungsableitung}$$
$$= [\partial_s \phi(x+se_1, y+se_2, z+se_3)]_{s=0}$$
$$= e_1\partial_x\phi + e_2\partial_y\phi + e_3\partial_z\phi$$
$$= \vec{e}\cdot(\partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)$$
$$= \vec{e}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

kann verschiedene $\vec{e}$ wählen.
Finde z.B. $\vec{e}\cdot\vec{\nabla}\phi = 0$, d.h. kein Anstieg, d.h. $\vec{e}$ liegt in Äqui-h-Fläche $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\phi$ steht $\perp$ auf Äqui.
Finde z.B. $\vec{e}\cdot\vec{\nabla}\phi = \max$, d.h. $\vec{\nabla}\phi \sim \vec{e}$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix}\text{Einh.-Vektor}\\ \text{in Richtung}\\ \text{max. Zunahme}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{diese}\\ \text{Zunahme}\end{pmatrix}$

$= (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\phi = \operatorname{grad}\phi$

mit $\boxed{\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)}$ = „Nabla-Operator"

$\vec{\nabla}$Skalarfeld heißt „Gradient"
(aber $\vec{\nabla}\cdot$, $\vec{\nabla}\times$ Vektorfeld heißt anders, s. später)
(kann $\vec{\nabla}$ oder ∇ schreiben ..)

$\vec{\nabla}$ ist Vektor

Erinn.: Kap. 4, $\vec{a}$ ist V. $\Leftrightarrow$ $\vec{a}' = D\vec{a}$
$\rightsquigarrow$ Frage, ob $\boxed{\vec{\nabla}' = D\vec{\nabla}}$ Sinn macht

Testen dieser Operator-Identität: $(\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'})\,\phi(\vec{r} = D^T\vec{r}') \overset{?}{=} D\vec{\nabla}\phi$

hiervon die j-te Komp. ($x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$) ist

$(\nabla'\phi)_j = \partial_{x_j'}\phi\left(x_\ell = (D^T)_{\ell m} x_m' = D_{m\ell} x_m'\right) = (\partial_{x_\ell}\phi)\, D_{m\ell}\,\delta_{mj}$

$= D_{j\ell}\,\partial_{x_\ell}\phi = (D\vec{\nabla}\phi)_j$

$\Rightarrow$ also ist $\vec{\nabla}'\phi = D\vec{\nabla}\phi \quad \forall\phi$ ∎

$\vec{\nabla}$ in Kugelkoord.

darf statt der $\vec{e}_j$ in $\vec{\nabla} = \vec{e}_1\partial_x + \vec{e}_2\partial_y + \vec{e}_3\partial_z$
andere orthonormale Basis verwenden, z.B.

$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\,\partial_{\text{Weg n. oben}} + \vec{e}_\vartheta\,\partial_{\text{Weg n. Süden}} + \vec{e}_\varphi\,\partial_{\text{Weg n. Osten}}$

$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = (Sc, Ss, C) \qquad S \equiv \sin(\vartheta)$
$\vec{e}_\varphi = (-s, c, 0) \qquad s \equiv \sin(\varphi)$
$\vec{e}_\vartheta = (Cc, Cs, -S)$

((s. Kap. 6; zu $\vec{e}_\varphi$:  $\vec{e}_\varphi = \frac{(-y,x,0)}{|\ \times\ |} = \frac{(-Ss, Sc, 0)}{S}$

zu $\vec{e}_\vartheta$: $\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta$))

Weg nach Süden: $r\vartheta$; Weg nach Osten: $(rS)\cdot\varphi$

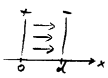
$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} = \vec{e}_r\partial_r + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \vec{e}_\varphi\frac{1}{rS}\partial_\varphi}$

Dimension: $[\vec{\nabla}] = \frac{1}{\text{Länge}} = [\text{rhs}]$ ✓

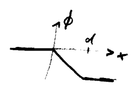
Gradient in Physik

kennen (s. Newton, Kap. 3) Kraft auf gel. T. (q)
$\vec{K} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$
zu $\vec{B} = 0$: $\vec{K} = q\vec{E} \overset{?!}{=} -\vec{\nabla}V$
$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ mit $\phi = \frac{V}{q}$ "el.-statisches Potential"
ϕ-Unterschied =: Spannung U

Bsp Plattenkondensator



$\vec{E}_{\text{innen}} = (E,0,0) \overset{?!}{=} -\vec{\nabla}\phi$
$\Rightarrow \phi = -Ex \ (+C)$



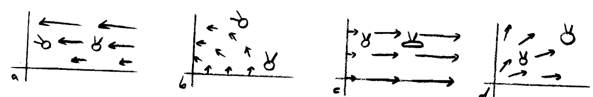
Spannung $U = 0 - (-Ed) = Ed$

Bsp ruhende Punktladung (Q) hat Coulomb-Potential $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$
$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$

8.2 Rotation

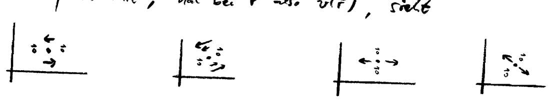
gegeben: Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$
lokale Charakteristika? $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \rightsquigarrow$ § 8.3
$\vec{\nabla}\times\vec{A} \rightsquigarrow$ hier

((Realisierung: setze $\vec{A}(\vec{r},t) = \alpha\vec{v}(\vec{r},t)$, lasse Wasser mit $\vec{v}$ strömen))



" ४ ≙ treibender Wasserfloh "

$\vec{A}$ ist charakterisiert durch Rotation (a,b), Dehnung (c,d) "Divergenz"
Floh fährt mit, hat bei $\vec{r}$ also $v(\vec{r})$, sieht



$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}+d\vec{r}) - v(\vec{r}) \qquad (\overset{?}{=} \text{Matrix} \cdot d\vec{r})$$
$$= (v_1(x+dx, y+dy, z+dz) - v_1(\vec{r}), \ldots, \ldots)$$
$$= (v_1'^x dx + v_1'^y dy + v_1'^z dz, \ldots, \ldots)$$
$$= \begin{pmatrix} v_1'^x & v_1'^y & v_1'^z \\ v_2'^x & v_2'^y & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \equiv V\, d\vec{r}$$

aufspalten in sy/asy: $V = V_S + V_A = \frac{1}{2}(V+V^T) + \frac{1}{2}(V-V^T)$

$\Rightarrow d\vec{v} = d\vec{v}_S + d\vec{v}_A = V_S\, d\vec{r} + V_A\, d\vec{r}$

dreht Fluß nicht (dehnt ihn nur),

denn $D\, d\vec{v}_S = \underline{D V_S D^T} D\, d\vec{r}$

$d\vec{v}_S{}' = V_S{}' \; d\vec{r}\,'$, $V_S{}' = \begin{pmatrix} V_{S_{11}}' & 0 & 0 \\ 0 & V_{S_{22}}' & 0 \\ 0 & 0 & V_{S_{33}}' \end{pmatrix}$

((kann symm. Matrix immer diagonalisieren, s. Kap. 4.3: HT))

$$d\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_1'^y - v_2'^x}{2} & \frac{v_1'^z - v_3'^x}{2} \\ & 0 & \frac{v_2'^z - v_3'^y}{2} \\ \text{anti} & & 0 \end{pmatrix} d\vec{r} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ & 0 & -\omega_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} d\vec{r} = \vec{\omega} \times d\vec{r}$$

also $2\vec{\omega} = (v_3'^y - v_2'^z,\; v_1'^z - v_3'^x,\; v_2'^x - v_1'^y) = \vec{\nabla} \times \vec{v}$

<u>Def</u> $\text{rot}\,\vec{A} = \alpha\, \text{rot}\,\vec{v} := \alpha\, 2\vec{\omega}$

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{Wirbelfeld von } \vec{A}}$$

<u>Bsp</u> <u>wirbelfreie</u> zirkulare Strömung

$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$. $\vec{v}(\vec{r}) = ?$ partielle Dgl. lösen!

