Einf. i. d. Meth. d. theor. Physik II → EMTP II

YS, E6-118 (Di 10-12:30 u.n.V.)

www.physik.uni-bielefeld.de/~york/emtp2

Orga Vorl Di 8.15-9.00, 9.10-9.55 (H6)

in Pause: Ü-Blatt holen (heute noch nicht) ↪ Ostern...

Ü-Liste eintragen (nur heute)

Übungen Do. 8-10, 10-12, 14-16

Tutoren: s. vor Pause

vor Vorl: Ü-Lsn in Kasten

Regeln: 50% Ü-Pkte + akt Mitarbeit ⇒ Ü-Schein

Ü-Schein + (eine) Klausur best ⇒ Schein

↪ alt OK ↪ 17.7.07, 9.10.07

EMTP I - Klausur: (Statistik: 71% bestanden; Gratu!!)

Besprechung / Fragen diese Woche in Ü → evtl. Aufg.zettel mitbringen

(neue Hörer? → als Wdh der EMTP I)

Ü-Schein: Pause

KI-Erfolg nicht EMTP II-Voraussetzung.

EMTP II: nicht schwerer als I. schöner! interessanter!

Integrale, krumme Koordinaten, δ

Differenzialgln

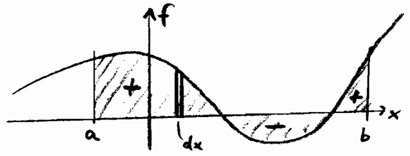
Felder, Integralsätze

Fourier-Trafo

LIT → s. Web; Schulz PB

6. Integrale (+ deren Gebrauch i.d. Physik)

6.1. Gewöhnliche Integrale



Die so gezählte Fläche ist {lin. Op.} f(x), denn (u.a.) $\{\ \}(-f) = -\{\ \}f$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Fläche}\\ \text{zw. } a,b\end{array}\right) = \underbrace{\lim \Sigma}_{\int} \left(dx\cdot f(x)\right) =: \int_a^b dx\, f(x)$$

$$\int_b^a dx\, f := -\int_a^b dx\, f$$

$\int dx :=$ über alle x, d.h. $\int dx\, f := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f$, $\int d\varphi := \int_{(2\pi)} d\varphi$

Dimension: $[\int dx\, f] = [x][f]$, $[a] = [b] = [x]$

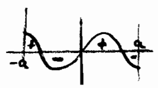
$\int$-Auswertung = Umformung, bis es trivial ist (d.h. die Fläche geometrisch erhältlich ist)

oder $f = \partial_x(\ldots)$, s.u. "Hauptsatz"

Beispiele:

$$\int_a^a dx\, f = 0$$

$$\int_a^b dx\, \mathrm{const}_x = (b-a)\cdot \mathrm{const}_x \qquad \left(\int_a^{a+\varepsilon} dx\, f(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varepsilon f(a)\right)$$



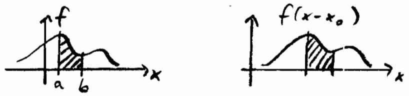
$$f \text{ ungerade} \Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 0$$

$$f \text{ gerade} \Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 2\int_0^a dx\, f$$

$$\int_a^b dx\, (\alpha f + \beta g) = \alpha\int_a^b dx\, f + \beta\int_a^b dx\, g$$

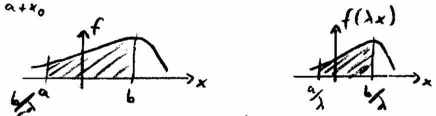
$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \int_a^c - \int_b^c$$

Tricks: Verschieben



$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{a+x_0}^{b+x_0} dx\, f(x-x_0) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} f(x)\to f(x-x_0) \\ \text{Grenzen} \to \text{Grenzen} + x_0 \end{array}\right)\right)$$

Skalieren

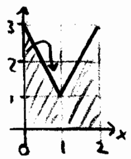


$$\int_a^b dx\, f(x) = \lambda \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx\, f(\lambda x) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} x\to \lambda x \\ dx \to \lambda\, dx \\ \text{Grenzen} \to \text{Grenzen}/\lambda \end{array}\right)\right)$$

Anwendungs-Beispiel

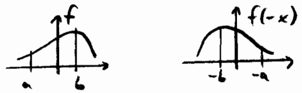
$$\begin{aligned} J &= \int_0^2 dx\, (2|x-1|+1) && , \quad x\to x+1 \\ &= \int_{-1}^1 dx\, (2|x|+1) && , \quad x\to \tfrac{1}{2}x \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^2 dx\, (|x|+1) && , \quad \text{gerade Fkt} \\ &= \int_0^2 dx\, (|x|+1) = \int_0^2 dx\, (x+1) && , \quad x\to x+1 \\ &= \int_{-1}^1 dx\, (x+2) && , \quad x \text{ ist ungerade Fkt} \\ &= 2\int_{-1}^1 dx = 2\cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

((einfacher Check hier: zeichnen



$f\to 2$, $J = 2\cdot 2 = 4$ ✓))

Spiegeln

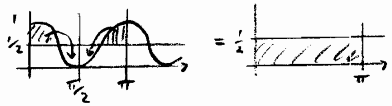


$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{-b}^{-a} dx\, f(-x) = -\int_{-a}^{-b} dx\, f(-x) \qquad ((\hat{=} \text{ Skalieren}, \lambda = -1))$$

trig$^2 \to \frac{1}{2}$

$$\int_0^\pi dx \begin{Bmatrix} \cos^2(x) \\ \sin^2(x) \end{Bmatrix} = \int_0^\pi dx \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{2}, \qquad \sin^2(x) = 1-c^2$$

denn:



weil $\cos^2(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \cos^2(\frac{\pi}{2} - x)$

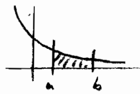
$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_0^a dx\, \sin^2(x) = \frac{1}{2},$$

denn $\frac{1}{N\pi + O(1)} \cdot \left(N\frac{\pi}{2} + O(1)\right) \to \frac{1}{2}$

$\int \to$ dimensionslos   z.B.:

$$\int_0^{t_1} dt\, v(t) = \int_0^{t_1} dt\, v_0 f(\omega t) = \frac{v_0}{\omega}\int_0^{\omega t_1} dt\, f(t) \quad , \quad t\to \tfrac{1}{\omega} t$$

$\int$ aus Σ (Scheibchen)   z.B.:



$$\int_a^b dx\, e^{-x} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(b-a)}{N} e^{-(a+n\frac{b-a}{N})}$$

aus §5, Potenzreihen: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}$ (Skript S. 42)

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{(b-a)}{N} e^{-a} \frac{1 - e^{-\frac{b-a}{N}(N+1)}}{1 - e^{-\frac{b-a}{N}}}$$

Nenner $\to \frac{b-a}{N} + O(\frac{1}{N^2})$

$$= e^{-a}(1 - e^{-b+a}) = e^{-a} - e^{-b}$$

$$\left(\left(\Rightarrow \int_0^\infty dx\, e^{-x} = 1 \right)\right)$$

$$= [-e^{-x}]_{x=b} - [-e^{-x}]_{x=a} \qquad ((\text{geht das immer? s.u.}))$$

"Hauptsatz"

$$\partial_b \int_a^b dx\, f(x) = \frac{\int_a^{b+\varepsilon} dx\, f(x) - \int_a^b dx\, f(x)}{\varepsilon} = \frac{\int_b^{b+\varepsilon} dx\, f(x)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} f(b)\cdot\varepsilon = f(b)$$