"zirkular": $\vec{v} = \vec{e}_\varphi \cdot v(\varrho) = (-y, x, 0) \underbrace{\frac{v(\varrho)}{\varrho}}_{\equiv f(\varrho)}$

$= (-yf, xf, 0)$

$\vec{\nabla} \times \vec{v} = (0, 0, (xf)'^x + (yf)'^y) \overset{!}{=} \vec{0}$

$2f(\varrho) + \varrho f'(\varrho) = 0$

lösen: Trick ①, $f = \varrho^\lambda$, $2 + \lambda = 0$, $f_{allg} = \frac{c}{\varrho^2}$

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{c}{\varrho} \vec{e}_\varphi$ ((z.B. Bohrinsel: ))

(ist wirbelfrei, ausgenommen z-Achse)

8.3. Divergenz

(Vorsicht: Doppelbedeutung)

gegeben $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

realisiere als $\vec{A} = \alpha \vec{v}$, $\vec{v}$ von Gas dehnbarer Fluß strömt mit

<u>Def</u> $\text{div}\,\vec{A} := \alpha \frac{\dot{Vol}}{Vol}$ (relative Volumenänderung)

Berechne Vol.-Änderung: $d\vec{v} = d\vec{v}_S + d\vec{v}_A$ (s.o., S.88)

antisy; dreht nur, dehnt nicht

$d\vec{v}_S{}' = V_S{}' d\vec{r}\,' = (V_{S_{11}}' dx', V_{S_{22}}' dy', V_{S_{33}}' dz')$

lege Quader (dx', dy', dz') an Stelle $\vec{r}\,'$

rechte Wand bewegt sich um $V_{S_{11}}' dx'$ schneller als linke, usw.

$\Rightarrow \dot{Vol} = (dy'dz') V_{S_{11}}' dx' + (dx'dz') V_{S_{22}}' dy' + (dx'dy') V_{S_{33}}' dz'$

$= Vol. \cdot (V_{S_{11}}' + V_{S_{22}}' + V_{S_{33}}') = Vol. \cdot Sp(V_S') = Vol. \cdot Sp(V_S)$

Spur inv. bei Dreh.

$= Vol. \cdot (\partial_x v_1, \partial_y v_2, \partial_z v_3)$

$= Vol. \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{Quellenfeld von } \vec{A}}$$

<u>Bsp</u> quellen<u>freie</u> kugelsymm.-radiale Strömung

$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. $\vec{j}(\vec{r}) = ?$

"kugelsy.": $\vec{j} = \vec{e}_r \cdot j(r) = \vec{r} \underbrace{\frac{j(r)}{r}}_{\equiv f(r)}$

$= (xf, yf, zf)$

$\partial_x r = \frac{x}{r}$ usw.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = (xf)'^x + (yf)'^y + (zf)'^z = 3f(r) + r f'(r) \overset{!}{=} 0$

lösen: wieder Potenzansatz ①, $f = r^\lambda$, $3 + \lambda = 0$, $f_{allg} = \frac{c}{r^3}$

$\Rightarrow \vec{j} = \frac{c}{r^2} \vec{e}_r$ ((z.B. Coulomb-Feld $_{\text{(s.o.)}}$ $\vec{E} \sim -\text{grad} \frac{Q}{r} = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$))

(ist quellenfrei, ausgenommen Ursprung)

Navier-Stokes Gln

Strömungsgeschw. $\vec{u}(\vec{r}, t)$, Druck $p(\vec{r}, t)$

in inkompressiblen Flüssigkeiten / Gasen

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{u}} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} &= \nu \underset{\vec{\nabla}^2}{\Delta} \vec{u} - \vec{\nabla} p \\ \vec{\nabla} \vec{u} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{4 Gln} \\ \text{4 Variablen: } \vec{u}, p \end{array}$$

$\Rightarrow$ Existenzbeweis von (glatten, physikalischen) Lsn

gibt $\boxed{\text{1 Million Dollar}}$!

$\rightsquigarrow$ www.claymath.org, "Millennium Problems"

System von nichtlinearen, partiellen Dgln 2. Ordnung

((nicht einmal der Fall $\nu = 0$, die „Euler Gleichungen", sind gelöst))

Kontinuitätsglg (Conti)

(die wichtigste (?) partielle Dgl. [leider 4 Unbekannte]

Dichte $\varrho = \frac{\text{etwas}}{\text{Volumen}}$ ("etwas" = Ladung q, Energie E, Teilchenzahl N, ...)

$\dot{\varrho} = \partial_t\, \varrho(\vec{r}, t) = \partial_t\, \varrho(\vec{r}, t) - (\partial_t \vec{r} \cdot \vec{\nabla})\varrho = \partial_t \frac{N}{Vol.} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\varrho$

in "mitströmenden Volumen" bleibt Teilchenzahl N const, nur Vol. ändert sich:

$= -\frac{N}{Vol.} \frac{\dot{Vol.}}{Vol.} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\varrho \overset{\text{(s.S.89)}}{=} -\varrho\, \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\varrho$

$= -\vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) \equiv -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\varrho} + \text{div}\,\vec{j} = 0} \qquad \text{(Conti)}$$

<u>Bem</u>:
- gilt, wenn "etwas" (pro Volumen gedacht) erhalten ist.
- <u>lokale</u> Glg: gilt an <u>jedem</u> Pkt $\vec{r}$ der Welt und seit 13.7 ± 0.2 Mrd. Jahren (WMAP)
- überlebt Relativitätstheorie, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie
- 1 Glg. für 4 Unbekannte $\Rightarrow$ braucht noch andere Gln (z.B. Maxwell: Conti folgt)

((relativistisch: $\partial_{ct}\, c\varrho + \vec{\nabla} \vec{j} = 0$, $[\vec{\nabla}] = [\partial_{ct}] = \frac{1}{\text{Länge}}$

$\partial_{ct}\, c\varrho - (-\vec{\nabla})\vec{j} = 0$

$\underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{ct} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}}_{\equiv \partial} \bullet \begin{pmatrix} c\varrho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = 0$, $\partial_\mu j^\mu = 0$

Vierer-Skalarprodukt $(a \bullet b = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b})$))

8.4 $\vec\nabla$ mal $\vec\nabla$

bisher: Feld-Charakterisierung linear in $\vec\nabla$

jetzt: quadratisch

Räumliche Krümmungen gibt es

in 1D eine: $\partial_x^2 f(x)$ $\{= \Delta_1 f\}$

in 2D zwei: $\nabla\cdot(\nabla\phi)$ $\{= \Delta_2 f\}$

$\nabla(\nabla\cdot\vec A)$ = grad div $\vec A$

in 3D drei ?! – denn zwei der folgenden fünf sind Null

$$\phi \longrightarrow \vec\nabla\phi \begin{cases} \vec\nabla\times(\vec\nabla\phi) & \text{(Null)} \\ \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\phi) & = \Delta\phi \end{cases}$$

$$\vec A \begin{cases} \vec\nabla\times\vec A \begin{cases} \vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) & = \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \Delta\vec A \\ \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A) & \text{(Null)} \end{cases} \\ \vec\nabla\cdot\vec A \longrightarrow \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) \end{cases}$$

- $\vec\nabla\times(\vec\nabla\phi)$ = rot grad $\phi = \vec 0$,
  denn 1. Komp. $= \partial_y\partial_z\phi - \partial_z\partial_y\phi$ etc
- $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\phi) \equiv \Delta\phi$, mit $\boxed{\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \vec\nabla^2}$
  Laplace-Operator
- $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A)$ = rot rot $\vec A$
  "bac-cab" $= \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \Delta\vec A$ (($\Delta\vec A = (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3)$))
- $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A)$ = div rot $\vec A = 0$,
  denn $\partial_x(\partial_y A_3 - \dots) + \partial_y(\dots - \partial_x A_3)$ etc
- $\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A)$ = grad div $\vec A$

Die Nullen:

Ein Feld $(\vec u, \vec E)$ ist als grad ϕ darstellbar $\xrightarrow{\text{rot(grad } \phi) = \vec 0}$ es hat keine Wirbel
$\longleftarrow ? \text{ —}$ (s.u., Theorem 1)

Ein Feld $(\vec B)$ ist als rot $\vec A$ darstellbar $\xrightarrow{\text{div(rot } \vec A) = 0}$ es hat keine Quellen
$\longleftarrow ? \text{ —}$ (s.u., Theorem 2)

Laplace

Bsp

ϕ	x	x^2	x^2+y^2	x^2-y^2	$\frac1r$
$\Delta\phi$	0	2	4	0	0 ?4, denn

$$\Delta\frac1r = \partial_x\left(-\frac{x}{r^3}\right) + \partial_y\left(-\frac{y}{r^3}\right) + \partial_z\left(-\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^3} + \left(x\cdot 3\frac{x}{r^5} + \dots + \dots\right) = 0 \quad \text{für } r>0 \ (!)$$

$\to \forall r$: s.u.

Δ in Kugelkoord.

$$\Delta = \vec\nabla\cdot\vec\nabla = \left(\vec e_r\partial_r + \vec e_\vartheta\frac1r\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\frac{1}{rS}\partial_\varphi\right)\cdot\left(\vec e_r\partial_r + \vec e_\vartheta\frac1r\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\frac{1}{rS}\partial_\varphi\right)$$

9 Terme. z.B. $= \vec e_\varphi\frac{1}{rS}\underbrace{(\partial_\varphi\vec e_r)}\partial_r + \vec e_\varphi\frac{1}{rS}\vec e_r\partial_\varphi\partial_r$

(($\vec e_{r,\vartheta,\varphi}$: s.S. 86))

$\partial_\varphi\vec e_r = \partial_\varphi(Sc, Ss, C) = (-Ss, Sc, 0) = S\vec e_\varphi$

$= \frac1r\partial_r + 0$

((

	$\vec e_r$	$\vec e_\vartheta$	$\vec e_\varphi$
∂_r	0	0	0
∂_ϑ	$\vec e_\vartheta$	$C\vec e_\varphi$	0
∂_φ	$S\vec e_\varphi$	$-\vec e_r$	$(-S\vec e_r - C\vec e_\vartheta)$

))

$$\boxed{\Delta = \underbrace{\partial_r^2 + \frac2r\partial_r}_{\equiv\Delta_r} + \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta^2 + \frac{C}{r^2S}\partial_\vartheta + \frac{1}{r^2S^2}\partial_\varphi^2}, \quad S = \sin(\vartheta),\ C = \cos(\vartheta)$$

$$\Delta_r = \left(\partial_r + \frac2r\right)\partial_r = \frac1r(r\partial_r + 2)\partial_r = \frac1r(\partial_r r + 1)\partial_r = \frac1r\partial_r(r\partial_r + 1)$$

$\partial_r r = 1 + r\partial_r$, $= \partial_r r$

$$\boxed{\Delta_r = \frac1r\partial_r^2 r}$$

Green von Δ (behandle das "4" oben genauer)

s.o.: $\Delta\frac1r$ war "krank" bei $r=0$. ⇒ $\frac1r$-Spitze einbetten / abrunden

z.B. $\frac1r \to \Big\{ \frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}$ (s. Schulz-Buch PB), $\frac1r\left(1 - e^{-r/\varepsilon}\right)$ (s. Ü 70a), ... $\Big\}$

hier: $\frac1r \to \frac1r\Theta(r-\varepsilon)$

betrachte $\Delta\frac1r\Theta(r-\varepsilon) = \frac1r\partial_r^2\Theta(r-\varepsilon) = \frac1r\delta'(r-\varepsilon)$

rhs ist im ε-Bereich lokalisiert, und hat

$$\int d^3r\,\frac1r\delta'(r-\varepsilon) = 4\pi\int_0^\infty dr\, r\,\delta'(r-\varepsilon) = 4\pi\left[r\,\delta(r-\varepsilon)\right]_0^\infty - 4\pi\int_0^\infty dr\,\delta(r-\varepsilon) = -4\pi,$$

ist also δ-Fkt

⇒ $\Delta\frac1r\Theta(r-\varepsilon) = -4\pi\delta(\vec r)$

$\stackrel{\varepsilon\to 0^+}{\Rightarrow}$ $\boxed{\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta(\vec r)}$

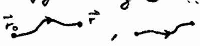
8.5 3 Theoreme (der Vektoranalysis)

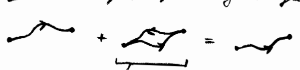
$\mathcal G$:= einfach zusammenhängendes Gebiet

d.h. , aber nicht 

> **[1]** Sei $\vec E$ ein in $\mathcal G$ wirbelfreies Feld, d.h. rot $\vec E = \vec 0$ ⇒ $\vec E$ hat in $\mathcal G$ ein Potential, d.h. $\vec E = -$grad ϕ

Beweis:
- OBdA nahe Ursprung, $\vec E = \vec E(\vec 0) + \underbrace{S}_{\text{Symm. Matrix}}\vec r + \underbrace{A}_{\text{antisym. Matrix}}\vec r + O(\vec r^2)$
- rot $\vec E = \vec 0$ ⇒ $A \stackrel{!}{=} 0$
  ((denn $A\vec r = \vec\omega\times\vec r$, s.S. 88; keine Rotation ⇒ $\vec\omega = 0$))
- $\vec E = \vec E(\vec 0) + S\vec r + \dots$ hat $\phi = -\vec E(\vec 0)\vec r - \frac12\vec r S\vec r + \dots$
  ((denn $(\vec E)_i = -\partial_i\phi = -\partial_i\left[-E_k(0)r_k - \frac12 r_k S_{k\ell}r_\ell + \dots\right] = E_i(0) + S_{i\ell}r_\ell$))
- im ganzen $\mathcal G$: $\phi = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} d\vec r'\cdot\vec E(\vec r')$
  ((denn $-\partial_x\phi = \frac1\varepsilon\left[\int_{r_0}^{\vec r+\varepsilon\vec e_1} - \int_{r_0}^{\vec r}\right] = \frac1\varepsilon\int_{(x,y,z)}^{(x+\varepsilon,y,z)} d\vec r'\cdot\vec E(\vec r') = \frac1\varepsilon\vec E\cdot\vec e_1\varepsilon = E_1$))
- ϕ unabhängig vom Weg C ?!

d.h.  geben gleiches ϕ ?!