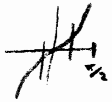
Kennt man zu $f(x)$ eine Stammfkt $F(x)$, d.h. eine Lösung der Dgl. $F'(x) = f(x)$, dann ist also

$$\begin{aligned} \partial_b \int_a^b dx\, f(x) &= \partial_b F(b) \\ \int_a^b dx\, f(x) &= F(b) + C \\ b\to a: \quad 0 &= F(a) + C \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)}$$

Kommentare zum Hauptsatz

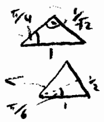
- •1 hilft nur, falls man $f = \partial_x F$ lösen kann
  $((f = \sin(x^2) = \partial_x (???)))$
- •2 warum er gilt: $\int_a^b dx \frac{dF}{dx} = F$-Zunahme ab $F(a)$
- •3 Anwendung: $\int_a^b dx \;\cancel{\;\;\;} = \int_a^b dx\, \partial_x [\,??\,] = [\;]_a^b = [\;]_{x=b} - [\;]_{x=a}$
- •4 Wunschtabelle $\frac{1}{1+x^2} = \partial_x \arctan(x)$ etc.
  wenn jedoch (s. Bronstein etc.) „$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$",
  dann lese dies als Tabelle (nicht als Gleichung: c ?!)
- •5 F in Tabelle gefunden
  → zitieren, z.B. [Bronstein, 57]
  → Probe, also $\partial_x(\text{rhs})$ bilden
  ((sonst: Pkt-Abzug bei Ü))
- •6 Bsp: $J_1 = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} dx \tan(x)$



ungerade!

$$= \int_{+\pi/6}^{\pi/4} dx \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \partial_x \ln(\cos(x)) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$= [-\ln(\cos(x))]_{\pi/6}^{\pi/4}, \quad \cos(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{1}{2}$$



$$= \ln(\sqrt{2}) - [-\ln(\sqrt{1-\tfrac{1}{4}})] = \tfrac{1}{2}\ln(2) + \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{3}{2})$$

- •7 $\int_a^\infty dx\, f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f$: wenn endlich, dann: „es existiert".
  Bsp: existiert $\int_0^\infty dx \,(\ln(1+e^x) \underbrace{-x}_{=\ln(e^{-x})})$? $\to = \ln(1+e^{-x}) = e^{-x} + O(e^{-2x})$, JA!
- •8 „Kandidaten-Methode":

$$J_2 = \int_0^1 dx \arctan(x) = \int_0^1 dx\, \partial_x [\,?\,]$$

$$\partial_x\, x\cdot\arctan(x) = \arctan(x) + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=\partial_x(?)}, \quad \partial_x \ln(1+x^2) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow [\,?\,] = x\arctan(x) - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$= \arctan(1) - \tfrac{1}{2}\ln(2) - 0 - 0 = \frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\ln(2) \qquad ((\tan(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1 \checkmark))$$

6.2. Physik mit (gewöhnl.) Integralen

→ Anwendungsbsp. zur Integration!

Mittelwerte $\frac{h_1+h_2}{2} = \bar{h}$, Verallg.:

$$\bar{f} = \frac{\Sigma f\text{'s}\; dx}{\text{Anzahl}\; dx} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f$$

$$\overline{f^2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx\, f^2, \quad \text{etc.}$$

Eigenschaften: $\overline{\alpha f + \beta g} = \alpha\bar{f} + \beta\bar{g}$, $\quad \bar{1} = 1$

Schwankung: $\Delta f = \sqrt{\overline{(f-\bar{f})^2}} = \sqrt{\overline{f^2} - 2\overline{f\bar{f}} + \bar{f}^2} = \sqrt{\overline{f^2} - \bar{f}^2}$

Bsp harm. Oszi., $x(t) = A\cos(\omega t)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (Periode), $\omega^2 = \frac{k}{m}$ $\quad ((m\ddot{x} = -kx = -\partial_x \frac{k}{2}x^2))$

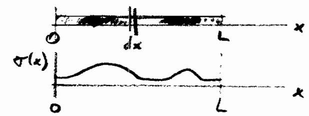
$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, A\cos(\omega t) = 0$$

mittl. kin. E $\rightsquigarrow \bar{T} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{m}{2}(A\omega \underbrace{\sin(\omega t))^2}_{\to 1/2} = \frac{m}{4}\omega^2 A^2$

mittl. pot. E $\rightsquigarrow \bar{V} = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{k}{2}(A \underbrace{\cos(\omega t))^2}) = \frac{k}{4}A^2 = \bar{T}$

$$\Delta x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\tfrac{2}{k}\bar{V}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}A$$

$\sigma(x)$ Massendichte



$$\sigma(x) := \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}} = \frac{dm \text{ bei } x}{dx}$$

$M = \sum_a m_a \longrightarrow M = \int_0^L dx\, \sigma(x)$ $\quad$ Ges.-Masse

$R_1 = \frac{1}{M}\sum_a m_a x_a \longrightarrow R_1 = \frac{1}{M}\int_0^L dx\, \sigma(x)\, x$ $\quad$ Schwerpkt

Erinnerung (§4): Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m(\vec{\omega}\times\vec{r}) \equiv I\vec{\omega}$ — Winkelgeschw., Trägheitstensor

starrer Körper, $I = \begin{pmatrix} I_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_{33}\end{pmatrix}$, z.B. $I_{33} = \sum_a m_a(x_a^2 + y_a^2)$

$$\vec L = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\omega \end{pmatrix}$$

$$I_{33} = \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2) \longrightarrow I_{33} = \int_0^L dx\, \sigma(x)\, x^2$$

Achse durch Ursprung

$$= \int_0^L dx\, \sigma(x) \left[(x-R_1)^2 + 2R_1(x-R_1) + R_1^2 \right]$$

$$= I_{33}^S + 0 + M R_1^2$$

„Satz v. Steiner"

$\leftarrow$ Achse durch Schwerpkt.

Superposition — Grav. Pot. eines Stabes mit $\sigma(x)$

Punktmassen M_a bei $\vec r_a$ ziehen m bei $\vec r$ an:

$$V(\vec r) = \sum_a \left(- \frac{\gamma m M_a}{\sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2}} \right)$$

dünner Stab auf x-Achse: $y_a = 0$, $z_a = 0$

$$\longrightarrow V(\vec r) = -\gamma m \int_0^L dx' \frac{\sigma(x')}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}}$$

⇝ Integral sammelt hier die infinitesimalen Fernwirkungen räuml. verteilter Ursachen auf. (($\int dx'$ OK, da $\sigma(x') = 0$ außerhalb $(0,L)$))

1D Newton, $K(t)$ $\quad \boxed{\dot v = \frac{1}{m} K(t), \quad v(t_0) = v_0}$

(A) Integral sinnvoll, wenn
- keine Stammfkt. von $K(t)$ zu finden ist
- $K(t)$ grafisch gegeben ist
- man noch allgemein bleiben will.

$$\int_{t_0}^t dt'\, \partial_{t'} v(t') = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt'\, K(t')$$
$$v(t) - v(t_0) =$$

(B) Integral nicht sinnvoll, wenn $K(t)$ aufleitbar ist:

$$\boxed{\dot v = \alpha\omega \cos(\omega t), \quad v(t_0) = v_0}$$
$$= \alpha\, \partial_t \sin(\omega t)$$