$\stackrel{?!}{=} 0$, wg. "Stokes"-Satz, Kap. 9

> **[2]** Sei $\vec B$ ein in $\mathcal G$ quellenfreies Feld, d.h. div $\vec B = 0$ ⇒ $\vec B$ hat in $\mathcal G$ ein Vektorpotential, d.h. $\vec B$ = rot $\vec A$

Beweis:
- lokal: $\vec B = \vec B(\vec 0) + S\vec r + \underbrace{A\vec r}_{\vec\omega\times\vec r} + O(\vec r^2)$
- div $\vec B = \partial_i\left[B_i(0) + S_{ij}r_j + A_{ij}r_j\right] = S_{ii} + \overset{0}{A_{ii}} = Sp(S) \stackrel{!}{=} 0$
- $\vec B$ hat $\vec A = \frac12\vec B(0)\times\vec r - \frac13\vec r\times S\vec r - \frac13\vec r\times(\vec\omega\times\vec r)$
  ((denn $\vec\nabla\times\left(\frac12\vec B(0)\times\vec r\right) \stackrel{\text{bac-cab}}{=} \frac12\vec B(0)(\vec\nabla\cdot\vec r) - \frac12(\vec B(0)\cdot\vec\nabla)\vec r = \frac12[3-1]\vec B(0)$
  und $\vec\nabla\times\left(-\frac13\vec r\times S\vec r\right) = \vec\nabla\times\left(\frac13 S\vec r\times\vec r\right) \stackrel{\text{Ü 66b}}{=} \frac13\left(2S\vec r - \vec r\underbrace{(\vec\nabla\cdot S\vec r)}_{=0,\text{ s.o.}} + r\partial_r S\vec r\right)$
  $= S\vec r$, denn $r\partial_r S\vec r = S\underbrace{r\partial_r r}_{=1}\vec e_r = S\vec r$ (nur Winkelabhängig)))
- global: $\vec A(\vec r) = -\frac12\vec r\times\frac{1}{1+\frac12\vec r\cdot\vec\nabla}\vec B(\vec r)$ ((→ s.S. 99))
  als Reihe gedacht: $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^\infty(-x)^i$

Bem.: $\vec A$ nicht eindeutig festgelegt:

$\left.\begin{array}{l}\vec B = \text{rot } \vec A_I \\ \vec B = \text{rot } \vec A_{II}\end{array}\right\}$ $\vec 0 = \vec\nabla\times\underbrace{(\vec A_I - \vec A_{II})}$

kann ein Gradient sein! (s.S. 92: $\vec\nabla\times(\vec\nabla\phi) = 0$)

also $\vec A_I = \vec A_{II} + \vec\nabla\chi(\vec r)$ möglich.

$\vec B$ merkt von dieser "Umeichung" nichts.

> **[3]** Unter den Lösungen $\vec A(\vec r)$ des Problems $\left\{\begin{array}{l}\text{div } \vec A = Q(\vec r) \\ \text{rot } \vec A = \vec\omega(\vec r)\end{array}\right\}$ mit ganz im Endlichen liegenden gegebenen Quellen $Q, \vec\omega$ gibt es nur ein von $Q, \vec\omega$ verursachtes Feld $\vec A$. Es fällt mind. $\sim 1/r^2$ ab.

- "gibt es": setze $\vec A = \vec E + \vec B$ mit $\vec\nabla\cdot\vec E = Q$, $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$, $\vec\nabla\times\vec E = \vec 0$, $\vec\nabla\times\vec B = \vec\omega$

kenne $\vec E = -\vec\nabla\int d^3r'\frac{Q(\vec r')}{4\pi|\vec r - \vec r'|}$, $\vec B = \vec\nabla\times\int d^3r'\frac{\vec\omega(\vec r')}{4\pi|\vec r - \vec r'|}$

Test: $\vec\nabla\times\vec B = \vec\nabla\times\left(\vec\nabla\times\int\ldots\right) \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec\nabla\left(\vec\nabla\cdot\int\ldots\right) - \Delta\int\ldots =: \vec\nabla ① + ②$

$$② = -\int d^3r'\,\frac{\vec w(\vec r')}{4\pi}\,\underbrace{\Delta\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}_{=-4\pi\delta(\vec r-\vec r')} = \vec w(\vec r)$$

$$① = \vec\nabla\cdot\int\ldots = \int d^3r'\,\frac{\vec w(\vec r')}{4\pi}\cdot\underbrace{\vec\nabla\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}_{=-\vec\nabla'\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}$$

$$\int dx'\,w_1(\vec r')\,(-\partial_{x'})\frac{1}{|\;|} = \int dx'\,\frac{1}{|\;|}\,\partial_{x'}w_1 \qquad (\text{part. Int.})$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{1}{|\;|}\,\underbrace{\vec\nabla'\cdot\vec w(\vec r')}_{=\vec\nabla'\cdot(\vec\nabla'\times\vec B(\vec r'))\,=\,0} \qquad \left(\left(\text{s. S. 92: } \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec A=0\right)\right)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \vec\nabla\times\vec B = \vec w$ ✓✓ $\quad$ ((und $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$ ✓✓ wg. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec A = 0$))

- "nur ein": gäbe es zwei $\vec A$, müßte die Differenz $\vec C = \vec A_I - \vec A_{II}$ die Gln $\left\{\begin{matrix}\vec\nabla\cdot\vec C = 0\\ \vec\nabla\times\vec C = \vec 0\end{matrix}\right\}$ erfüllen

(.. ⑧: System 1. Ordng $\to$ weniger Gln. 2. Ordng)

per $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec C) = \vec 0 \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec\nabla\underbrace{(\vec\nabla\cdot\vec C)}_{=0\text{ nach Voraussetzung}} - \Delta\vec C$

$$\Rightarrow \Delta C_1 \overset{!}{=} 0,\quad \Delta C_2 \overset{!}{=} 0,\quad \Delta C_3 \overset{!}{=} 0$$

es gilt aber: $\boxed{\text{Weil eine Lsg } \phi \text{ von } \Delta\phi = 0 \text{ nirgends max. oder min. werden kann, liegen die betragsmäßig größten Werte am Rand.}}$