$\Rightarrow v = \alpha \sin(\omega t) + C$

$v_0 = \alpha \sin(\omega t_0) + C \Rightarrow C$;

1D Newton, $K(x)$ (evtl. unlösbar)

$$m\ddot x = K(x) = -\partial_x V(x) \quad \| \cdot \dot x$$
$$\partial_t \left(\frac{m}{2} \dot x^2 \right) = -\partial_t V(x(t))$$
$$\frac{m}{2} \dot x^2 = E - V(x)$$
$$\dot x = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}$$

((immerhin eine Ableitung weniger!))

$$\Rightarrow \frac{\dot x}{\sqrt{E - V(x)}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \qquad (*)$$

(B): $\partial_t [\,?\,] = C \pm \sqrt{\frac{2}{m}}\, t$, $C = \ldots$, nach x auflösen

(($[\,?\,]$ ist Stammfkt. v. $\frac{1}{\sqrt{E - V(x)}}$ bzgl. x))

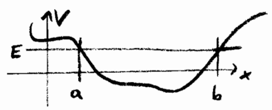
(A): (finde $[\,?\,]$ nicht, oder will $V(x)$ nicht spezifizieren:)

Strategie: $(*) \cdot dt$ $\quad (\dot x\, dt = dx)$ und $\int$ darüber [§7: "Trennung der Variablen"]

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^t dt' = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0)$$

$$t = t_0 \pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Periode T ?



$$T = 2 \int_a^b dx \frac{\sqrt{m/2}}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Arbeit (1D) := Kraft · Weg

$= \Sigma (d\text{Weg}) \cdot \text{Kraft}$

= pos., wenn Weg in Richtung Kraft

= dem System zugeführte Energie (Arbeit am System)

$$A = \int_a^b dx\, K(x) = -\int_a^b dx\, \partial_x V(x)$$
$$= V(a) - V(b)$$

6.3. Integrations-"Methoden"

((≙ Umformungs-Möglichkeiten zur Int.-Chance-Erhöhung))

Man erkenne, daß es Sinn macht, den Integranden $f(x)$ zu lesen ...

... als Partialbruch

$$f = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \partial_x \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

... als $u'v$ (partielle Integration)

$$f = u'v = \partial_x(uv) - uv'$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx\, u'v = [uv]_a^b - \int_a^b dx\, uv'$$

Bsp: $$I = \int_0^1 dx\, \underbrace{2x}_{u'}\, \underbrace{\ln(x)}_{v} = \underbrace{[x^2 \ln(x)]_0^1}_{=0} - \int_0^1 dx\, x = -\frac{1}{2} + 0$$

$u = x^2 \quad v' = \frac{1}{x}$

wenn keine Randterme, dann: $\partial_x \to -\overleftarrow{\partial_x}$:

$$= \int_0^1 dx\, \ln(x)\, \partial_x x^2 \overset{!}{=} -\int_0^1 dx\, x^2\, \partial_x \ln(x)$$

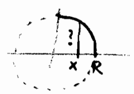
$$= -\int_0^1 dx\, x = -\frac{1}{2} \quad ✓$$

... als $f(x(t))$ (Substitution)

$x = x(t)$ sei monoton in (a,b), $\Rightarrow t = t(x)$

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\, \frac{dx}{dt}\, f(x(t))$$

Bsp 1: Kreis (R) – Fläche



$$F_{(R)} = 4\int_0^R dx\, \sqrt{R^2 - x^2}$$

setze $x = R\sin(\varphi)$ ((t heißt jetzt φ))

$\Rightarrow \frac{dx}{d\varphi} = R\cos(\varphi)$

$x_{unten} = 0 = x(\varphi = 0)$

$x_{oben} = R = x(\varphi = \frac{\pi}{2})$

$$\overset{!}{=} 4\int_0^{\pi/2} d\varphi\, R\cos(\varphi)\, R\sqrt{1-\sin^2(\varphi)} = 4R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\to \frac{1}{2}} = \pi R^2$$

((besser? aus $U = 2\pi R$:  $\to$  $\frac{u}{2}$, $F_{(R)} = R \cdot \frac{1}{2} 2\pi R = \pi R^2$))

Bsp 2

$$I = \int_0^1 dx\, 2x\, \ln(x)$$

setze $t = \ln(x) \Rightarrow x = e^t$, $\dot{x} = e^t$

$x_u = 0$ bei $t = -\infty$, $x_o = 1$ bei $t = 0$

$$= \int_{-\infty}^0 dt\, e^t\, 2e^t\, t \quad \text{((nun } \lambda\text{-Trick mit } \lambda = -1 \text{))}$$

$$= -2\int_\infty^0 dt\, e^{-2t}(-t) = -2\int_0^\infty dt\, t e^{-2t} \quad \text{((} t \to \tfrac{t}{2} \text{))}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, \underbrace{t}_{v}\,\underbrace{e^{-t}}_{u'} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, t(-\partial_t)e^{-t} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dt\, e^{-t} = -\frac{1}{2} \quad (\text{s.}\downarrow)$$

Bsp 3 (("uneigentliche" Integrale sind eigentlich eigentliche))

$$\int_0^\infty dx\, \underbrace{e^{-x}}_{=t,\ x = -\ln(t)} = \int_1^0 dt\left(-\frac{1}{t}\right)t = \int_0^1 dt = 1$$

... als ∂_α von ... (Differentiation nach Parameter)

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x} = \Big[(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x}}_{=1/\alpha}\Big]_{\alpha=1} \overset{!}{=} \left[\frac{n!}{\alpha^{n+1}}\right]_{\alpha=1} = n!$$

(($(-\partial_\alpha)\frac{1}{\alpha} = +\frac{1}{\alpha^2}$, $(-\partial_\alpha)\frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^3}$, ...))

... als Parameter-abhängig (vgl. Übung, Aufgabe 42)

$$\partial_? \overset{!}{=} -\beta\partial_\beta \ln\left(\int_0^\infty dx\, \frac{x}{e^{\beta x}+1}\right) = -\beta\partial_\beta \ln\left(\frac{1}{\beta^2}\int_0^\infty dx\, \frac{x}{e^x+1}\right)$$

$$= -\beta\partial_\beta\left[-2\ln\beta + \ln(\int \ldots)\right] = 2$$

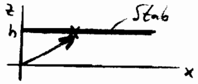
6.4 Kurven- u.a. Integrale

Strategie: alle auf gewöhnliche Int. zurückführen.

Integral = Summe. also

$$\int_a^b dx\, \vec F(x) = \left(\int_a^b dx\, f_1(x), \int_a^b dx\, f_2(x), \dots \right)$$

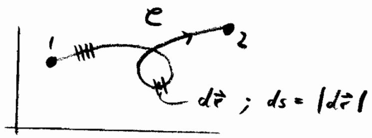
Bsp:



$$\vec R = \frac{1}{M}\int_0^L dx\, \sigma(x)\,(x,0,h) = (R_1, 0, h)$$

↳ Schwerpkt.

Kurvenintegral



$d\vec r$; $ds = |d\vec r|$

"C gegeben" $\equiv$ $\vec r(t)$, t_1, t_2.