((denn: hätte ϕ Max $\Rightarrow (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\phi$ neg, nicht 0))

$\Rightarrow$ da am "Rand" des $\mathbb{R}^3$ $\vec A \to \vec 0$ (nach Vorr. in $\boxed{3} \sim \frac{1}{r^2}$), so auch jede Differenz $\vec C$, also $\vec C = \vec 0$ überall ∎

9. Integralsätze

((Kap. 8 war lokale Analyse, Steigungen und Krümmungen. Auch Conti (und Maxwell) gelten lokal, in Umgebung jedes Punktes der Welt. Hier: einige globale Gleichungen, die manchmal nützlich sind))

9.1 Gauß und Stokes

(0.) $\int_a^b dx\,\partial_x F(x) = F(b) - F(a)$

(1.) $\int_1^2 d\vec r\cdot\operatorname{grad}\phi = \phi(2) - \phi(1)$

((denn: $\text{lhs} = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\underbrace{\dot{\vec r}(t)\cdot\vec\nabla\phi}_{\overset{!}{=}\partial_t\phi(\vec r(t))} = \phi(\vec r(t_2)) - \phi(\vec r(t_1))$))

(2.) Gauß: $\boxed{\int_V d^3r\,\operatorname{div}\vec E = \oint_S d\vec f\cdot\vec E}$

V: ein raumfestes Volumen ggf. mehrfach zus.h.

S: die Oberfläche von V ggf. mehrere Teile ($\oint$ weil geschlossen)

Beweis: physikalisch, via Conti. $\dot\rho + \operatorname{div}\vec j = 0$ ("etwas" = Ladung = erhalten)
"was rausging, ist nicht mehr drin"

$$\underbrace{\int_S d\vec f\cdot\vec j}_{I_S} = \underbrace{-\partial_t\int_V d^3r\,\rho}_{-\partial_t Q_V} = \int_V d^3r\,(-\dot\rho) \overset{(\text{Conti})}{=} \int_V d^3r\,\operatorname{div}\vec j$$

(3.) Stokes: $\boxed{\int_S d\vec f\cdot\operatorname{rot}\vec B = \oint_{\mathcal C} d\vec r\cdot\vec B}$

S: gewölbtes Flächenstück $\qquad$ $\mathcal C$: dessen Randkurve

(auch mehrfach zus.h.)

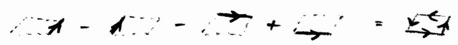
Beweis: (a) für Rechtecke
(b) für beliebige ebene Fläche
(c) für gewölbte Fläche

(a) oBdA: Rechteck in xy-Ebene  , $d\vec f = \vec e_3\cdot d^2r$

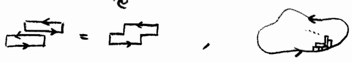
$$\int_S d\vec f\cdot\operatorname{rot}\vec B = \int_{\text{Rechteck}} d^2r\;\vec e_3\cdot\left(\ldots,\ldots,\partial_x B_2 - \partial_y B_1\right)\Big|_{z=0}$$

$$= \int_0^a dx\int_0^b dy\left(\partial_x B_2(x,y,0) - \partial_y B_1(x,y,0)\right)$$

$$= \int_0^b dy\,B_2(a,y,0) - \int_0^b dy\,B_2(0,y,0) - \int_0^a dx\,B_1(x,b,0) + \int_0^a dx\,B_1(x,0,0)$$



$$= \int_{\mathcal C} d\vec r\cdot\vec B$$

(b) 

(c)  usw.

Bem
- alle Int-Sätze sind Skalar = Skalar
- $\int_{n\text{-fach}} \nabla\ldots = \int_{(n-1)\text{fach}}\ldots$
- (merken:) $\int_1^2 d\vec r\cdot\operatorname{grad}\phi = \phi_2 - \phi_1$
  $\int_S d\vec f\cdot\operatorname{rot}\vec A = \oint_{\mathcal C} d\vec r\cdot\vec A$
  $\int_V d^3r\cdot\operatorname{div}\vec A = \oint_S d\vec f\cdot\vec A$

9.2. Anwendungsbeispiele

Bsp Kirchhoffs Regel  $\sum_\ell I_\ell = 0$

$\int_V d^3r$ über $0 = \dot\rho + \operatorname{div}\vec j$ gibt

$$0 = \partial_t\int_V d^3r\,\rho + \int_V d^3r\,\operatorname{div}\vec j \overset{(\text{Gauß})}{=} \partial_t Q_V + \oint_S d\vec f\cdot\vec j = \underset{\text{n. Vorr.: nur Drähte in }V}{0} + \sum_\ell I_\ell$$

Bsp Magnetfeld vom geraden Draht

(4. Maxwellglg.) $\operatorname{rot}\vec B = \vec j/\varepsilon_0 c^2$ (Stokes)

$$\Rightarrow \int_S d\vec f\cdot\operatorname{rot}\vec B \overset{\varepsilon}{=} \oint_{\mathcal C} d\vec r\cdot\vec B = \int_S d\vec f\cdot\vec j/\varepsilon_0 c^2$$

wähle S so, daß $\vec B \perp$ oder $\parallel$ $\mathcal C$ ist, und daß Strom durch S fließt,

z.B. gerader Draht, Strom I, 

S = Kreis (ρ) ; stets ist $d\vec r \parallel \vec B$

$\rightsquigarrow B\cdot 2\pi\rho = I/\varepsilon_0 c^2$

$\Rightarrow \vec B = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{1}{\rho}\,\vec e_\varphi$

Bsp räumliche partielle Integration

$$\int_V d^3r\,\vec A\cdot\vec\nabla\phi = \int_V d^3r\left(\vec\nabla(\vec A\phi) - \phi\,\vec\nabla\cdot\vec A\right) \overset{(\text{Gauß})}{=} \oint_S d\vec f\cdot\vec A\phi - \int_V d^3r\,\phi\,\vec\nabla\cdot\vec A$$

wenn $V = \mathbb{R}^3$, d.h. S = dessen Rand, und $\vec A \to 0$ am Rand, dann ist offenbar "$\boxed{\overrightarrow{\nabla} \to -\overleftarrow{\nabla}}$" erlaubt

⌈ Nachtrag zu S. 95, Beweis zu $\boxed{2}$:

$\vec A = \vec r\times\vec C(\vec r)$ mit $\vec C(\vec r) \equiv -\frac12\,\frac{1}{1+\frac12\vec r\vec\nabla}\,\vec B(\vec r)$

wurde behauptet. Zeige: $\vec B = \operatorname{rot}\vec A$, falls $\operatorname{div}\vec B = 0$.