↳ Raumkurve ($\vec r_1 = \vec r(t_1)$, $\vec r_2 = \vec r(t_2)$, ggf t_1 aus $\vec r_1$-Angabe)

Bsp für Gebrauch von Kurvenint.:

Länge von C $= \int_C ds = \int_1^2 ds$

$M = \int_1^2 ds\, \sigma(\vec r)$ Draht-Gesamtmasse

$M\vec R = \int_1^2 ds\, \sigma(\vec r)\,\vec r$ Draht-Schwerpkt

$V(\vec r) = -\gamma m \int_1^2 ds'\, \sigma(\vec r')\, \frac{1}{|\vec r - \vec r'|}$ Draht-Gravi-Pot.

$A = \int_1^2 d\vec r \cdot \vec K$ Arbeit entlang Weg C (auch wenn $\vec K$ kein V hat)

Ausrechnen von Kurvenint.:

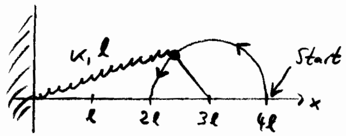
$d\vec r = dt \cdot \frac{d\vec r}{dt}$, bzw. $ds = dt \cdot |\dot{\vec r}|$

z.B. $A = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{\vec r} \cdot \vec K(\vec r(t))$

folgendes "Rezept" nützlich:

„$\int_C$ - Fahrplan"	am Bsp Kreisumfang
1. Größe, d.h. $\int_C$-Art	$U = \int_{Kreis} ds$
2. spezif. C	$\vec r(t) = R(\cos(t), \sin(t), 0)$
3. t_1, t_2	$t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$
4. $\dot{\vec r} =: \vec v$, ggf v bilden; t-Integral	$\vec v = R(-s, c, 0)$; $U = \int_0^{2\pi} dt\, R$
5. $\vec r(t)$ in Integrand einsetzen	— entfällt —
6. ggf. Skalarprod. ausführen	— entfällt —
7. gew. Int. auswerten	$U = R \cdot 2\pi$

Bsp: Mausefalle



Arbeit A als Kurvenintegral!
(Fahrplan-Illustration)

((vorweg: es muß $A = V_{Start} - V_{Ende}$ herauskommen
$= \frac{\kappa}{2}(4l - l)^2 - \frac{\kappa}{2}(2l - l)^2 = \frac{\kappa}{2} l^2 (9-1) = 4\kappa l^2$))

1. $A = \int_C d\vec r \cdot \vec K(\vec r)$, $\vec K(\vec r) = \kappa \left(\frac{-\vec r}{r}\right)(r - l)$ ↖ $\vec e_{m \to Haken}$

2. C: $\vec r(t) = l(3 + \cos(t), \sin(t))$

3. $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$

4. $\dot{\vec r} = \vec v = l(-s, c)$

$A = \int_0^\pi dt\, l(-s,c) \cdot \kappa(-\vec r)\left(1 - \frac{l}{r}\right)$

5. $r = |\vec r| = l\sqrt{9 + 6c + c^2 + s^2} = l\sqrt{10 + 6c}$

$A = l^2\kappa \int_0^\pi dt\, \underbrace{(-s,c)\cdot(-3-c,-s)}_{= 3s + \cancel{sc} - \cancel{sc}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10+6c}}\right)$

6.

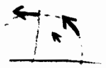
7. $= 3l^2\kappa \int_0^\pi dt \left(\sin(t) - \frac{\sin(t)}{\sqrt{10 + 6\cos(t)}}\right)$

↳ $= \partial_t\left[-\cos(t) + \frac{1}{3}\sqrt{10 + 6\cos(t)}\right]$

$= 3l^2\kappa\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{4} + 1 - \frac{1}{3}\sqrt{16}\right) = 4l^2\kappa$ ✓✓

5 $\int_C$ – Arten: $\int_C ds \begin{cases}\phi \\ \vec{A}\end{cases}$ ist $\begin{matrix}\text{Skalar} \\ \text{Vektor}\end{matrix}$, $\int_C d\vec{r} \begin{cases}\phi \\ \cdot\vec{A} \\ \times\vec{A}\end{cases}$ ist $\begin{matrix}\text{V.} \\ \text{S.} \\ \text{V.}\end{matrix}$

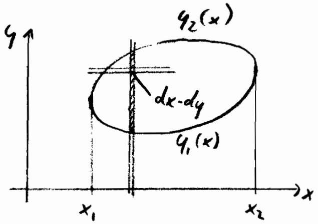
manchmal geometrisch auswertbar, z.B.:

$\vec{E} = \alpha\, \vec{e}_3 \times \vec{r}$, 

$$\oint_{\text{Kreis}(R)} d\vec{r} \times \vec{E} = \vec{0} \qquad (\text{weil } d\vec{r} \text{ stets } \parallel \vec{E})$$

$$\oint_{\text{Kr.}(R)} d\vec{r} \cdot \vec{E} = 2\pi R \cdot \alpha R \qquad (\text{weil } d\vec{r}\cdot\vec{E} = ds \cdot |\vec{E}| = ds \cdot \alpha R)$$

oft hilft, C geschickt zu legen!



ebenes Flächenint.

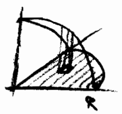
$\phi(x,y) = \dfrac{\text{etwas}}{\text{Fläche}}$ ← Masse, Heu, ...

gegeben, dann

$$\left.\begin{matrix}\text{gesamtes} \\ \text{etwas}\end{matrix}\right\} = \int_F d^2r \cdot \phi(x,y) \underset{\text{ausrechnen}}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, \phi(x,y)}_{\text{Streifen-etwas}}$$

((Randkurve? Immer? ))

Bsp Kugelvolumen



$x_1 = 0$, $x_2 = R$, $y_1(x) \equiv 0$, $y_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $\phi = \text{Höhe} = \sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}$

$$V_R = 8 \cdot \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad y \to \sqrt{R^2-x^2}\, y$$

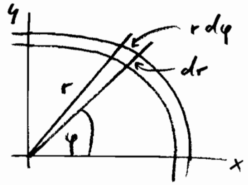
$$= 8 \cdot \int_0^R dx\, (R^2 - x^2) \underbrace{\int_0^1 dy \sqrt{1-y^2}}_{= \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^2(\varphi) = \pi/4} \qquad y = \sin(\varphi),\ \frac{dy}{d\varphi} = \cos(\varphi)$$

$x \to Rx$

$$= 2\pi R^3 \underbrace{\int_0^1 dx\, (1 - x^2)}_{= 1 - [\frac{1}{3} - 0] = \frac{2}{3}} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

im letzten Bsp: kugeliges kartesisch ?!
brauchen "runde" Koordinaten!

Polarkoordinaten

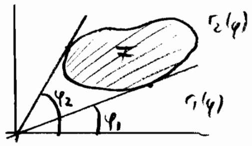


$$d^2r = dr\, r\, d\varphi$$

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + n\cdot\pi$$

$$((\varphi \text{ in } [0, 2\pi): \quad n = 1 + \Theta(x) - 2\Theta(x)\Theta(y)))$$



$$\int_F d^2r\, \phi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr\, r\, \phi(r,\varphi)$$

Test an Kreisfläche ($\overset{?}{=} \pi R^2$)

$\phi = 1$, , $4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr\, r = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} R^2$ ✓✓

Bsp Kugelvolumen

$$V_R = 8 \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\varphi}_{\pi/2} \int_0^R dr\, r\sqrt{R^2 - r^2} \qquad r \to Rr$$

$$= 4\pi R^3 \int_0^1 dr\, \underbrace{r\sqrt{1-r^2}}_{= \partial_r\left[\left(-\frac{1}{3}\right)(1-r^2)^{3/2}\right]}$$

$$= 4\pi R^3 \left(0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} R^3 \ ✓$$

Bsp Galaxie mit $\dfrac{\text{Masse}}{\text{Fläche}} =: \rho = \rho_0 e^{-r^2/a^2}$, $M = ?$

$$M = \int_{\substack{\text{ganze} \\ \text{Ebene}}} d^2r\, \rho = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr\, r\, e^{-r^2/a^2}, \quad r \to ar$$

$$= \rho_0\, 2\pi\, a^2 \int_0^\infty dr\, \underbrace{r\, e^{-r^2}}_{= \partial_r\left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]}$$

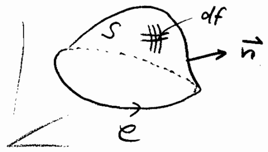
$$= \rho_0\, 2\pi a^2 \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \rho_0 \pi a^2$$

Nebenprodukt des letzten Bsp: zu $\rho_0 = 1$, $a = 1$ ist

$$\pi = \int d^2 r\, e^{-r^2} = \int dx \int dy\, e^{-x^2-y^2} = \left(\int dx\, e^{-x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \int dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\,, \qquad \int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Oberflächen-Int.:



gegeben: S, Rand $\mathcal{C}$ mit Richtung,

$$\frac{\text{etwas}}{\text{Fläche}} = \phi(\vec r)\,,\ \vec A(\vec r)\,.$$

Sei $\vec n$ ein Normalenvektor (Einheits-Vektor nach "außen" [rechte-Hand-Regel])

$\Rightarrow$ kann $df \cdot \vec n =: d\vec f$ bilden.

also: es gibt 5 Arten $\int_S$: $\int_S df \cdot \begin{Bmatrix}\phi \\ \vec A\end{Bmatrix}$, $\int_S d\vec f \begin{Bmatrix}\phi \\ \cdot\vec A \\ \times\vec A\end{Bmatrix}$

Anwendungs-Bsp: Strom durch Fläche $S =: I_S$

zu gegebener Ladungs-Stromdichte $\vec j$

$$\text{Strom} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}\,, \qquad \vec j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}}\,\vec e$$

nur $j_{\perp S} = j_{\parallel \vec n}$ erzeugt Strom $df\, j_{\parallel \vec n} = df\,(\vec j\cdot\vec n) = d\vec f\cdot\vec j$

$$\Rightarrow I_S = \int_S d\vec f\cdot\vec j(\vec r)$$

Ausrechnen?! S gegeben $\Rightarrow$ finde $\vec r(s,t)$

kann $\partial_s \vec r =: \vec r\,'$ und $\partial_t \vec r =: \dot{\vec r}$ bilden

brauche Flächenelement $d\vec f$:

$$d\vec r_1 = ds\, \vec r\,'\,, \qquad d\vec r_2 = dt\, \dot{\vec r}$$

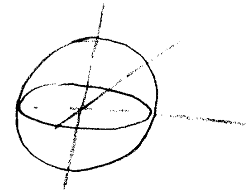
$$d\vec f = d\vec r_1 \times d\vec r_2 = ds\,dt\ \vec r\,'\times\dot{\vec r}$$

$$I_S = \int_{F \text{ in } s\text{-}t\text{-Ebene}} ds\,dt\ (\vec r\,'\times\dot{\vec r})\cdot\vec j$$

von s,t abhängig

$\Rightarrow$ habe auf ebenes Flächen-Int zurückgeführt.

Bsp Kugeloberfläche



$$S_R = 2\cdot\int_{S_\text{oben}} df$$

s,t: Polarkoord. ρ,φ in xy-Ebene

$$\vec r(\rho,\varphi) = \left(\rho\cos(\varphi),\ \rho\sin(\varphi),\ \sqrt{R^2-\rho^2}\right)$$

$$S_R = 2\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\ |\vec r\,'\times\dot{\vec r}| \cdot \{\phi=1\}$$

$$\vec r\,' = \partial_\rho \vec r = \left(c, s, -\frac{\rho}{\sqrt{\ }}\right)\,, \qquad \dot{\vec r} = \partial_\varphi\vec r = (-\rho s, \rho c, 0)$$

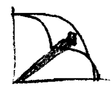
$$\vec r\,'\times\dot{\vec r} = \left(\frac{\rho^2 c}{\sqrt{\ }}, \frac{\rho^2 s}{\sqrt{\ }}, \rho\right)$$

$$|\vec r\,'\times\dot{\vec r}| = \sqrt{\frac{\rho^4}{\sqrt{\ }^2} + \rho^2\frac{\sqrt{\ }^2}{\sqrt{\ }^2}} = \frac{\rho R}{\sqrt{\ }}$$

$$= 2\cdot 2\pi R \int_0^R d\rho\ \underbrace{\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}}_{=\ \partial_\rho\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]}$$

$$= 4\pi R^2$$

Test Kugelvolumen V_R

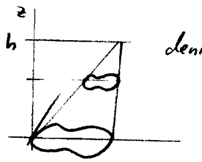


könnte V_R aus infin. Pyramiden ($\sim df$, $\sim$ Höhe R) aufbauen.

Es muß $V_R = \int \text{Pyr.-Vol.} = \int df\cdot R\cdot\lambda = \lambda R S_R$ gelten.

$\lambda = ?$

Beh.: Jede Pyramide hat Vol. $= \frac{1}{3}\cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe



denn: $$V_{F,h} = \int_0^h dz\, F\cdot\left(\frac{h-z}{h}\right)^2 = \frac{F}{h^2}\left[h^2 z - h z^2 + \frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}F h \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4\pi}{3}R^3 \overset{?}{=} \frac{1}{3}\cdot R\cdot 4\pi R^2 \quad ✓✓$$

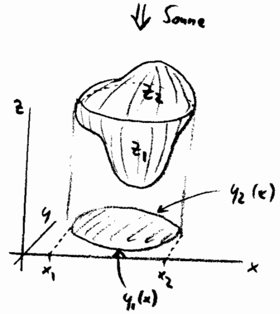
((Welt nicht nur aus Drähten, Hüten usw — auch aus Kartoffeln!))

Volumenintegral

gegeben: $\frac{\text{etwas}}{\text{Volumen}} =: \phi(x,y,z)$

und V, d.h. $x_1, x_2, y_1(x), y_2(x)$

und $z_1(x,y), z_2(x,y)$.



$dx\,dy\,dz =: d^3r$

Gesamtes etwas in V $\Big\} = \int_V d^3r\,\phi$

Auswertung kartesisch $= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz \; \phi(x,y,z)$

↳ Würfel in Säule bei x,y

↳ Σ Säulen in Scheibe bei x

↳ Σ Scheibchen

wenn $\rho(\vec r) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}}$, dann (gesamte Ladung in V) $= Q_V = \int_V d^3r\,\rho(\vec r)$

wenn $\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Vol.}}$, dann

$$\left.\begin{matrix} \text{Vol.} \\ M \\ M\vec R \\ I_{jk} \end{matrix}\right\} = \int_V d^3r \left\{\begin{matrix} 1 \\ \rho \\ \rho\cdot\vec r \\ \rho(r^2\delta_{jk} - x_j x_k) \end{matrix}\right.$$

$$V(\vec r) = -\gamma m \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

4 Fragen

1) $V_R \stackrel{?}{=} \int_V d^3r \cdot 1 = 8\cdot \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz$, $\exists A$.