$$\vec B \overset{?!}{=} \operatorname{rot}\vec A = \vec\nabla\times(\vec r\times\vec C) \overset{(\text{bac-cab})}{=} \vec r(\vec\nabla\cdot\vec C) - \vec C(\vec\nabla\vec r) + (\vec C\vec\nabla)\vec r - (\vec r\vec\nabla)\vec C$$

a) $(\vec\nabla\vec C) = -\frac12\vec\nabla\sum_{n=0}^\infty\left(-\frac12\vec r\cdot\vec\nabla\right)^n\vec B$
$= -\frac12\sum_{n=0}^\infty\left\{\left(-\frac12\vec r\cdot\vec\nabla\right)^n\vec\nabla\cdot\vec B + n\left(-\frac12\vec r\cdot\vec\nabla\right)^{n-1}\left(-\frac12\underbrace{\vec\nabla(\vec r\cdot\vec\nabla)}_{=\partial_j r_i\partial_i = \partial_j = \vec\nabla}\right)\vec B\right\}$
$\rightsquigarrow \operatorname{div}\vec B = 0$

b) $(\vec\nabla\vec r) = \partial_i r_i = 3$

c) $(\vec C\cdot\vec\nabla)\vec r = C_i\partial_i r_j = C_j = \vec C$

$$= 0 - 3\vec C - \vec C - (\vec r\vec\nabla)\vec C = -2\left(1+\frac12\vec r\cdot\vec\nabla\right)\vec C = \vec B \;∎$$ ⌋

10. Fourier ($\hat{=}$ § 12 in PB)

die wichtigste Rechenmethode? (in allen Gebieten der Physik)
ähnlich § 5.3: Potenzreihen
hier: "harmonische Analyse"

10.1 Fourier-Reihe

Ein Ton (Trommelfell-Auslenkung $f(t)$) sollte aus Grund- und Obertönen bestehen:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Stärke}_n \cdot \text{Oberton}_n(t) \qquad ((\text{Oberton}_1 \equiv \text{Grundton}))$$

Anteil n ist experimentell herausfilterbar.
Also sollte (könnte) jede L-periodische Fkt $f(x)$ $((f(x+L) \equiv f(x)))$ wie folgt darstellbar sein:

$$f(x) \overset{?}{=} f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) \right]$$

Euler $e^{ix} = c + is$

$$= \underbrace{f_0}_{\equiv c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)}_{\equiv c_n} e^{in\frac{2\pi}{L}x} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)}_{\equiv c_{-n}} e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

Falls ok, welche c_n? Wende Op. $\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x}$ an:

$$\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{i(n-m)\frac{2\pi}{L}x}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m$$

$$= \begin{cases} n=m: & 1 \\ n \neq m: & \frac{1}{L} \frac{e^{i(n-m)2\pi} - 1}{i(n-m)2\pi/L} = \frac{1}{L} \frac{\overbrace{\cos[(n-m)2\pi]}^{=1} + i\overbrace{\sin[\ldots]}^{0} - 1}{\ldots} = 0 \end{cases}$$

Haben auch $f_0 = c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x) = \bar{f}$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, \cos\left(n\tfrac{2\pi}{L}x\right) f(x)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \ \ldots \sin \ldots\ldots$$

((Nachweis, daß ? unnötig ist:

gegeben f, berechne $c_n = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x)$,
bilde damit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} =: f_F(x)$,
prüfe ob $f_F = f$.

$$f_F(x) = \int_0^L dx' \underbrace{\frac{1}{L}\sum_n e^{in\frac{2\pi}{L}(x-x')}}_{\equiv K(x-x')} f(x')$$

$$K(x) = \frac{1}{L}\sum_n \left(e^{i\frac{2\pi}{L}x}\right)^n = \frac{1}{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-\infty}^{0} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{1}{1-()} + \frac{1}{1-1/()} - 1\right) = \frac{1}{L}\frac{1-()-1+()}{1-()} = 0,$$

außer bei $x = 0, \pm L$, usw.!

$$K(x) \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{L}\int dn\, e^{i\frac{2\pi}{L}xn} = \frac{1}{L} 2\pi\, \delta\left(\tfrac{2\pi}{L}x\right) = \delta(x)$$

also $K(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

$$= \int_0^L dx' \sum_m \delta(x-x'+mL) f(x') = f(x) \quad \bullet \quad))$$

Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{L\text{-per.}}(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} \\ \text{mit } c_n &= \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \end{aligned}}$$

Nebenprodukt (s.o.): $\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{L}x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

Bem.: bei c_n-Berechnung ist $(0,L)$-Verschiebung erlaubt (weil Integrand $f \cdot e^{\cdots}$ L-per. ist):

$$\int_0^L = \int_0^{L-a} + \int_{L-a}^{L} = \int_0^{L-a} + \int_{-a}^{0} = \int_{-a}^{L-a}.$$

Eigenschaften:
f reell $\Leftrightarrow$ $c_n^* = c_{-n}$
f gerade $\Leftrightarrow$ $c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, f(x) \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) = c_{-n}$
d.h. $b_n = 0$, reine cos-Reihe
f ungerade $\Leftrightarrow$ $c_n = -c_{-n}$, d.h. $a_n = 0$, reine sin-Reihe und $f_0 = 0$

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n\, in\tfrac{2\pi}{L}}_{\text{hat diese Koeff'n}} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

$$f(x-a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n e^{-in\frac{2\pi}{L}a}}_{\text{hat diese Koeff!}} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

wichtig: $f(x) = \delta_{per.}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

gilt $c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \delta(x)\, e^{\cdots} = \frac{1}{L}$

und $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$

Bem.: Fourier-Reihe kann auch endlich viele δ's, sowie Stufen usw. darstellen.
(s. Ü 74)

Anwendungen

1) Diffusion (vgl. Ü 73) mit period. Start-Temp.

$$\dot{T} = D\Delta T, \quad T(x,t) = e^{tD\partial_x^2} T(x,0)$$

$$= e^{tD\partial_x^2} \sum_n c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

$$= \sum_n c_n e^{-tDn^2(\frac{2\pi}{L})^2} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

2) gedämpfter, periodisch angeregter Oszi.

$$\left(\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2\right) x(t) = b(t) = b(t+T)$$

nach Einschwingen auch $x(t) = x(t+T)$

$$\sum_n c_n \underbrace{(\ )}_{} e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_n b_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

$$(\ ) \to -\left(n\tfrac{2\pi}{T}\right)^2 + \gamma\, in\tfrac{2\pi}{T} + \omega_0^2 =: [\ ]_n$$

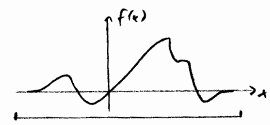
Koeff-Vergl.: $c_n [\ ]_n = b_n \Rightarrow c_n = \frac{b_n}{[\ ]_n}$

3) Fourier-Reihe liefert Fourier-Transformation
(s. § 10.2)

10.2 Fourier-Transformation

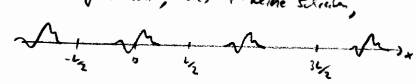
Motiv.: Geräusch statt Ton

"Physik ist nicht ewig periodisch"



Physik stets im Endlichen (?), wenn man nur weit genug blickt bzw. lange genug wartet / zurückverfolgt

kann endliche Physik periodisch fortsetzen, als F-Reihe schreiben, und $L\to\infty$ studieren.