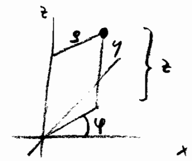
2) obige Formeln ohne V-Index schreiben, d.h. $\int$ über ganzen Raum? $\exists A$, $\rho := 0$ außerhalb V.

3) Wie folgen $\int_{\text{Draht}}$, $\int_{\text{Hut}}$ aus $\int_V$? ⇒ s. §6.6

4) 3D "runde" Koord.? ⇒ jetzt, §6.5.

6.5. Krummlinige Koord.

Zylinderkoord.: ρ, φ, z



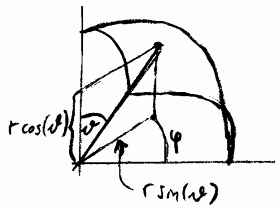
$x = \rho\cos(\varphi)$

$y = \rho\sin(\varphi)$

$z = z$

$d^3r = \underbrace{d\rho\;\rho\;d\varphi\;dz}_{\text{Länge}^3\ ✓}$ = "Balkon-Vol. am Wasserturm"

Kugelkoord.: r, ϑ, φ



$x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$

$y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$

$z = r\cos(\vartheta)$

$d^3r =$ Höhe · (NS-Breite) · (W-O Breite)

$= dr \cdot r\,d\vartheta \cdot r\sin(\vartheta)\,d\varphi$

$= dr\; r^2 \underbrace{d\vartheta\,\sin(\vartheta)\,d\varphi}_{=:\, d\Omega\ =\ \text{Haus-Grundfläche}/r^2}$

→ "Haus-Grundfläche"

Bsp $V_R = \int_{\text{Kugel}(R)} d^3r \cdot 1$

$= \int_0^R dr\, r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta\,\sin(\vartheta)}_{2} \underbrace{\int_{(2\pi)} d\varphi}_{2\pi}$

(⇒ $\int d\Omega = 4\pi$ = der max. Raumwinkel $= S_R/R^2$ ⇒ $S_R = 4\pi R^2$ ✓✓)

$= \frac{4\pi}{3} R^3$ ✓✓

Gravi-Pot. bei kugelförmiger Massenverteilung $\rho(r)$:

ohne Pfeil

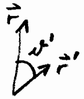
$$V(\vec r) = -\gamma m \int d^3r' \, \frac{\rho(r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

Nenner $= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec r \vec r'}$

$$= -\gamma m \int_0^\infty dr' \, r'^2 \rho(r') \int_{(2\pi)} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin(\vartheta') \, \frac{1}{\sqrt{}}$$

während $\vec r'$-Integration ist $\vec r$ fest.

$\Rightarrow$ orientiere $\vec r'$-Kugelkoord. um $\vec r$ als "z-Achse"



$\Rightarrow$ $\vec r \vec r' = r r' \cos(\vartheta')$

$$= -\gamma m \, 2\pi \int_0^\infty dr' \, r'^2 \rho(r') \int_0^\pi d\vartheta' \, \frac{\sin(\vartheta')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\vartheta')}}$$

generell:

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) f(\cos(\vartheta)) = \int_{-1}^1 du \, f(-u) = \int_{-1}^1 du \, f(u)$$

Subst. $u = -\cos(\vartheta)$

$du = d\vartheta \sin(\vartheta)$

$$= -\gamma m \, 2\pi \int_0^\infty dr' \, r'^2 \rho(r') \int_{-1}^1 du \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'u}} = \partial_u \frac{1}{rr'} \sqrt{} \right)$$

$$= -\gamma m \, \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty dr' \, r' \rho(r') \left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2} \right]$$

Jacobi-Determinante

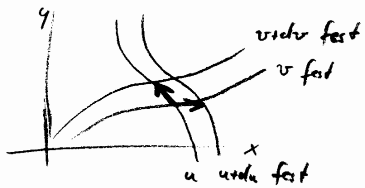
allg. krumme Koord., hier 2D ((denke an Polar Koord.)):

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned} \right\} \vec r(u,v)$$

$d^2r = |d\vec r_1 \times d\vec r_2|$

mit $d\vec r_1 = du \, \partial_u \vec r$

und $d\vec r_2 = dv \, \partial_v \vec r$.



$$d^2r = du \, dv \, |(\partial_u x, \partial_u y, 0) \times (\partial_v x, \partial_v y, 0)|$$

$$= du \, dv \, |(0, 0, (\partial_u x)\partial_v y - (\partial_u y)\partial_v x)|$$

$$= du \, dv \, \left| \underbrace{\begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix}}_{\text{Jacobi-Det.}} \right| \qquad \left(\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \right) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} & d^2r = du \, dv \, |J| \\ & \text{mit } J = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y \\ \partial_v x & \partial_v y \end{vmatrix} =: \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{aligned}}$$

Bsp Test mit Polarkoord: $u = r$, $v = \varphi$

$x = r\cos(\varphi)$
$y = r\sin(\varphi)$ $\qquad J = \begin{vmatrix} c & s \\ -rs & rc \end{vmatrix} = r$ ✓

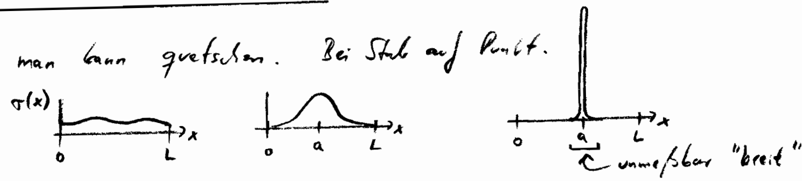
Bsp Test mit Kugelkoord: ...

... $\qquad J = \ldots = r^2 \sin(\vartheta)$ ✓

Durchatmen! bisher: anstrengend!
jetzt: einfach! und schön...

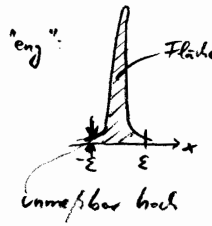
6.6. Delta-Funktion (der Physiker)

man kann quetschen. Bei Stab auf Punkt.



M bleibt konstant. $\displaystyle\int_0^L dx \, \frac{\sigma(x)}{M} = 1$, $\quad \dfrac{\sigma(x)}{M} \to \delta(x-a)$

1. Def. $\boxed{\delta(x) := \text{jede unmeßbar eng bei } x=0 \text{ konzentrierte Fkt mit } \int dx \, \delta(x) = 1}$



Bemerkung: "dünn, hoch, Fläche 1" genügt.
nicht $\varepsilon \to 0$ ausführen.
man gehe mit $\delta(x)$ um wie mit jeder normalen Fkt,
lediglich sieht man ihre Breite nicht mehr.

Mit normaler weicher Physiker-Fkt $f(x)$ folgt die

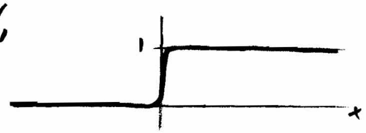
2. Def. $\boxed{\text{("definierende Eigenschaft")} \quad \int dx\, \delta(x-a)\, f(x) = f(a)}$

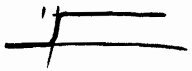
((denn: f wird in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ zu $f(a)$))

Bem.: Meistens steht δ unter einem Integral, oder wartet auf eins.