$$f(x) = \frac{1}{L}\sum_n (Lc_n)\, e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

mit $Lc_n = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \underbrace{f(x)}_{\text{bleibt fest bei } L\to\infty} \xrightarrow{L\to\infty} \int dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x) =: \tilde{f}\left(n\tfrac{2\pi}{L}\right)$

$$= \frac{1}{L}\sum_n \tilde{f}\left(n\tfrac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

beide nur schwächlich von n abh.
Suche asympt. führenden f-Term bzgl $L\to\infty$

$$\sum_n \ldots = \sum_n 1 \cdot \ldots \to \int dn \ldots$$

$$\to \frac{1}{L}\int dn\, \tilde{f}\left(n\tfrac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

((ε, $O(1) = \int dx\, g(x) = \sum_n \varepsilon g(\varepsilon n) + O(\varepsilon)$

$\varepsilon \int dx\, g(\varepsilon x)$ $\qquad \| \cdot \frac{1}{\varepsilon}$

$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \int dx\, g(\varepsilon x) = \sum_n g(\varepsilon n) + O(1)$))

Subst. $n\frac{2\pi}{L} = k$, $dn = \frac{L}{2\pi}dk$ gibt nun

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde{f}(k) \\ \text{mit } \tilde{f}(k) &= \int dx\, e^{-ikx} f(x) \end{aligned}}$$

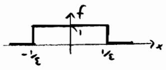
- $\tilde{f}$ heißt die Fourier-Transformierte von f.
- 2π-Konvention!! (hier: ~ QFT)

((Nachweis direkt: $f_F(x)$ bilden, $f_F = f$ zeigen,

$$f_F(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\left[\int dx'\, e^{-ikx'} f(x')\right] = \int dx' \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ik(x-x')}}_{=\delta(x-x')} f(x') = f(x)\,,\ \text{ged.}$$))

$=\delta(x-x')$ ((s. Kap. 6, Skript S. 74))

<u>Bsp</u> „Kasten" $f(x) = \Theta\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - x^2\right)$



$$\tilde f(k) = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx\, e^{-ikx} = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon}$$

oder $\tilde f = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx\left(\cos(kx) = \frac{1}{k}\partial_x \sin(kx)\right) = \frac{2}{k}\sin(k/\varepsilon)$

$\Rightarrow f = \Theta\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + x^2\right)$ hat $\tilde f = 2\pi\,\frac{1}{\pi k}\sin(k/\varepsilon)$

Bei $\varepsilon \to 0$ erhält man ((Erinnerung Kap. 6, S. 74, $\frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$))

$$\boxed{\begin{array}{lll} f(x) = 1 & \text{hat} & \tilde f(k) = 2\pi\,\delta(k) \\ \text{und } f(x) = \delta(x) & \text{hat} & \tilde f(k) = 1 \end{array}}$$

<u>Bem.:</u>
- im physikalisch vollverstandenen Sinne sind Konstante und δ's F.-transformierbar
- f eng (großes ε), $\tilde f$ breit
  f breit, $\tilde f$ eng
- bei kleinen (großen) x wird f durch große (kleine) k in $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde f(k)$ gut dargestellt. [grobe Regel]

<u>Bsp</u> Gauß $f(x) = A e^{-\alpha x^2}$

$$\tilde f(k) = A\int dx\, e^{-ikx} e^{-\alpha x^2}$$

$\hookrightarrow \cos(kx) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(kx)^{2n}$

Klausurtipp: Integrale sammeln?

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}k^{2n}(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int dx\, e^{-\alpha x^2}}_{=\alpha^{-1/2}\sqrt{\pi}}$$ ((Kap. 6, S. 67))

$$(-\partial_\alpha)^n \alpha^{-1/2}\sqrt{\pi} = \underbrace{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}_{=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}}\frac{1}{2^n}\alpha^{-\frac{1}{2}-n}\sqrt{\pi}$$

$$\tilde f(k) = A\frac{1}{\sqrt\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right)^n = \underline{\underline{A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-k^2/4\alpha}}}$$

<u>Bem.:</u>
- erneut: f eng $\Leftrightarrow$ $\tilde f$ breit
- FT{Gauß} = Gauß
  eine Forminvarianz unter F.T.!
  es gibt mehr (∞ viele): $FT\left\{\frac{1}{\cosh(x)}\right\} = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}k\right)}$
  $FT\left\{\sqrt{\frac{a}{|x|}}\right\} = \sqrt{\frac{2a\pi}{|k|}}$

<u>allg. Eigenschaften</u>

- f reell $\Leftrightarrow$ $\tilde f^*(k) = \tilde f(-k)$
- $f(-x) = \pm f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\tilde f(-k) = \pm\tilde f(k)$ $= \begin{cases}\cos\text{-Entwicklung}\\ \sin\text{-Entwicklung}\end{cases}$
- $\int dx\,|f|^2 = \int dx\,\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde f(k)\,\frac{1}{2\pi}\int dq\, e^{-iqx}\tilde f^*(q)$; $\delta(k-q)$
  $= \frac{1}{2\pi}\int dk\,|\tilde f(k)|^2$ „<u>Parseval's Theorem</u>"
- Tabellen: $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) =: g(x) + u(x)$

$$\tilde f(k) = \int dx\, e^{-ikx}\big(g(x) + u(x)\big) = \int dx\,\cos(kx)\,g(x) - i\int dx\,\sin(kx)\,u(x)$$

<u>Räumliche FT</u>

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int dk_1\, e^{ik_1x}\tilde{\tilde{\tilde f}}(k_1,y,z)$$
$$\tilde{\tilde{\tilde f}}(k_1,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int dk_2\, e^{ik_2y}\tilde{\tilde f}(k_1,k_2,z)$$
$$\tilde{\tilde f}(k_1,k_2,z) = \frac{1}{2\pi}\int dk_3\, e^{ik_3z}\tilde f(k_1,k_2,k_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(\vec r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\, e^{i\vec k\vec r}\tilde f(\vec k) \\ \text{mit } \tilde f(\vec k) = \int d^3r\, e^{-i\vec k\vec r} f(\vec r)\end{array}}$$

((<u>Raumzeitliche FT</u>:

$$\vec E(\vec r,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int d^3k\, d\omega\, e^{i\vec k\vec r - i\omega t}\,\tilde{\vec E}(\vec k,\omega)$$

reine Konvention

$$\text{mit } \tilde{\vec E}(\vec k,\omega) = \int d^3r\, dt\, e^{-i\vec k\vec r + i\omega t}\,\vec E(\vec r,t)$$))

Klausur-Eichstrich

10.3 Anwendungen

Oft:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{f\text{-Gln.}} & \overset{?}{- - \to} & \boxed{\text{Lösung } f} \\ \big\downarrow f = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde f \text{ einsetzen} & & \big\uparrow \text{„nur noch" Integrieren!} \\ \boxed{\tilde f\text{-Gln.}} & \xrightarrow{\text{lösen}} & \boxed{\text{Lösung } \tilde f} \end{array}$$

<u>Bsp</u> <u>Elektrostatik</u>

will $\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, $\vec\nabla\times\vec E = \vec 0$ lösen

<u>Abstieg</u>: $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\,\underbrace{\left\{\begin{matrix}\vec\nabla\cdot\\ \vec\nabla\times\end{matrix}\right\} e^{i\vec k\vec r}}_{=\vec\nabla e^{i\vec k\vec r}\left\{\begin{matrix}\cdot\\ \times\end{matrix}\right\}}\tilde{\vec E}(\vec k) = \begin{cases}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\, e^{i\vec k\vec r}\frac{1}{\varepsilon_0}\tilde\rho(\vec k)\\ 0\end{cases}$