3. Def. $\boxed{\delta(x) := \partial_x \Theta(x)}$

wobei $\Theta(x)$ die Stufenfunktion ist,
also eine in ε-Bereich von
0 auf 1 ansteigende Fkt:



((denn: $\int_{-\infty}^{x} dx'\, \delta(x') =$  $= \Theta(x)$

∂_x auf beiden Seiten $\Rightarrow \delta(x) = \partial_x \Theta(x)$))

Definierende Eigenschaft von $\Theta(x)$:

$b>a, \quad \int_{-\infty}^{b} dx\, f(x)\, \Theta(x-a) = \int_a^b dx\, f(x)$

Test via Part. Int. $\quad u' \quad v \quad u = F(x) \quad v' = \delta(x-a)$

$$F(b) - \int_{-\infty}^{b} dx\, F(x)\, \delta(x-a) = F(b) - F(a) = \int_a^b dx\, \partial_x F(x)$$

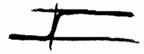
"$\Theta(0) = ?$" — kranke Frage!

δ-Darstellungen

- $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$

denn: dünn ✓ hoch ✓ $\int \text{rhs} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int dx\, e^{-x^2/\varepsilon^2} \overset{x \to \varepsilon x}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx\, e^{-x^2} = 1$ ✓

(("$\delta(x) = \alpha\, e^{-x^2/\varepsilon^2}, \alpha = ?$" $\Rightarrow 1 \overset{!}{=} \int dx\, \alpha\, e^{\cdots} = \ldots \Rightarrow \alpha$))

- $\Theta(x) = \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$, 

$\delta(x) = \partial_x \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}}$

- $\delta(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$,  , $1 \overset{?}{=} \frac{1}{\pi} \int dx\, \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int dx\, \frac{\sin(x)}{x}}_{= \pi \text{, später... ((s.u.))}}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk \left(\overbrace{\cos(kx)}^{\partial_k \frac{\sin(kx)}{x}} + i \sin(kx) \right) \text{, Euler}$$

weil ungerade

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, e^{ikx}$$

- $\Theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$$\delta(x) = \partial_x (\,\cdot\,) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon - ix} + \frac{1}{\varepsilon + ix} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left(\underbrace{e^{ikx - \varepsilon k}}_{\text{denn } = \partial_k \frac{e^{ikx-\varepsilon k}}{ix - \varepsilon}} + \text{c.c.} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk\, e^{-\varepsilon k}\, 2\cos(kx) \quad , \; e^{-\varepsilon k} \to e^{-\varepsilon |k|}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{-\varepsilon|k|} \left(\cos(kx) + i \sin(kx) \right)$$

weil ungerade

$$= \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{ikx}\, e^{-\varepsilon|k|} \quad \leftarrow \text{Fourier! (später)}$$

((in Lit.: konvergenzerzeugendes $e^{-\varepsilon|k|}$ oft weggelassen.)) $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk\, e^{ikx}$

(($J(k,\varepsilon) \equiv \int dx\, \frac{\sin(kx)}{x}\, e^{-\varepsilon |x|}$ ($\varepsilon \to 0^+$), $\quad \partial_k J = \int dx\, \cos(kx)\, e^{-\varepsilon|x|} = 2 \int_0^\infty dx\, \frac{1}{2} \left(e^{ikx} + e^{-ikx} \right) e^{-\varepsilon x} = \frac{2\varepsilon}{k^2 + \varepsilon^2}$

$\Rightarrow J(k,\varepsilon) = \text{Const}_k + 2 \arctan\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)$; J ungerade in $k \Rightarrow \text{Const} = 0$

$\Rightarrow J(1, 0^+) = \pi \quad \Rightarrow \int dx\, \frac{\sin(x)}{x} = \pi$))

• allg. Darst. $\delta(x) = \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

aus gegebenem $g(x)$, mit $F = \int dx\, g(x)$

δ-Formeln

• Dimension: $[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$

• $\delta(-x) = \delta(x)$ ((denn: $\int dx\, \delta(-x) f(x) = \int dx\, \delta(x) f(-x) = f(0)$))

• $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ ((denn: $\delta(ax) \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(ax)^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\pi}\frac{(\varepsilon/|a|)}{x^2+(\varepsilon/|a|)^2} = \frac{1}{|a|}\delta(x)$))

• etc, siehe $\boxed{\text{Sonderblatt}}$

• 2D: $\int d^2r\, \delta^{(2)}(\vec r - \vec a)\, \phi(\vec r) = \phi(\vec a)$

3D: $\int d^3r\, \delta^{(3)}(\vec r - \vec a)\, \phi(\vec r) = \phi(\vec a)$

⇒ kann kartesisch denken und $\delta(\vec r) = \begin{cases} 2D: & \delta(x)\delta(y) \\ 3D: & \delta(x)\delta(y)\delta(z) \end{cases}$

schreiben, muß aber nicht (→ Ü 56 f-h)

Bem.: $\delta(x-a)$ ist die Kontinuums-Version des Kronecker-δ:

$$\sum_{k=1}^{3} \delta_{jk} f_k = f_j \quad \Leftrightarrow \quad \int dx\, \delta(a-x) f(x) = f(a)$$

Physik mit δ

Kann mit δ Häute, Drähte, Punkte in 3D formulieren.

Dichte enthaltende Formeln (z.B. $V = -\gamma m \int d^3r' \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$) bleiben gültig, nur $\rho(\vec r)$ (= $\frac{\text{Masse od. Ladung}}{\text{Vol.}}$) spezialisiert sich:

z.B. • hom. Scheibe (M,R): $\rho(\vec r) = A\, \delta(z)\, \Theta(R-\varrho)$

$$M \overset{!}{=} \int d^3r\, \rho(\vec r) = A \int_0^R d\varrho\, \varrho \underbrace{\int d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int dz\, \delta(z)}_{1} = A \frac{R^2}{2} 2\pi \Rightarrow A = \frac{M}{\pi R^2}$$

• hom. Stab (M,L): $\rho(\vec r) = B\, \delta(y)\, \delta(z)\, \Theta(x(L-x))$

$$M \overset{!}{=} B \int_0^L dx \int dy \int dz\, \delta(y)\delta(z) = BL \Rightarrow B = \frac{M}{L}$$

• Punktmasse (M) am Ursprung

$\rho(\vec r) = C\delta(\vec r)$, $M \overset{!}{=} \int d^3r\, C\, \delta(\vec r) = C \Rightarrow \rho(\vec r) = M\delta(\vec r)$

• Punktladung (m,q) mit $\vec r_0(t)$

((jetzt $\rho = \frac{\text{Ladung}}{\text{Vol.}}$, $\vec j = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}}$))

$\rho(\vec r,t) = q\, \delta(\vec r - \vec r_0(t))$

$\vec j(\vec r,t) = \dot{\vec r}_0(t)\, q\, \delta(\vec r - \vec r_0(t))$

((⇒ Teilchenstrahlen; DESY; CERN!))