$\vec\nabla e^{i\vec k\vec r} = i\vec k\, e^{i\vec k\vec r}$ $\boxed{\vec\nabla \to i\vec k}$

Koef.-Vergl.: $i\vec k\cdot\tilde{\vec E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde\rho$ $(\tilde 1)$
$i\vec k\times\tilde{\vec E} = \vec 0$ $(\tilde 2)$

<u>Lösen</u>: $i\vec k\times(\tilde 2) \overset{\text{bac-cab}}{=} i\vec k\,(\underbrace{i\vec k\cdot\tilde{\vec E}}_{(\tilde 1)\text{ einsetzen}}) + k^2\tilde{\vec E} = \vec 0$

$$\Rightarrow \tilde{\vec E}(\vec k) = -\frac{i\vec k}{\varepsilon_0 k^2}\tilde\rho(\vec k)$$

<u>Aufstieg</u>: $\vec E(\vec r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\,\underbrace{e^{i\vec k\vec r}(-i\vec k)}_{=-\vec\nabla e^{i\vec k\vec r}}\frac{1}{\varepsilon_0 k^2}\underbrace{\tilde\rho(\vec k)}_{=\int d^3r'\, e^{-i\vec k\vec r'}\rho(\vec r')}$

$$= -\vec\nabla\int d^3r'\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\,\frac{4\pi}{k^2}e^{i\vec k(\vec r-\vec r')}}_{\equiv K(\vec r-\vec r') = \frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\ (\text{s.u.})}\rho(\vec r')$$

$$= -\vec\nabla\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec r')}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec r-\vec r'|}$$

(($K(\vec r) \overset{\text{Kugelkoord.}}{=} \frac{2}{\pi}\frac{1}{r}\underbrace{\int_0^\infty dk\,\frac{\sin(kr)}{k}}_{=\pi/2} = \frac{1}{r}$, $\boxed{FT\left\{\frac{1}{r}\right\} = \frac{4\pi}{k^2}}$))

$1 = \int dx\,\delta(x) = \int dx\,\frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx\,\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}$, $x \to \varepsilon k r$ ∎

<u>FT → FR</u>

$$f(x) - f(x+L) = 0$$
$$\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\left[1 - e^{ikL}\right]\tilde f(k) = 0$$

Koeff.-Vergl.: $\left[1 - e^{ikL}\right]\tilde f = 0$

$$\tilde f(k) = \sum_n 2\pi c_n\,\delta\left(k - n\frac{2\pi}{L}\right)$$
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\sum_n 2\pi c_n\,\delta\left(k - n\frac{2\pi}{L}\right) = \sum_n c_n\, e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

<u>Maxwell-Gln. im Untergrund</u>

((Erinnerung: Intro Kap. 8, Skript S. 84: $\vec\nabla\vec E = \rho$, $\vec\nabla\times\vec E = -\dot{\vec B}$, $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$, $\vec\nabla\times\vec B = \vec j + \dot{\vec E}$))

setze $\vec E, \rho, \vec B, \vec j$ 4D-entwickelt ein

benutze $\left.\begin{matrix}\vec\nabla\cdot\\ \vec\nabla\times\\ \partial_t\end{matrix}\right\} e^{i\vec k\vec r - i\omega t}\,\tilde{\vec E} = \left.\begin{matrix}i\vec k\cdot\\ i\vec k\times\\ -i\omega\end{matrix}\right\} e^{\cdots}\,\tilde{\vec E}$

also $\vec\nabla \to i\vec k$, $\partial_t \to -i\omega$

Koeff.-Vergl. gibt also

$$\boxed{\begin{array}{llll} i\vec k\cdot\tilde{\vec E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde\rho & , & i\vec k\cdot\tilde{\vec B} = 0 \\ i\vec k\times\tilde{\vec E} = i\omega\tilde{\vec B} & , & i\vec k\times\tilde{\vec B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\tilde{\vec j} - \frac{i\omega}{c^2}\tilde{\vec E}\end{array}}$$

$\Rightarrow$ $\widetilde{\text{Max}}$ ist nur noch System von Vektorgln.,
leicht auflösbar nach $\tilde{\vec E}$, $\tilde{\vec B}$ (selber machen? Trick: z.B. $i\vec k\times$(Glg.))

$\Rightarrow$ Aufstieg zur kausalen Lösung (selber?!)
füge „infinit. Leitfähigkeit (Reibung!) des $\mathbb R^3$" dazu,
um $\vec j \to \vec j + (\varepsilon_0 c^2\varepsilon)\vec E$, $\tilde{\vec j} \to \tilde{\vec j} + (\varepsilon_0 c^2\varepsilon)\tilde{\vec E}$

Klausur-Hinweise

Di 17.7.07, 9.15 – 11.30, H6/H5

→ Perso-, Studi-Ausweis

20 Blatt Papier, je Name + Matr.-Nr. o. re.

Skript, Ü + eigne Lsn, Spickzettel, Schulz-Buch

nicht erlaubt: Computer, Taschenrechner, Handy

Vorbereitung: zu jeder Ü.: "was zu tun war" notieren

(Ü waren Trainingsprogramm

– und nun Di kommt der Test auf Ihre Fitness.)

Do im Tutorium → die dazu entstandenen Fragen

Mo abend: Bett, Material sortieren.

Di 9.15 kommen.

9.30 los – Übersicht.

durchlesen.

nicht der Reihe nach rechnen.

nicht festrechnen. → "Abstecken"?

Wiederholung / Semester-Überblick

[s. Kap. 6 – 10]

Märchen

q in $\vec{E}, \vec{B}$ $\qquad m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ $\qquad$ z.B. "Elektron"

woher weiß Natur das?

minimiert Zahl der Welt $\quad S = \int_1^2 dt \left(\frac{m}{2} v^2 - q\phi + q \vec{v} \vec{A} \right)$

mehrere T. $\quad \sum_a \left(\frac{m_a}{2} v_a^2 - q_a \phi(\vec{r}_a, t) + q_a \vec{v}_a \vec{A}(\vec{r}_a, t) \right)$

Rel.? $\quad \frac{m}{2} v^2 \to -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx -mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$

andere Hälfte Theorie: Feldbewegung? Max!

$$S_{Max} = \int dt \int d^3r \left(-\rho\phi + \vec{j}\vec{A} + \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \right)$$

oben: $\sum_a \left(-q_a \phi + q_a \vec{v}_a \cdot \vec{A} \right) \to \int d^3r \left(-\rho\phi + \vec{j}\vec{A} \right)$

genug! Natur-Harmonie erschließt sich erst in Formel-Sprache.

Ausblick $\qquad$ Theorie I (Lag, Ham, ED rel ..)

II QM

ele

verwirrt?! eigenes Skript

üben; rechnen; kämpfen; können

es gibt nur eine Natur

nur eine Physik

nur eine Erde

nur ein Leben

— nutzen Sie es!