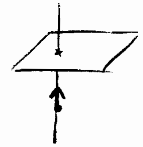
Bsp Q und I zu $\vec r_0(t) = vt\, \vec e_3 = (0,0,vt)$

$Q = \int d^3r\, \rho(\vec r) = q\int d^3r\, \delta(\vec r - \vec r_0(t)) = q$

$\underset{xy\text{-Ebene}}{I(t)} = \int_{z=0} d\vec F \cdot \vec j = \int dx \int dy\; \vec e_3 \cdot v\vec e_3\, q\, \delta(\vec r - vt\vec e_3)\Big|_{z=0}$

$= vq \int dx \int dy\, \delta(x)\delta(y)\, \delta(0 - vt)$

$= vq\, \delta(vt) = q\, \delta(t)$



• Hohlkugel (M,R) um Ursprung

$\rho(\vec r) = \alpha\, \delta(r-R)$, $M \overset{!}{=} \int d^3r\, \alpha\, \delta(r-R) = \alpha 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \delta(r-R) = \alpha 4\pi R^2$

⇒ $\rho(\vec r) = \frac{M}{4\pi R^2}\delta(r-R)$

Bsp Gravitationspotential einer Hohlkugel (M,R) (vgl. Ü 55a)

((benutze $V(\vec r)$ für $\rho(r)$, Skript S. 71))

$V(\vec r) = -\gamma m \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty dr'\, r' \frac{M}{4\pi R^2}\delta(r'-R)\left[\sqrt{(r+r')^2} - \sqrt{(r-r')^2}\right]$

$= -\gamma m \frac{M}{2Rr}\left[|r+R| - |r-R|\right]$, $\quad = \begin{cases} 2R & \text{für } r>R \text{ (außen)} \\ 2r & \text{für } r<R \text{ (innen)} \end{cases}$

$= \begin{cases} -\frac{\gamma m M}{r} & \text{außen} \\ -\frac{\gamma m M}{R} & \text{innen} \end{cases}$

((⇒ innen keine Kraft! Hohlwelt ⇒ umsonst nach USA, nur abstoßen;

Realität? Ladung Q auf Metallkugel sammelt sich auf Oberfläche!))

Zusatzmaterial zu EMTP II 15.05.2007

Definierende Eigenschaft der **Delta–Funktion**: $\int dx\, \delta(x-x_0)\, f(x) \;=\; f(x_0)$

δ–Darstellungen:

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{2\varepsilon} \quad \text{für} \quad -\varepsilon < x < \varepsilon \quad \text{und 0 sonst}$$

$$\delta(x) \;=\; \partial_x \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}} = -\partial_x \frac{1}{\mathrm{e}^{x/\varepsilon}+1}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2\!\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad , \quad \delta(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon^2}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, \cos(kx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\, \mathrm{e}^{ikx}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int dk\, \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon|k|} = \frac{1}{2\pi} \int dk\, \mathrm{e}^{ikx} \left(\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\right)$$

allgemein: $$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{mit} \quad F := \int dx\, g(x)$$

Stufenfunktion θ: $\partial_x \theta(x) = \delta(x)$, $\partial_x \Big(\theta(x)\text{–Darst.}\Big) = \delta(x)\text{–Darst.}$

$$\theta(x) = 1 - \theta(-x) \;\; , \;\; \mathrm{sign}\,(x) = \frac{x}{|x|} = 2\,\theta(x) - 1$$

δ–Formeln: $\delta(-x) = \delta(x)$, $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\Big(\delta(x-a) + \delta(x+a)\Big)$

allgemein: $$\delta\big(f(x)\big) \;=\; \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\, \delta(x-x_n) \quad , \quad x_n \text{ sind die Nullstellen von } f$$

$$\frac{1}{i} \int_0^\infty dk\, \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon k} = \frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \;,\; \mathcal{P} \text{ für } \textit{Principal value} \text{ (Hauptwert)}$$

$$\int dx\, f(x)\, \delta'(x) = -f'(0) \quad , \quad -x\,\delta'(x) = \delta(x) \quad , \quad \int dx\, \delta(x-a)\, \delta(x-b) \;=\; \delta(a-b)$$

δ–Physik:

Punktladung q bei $\vec r_0(t)$: $\varrho(\vec r, t) = q\, \delta\big(\vec r - \vec r_0(t)\big)$, $\vec\jmath\,(\vec r, t) = \dot{\vec r}_0(t)\; q\, \delta\big(\vec r - \vec r_0(t)\big)$

Geladener Kreisring : $\varrho(\vec r) = \frac{Q}{2\pi R}\, \delta(\varrho - R)\, \delta(z)$

Geladene Metallkugel : $\varrho(\vec r) = \frac{Q}{4\pi R^2}\, \delta(r-R)$

Der Ortsoperator X (Wirkungsweise $x\cdot$) hat gemäß $x\,\delta(x-a) = a\,\delta(x-a)$ die kontinuierlich mit a numerierten Eigenfunktionen $\delta(x-a)$.

Sei L ein (auf x–Abh. wirkender) linearer Operator, und $L\,y(x) = f(x)$. Gesucht ist $y(x)$. Wenn man dieses Problem für eine „Punktquelle“, d.h. das Hilfsproblem $L\,G(x,a) = \delta(x-a)$ lösen kann und somit eine „Greensche Funktion“ $G(x,a)$ kennt, dann erhält man ein $y(x)$ durch Anwenden des Operators $\int da\, f(a)$ auf beiden Seiten des Hilfsproblems:

$$\begin{aligned} \int da\, f(a)\, L\, G(x,a) &\;=\; \int da\, f(a)\, \delta(x-a) \\ L \int da\, f(a)\, G(x,a) &\;=\; f(x) \qquad \curvearrowright \qquad y(x) = \int da\, f(a)\, G(x,a) \quad . \end{aligned}$$

(Metallkugel wie Hohlkugel, denn:

Elektrostatik ⇒ unbewegliche Pkt-Ladung Q übt auf Probeladung q die Kraft $\vec K = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec r}{r}$ aus.

(kenne $\vec K$ aus Experiment; oder Maxwell-Gln.)

$\vec K \overset{?}{=} -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V) \Rightarrow V \equiv q\phi$, $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$

"Coulomb-Potential")

7. Gewöhnliche DGLN

Rückblick auf WS, auf etwas höherem Niveau

WS-Lösungsmethoden: Ansatz, $u+a$, $v = \frac{1}{y}$, $e^{\omega t} w$, ..

jetzt: zuerst besser sprechen; dann 10 Fälle

7.1 Vokabeln, 3 Sätze

Bsp: Der getriebene, 1D harmonische Oszillator mit Reibung,

$$m\ddot x = -m\gamma\dot x - m\omega^2 x + m f(t)$$

folgt der Dgl. $y'' + \gamma y' + \omega^2 y = f(x)$.

Diese ist
- gewöhnlich ($\neq$ partiell : $(\partial_t - \partial_x) y = h(x,t)$),
- 2. Ordnung (max. $'$-Anzahl),
- linear (y, y', y'' hoch eins),
- inhomogen ($f \neq 0$),
- explizit ($\neq F(y'', y', y, x) = 0$).

Die allg. Lsg. einer Dgl. n-ter Ordnung ist eine n-parametrige Schar von Lsn.

Bsp: $y''+\omega^2 y = k_0$, d.h. $L_2 y = k_0$ mit $L_2 = \partial_x^2+\omega^2$

hat $y_{allg.}(x) = \frac{k_0}{\omega^2} + \underbrace{A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)}_{\text{allg. Lsg. der hom. Dgl.}}$

└ spezielle Lsg. der inhomogenen.

((Erinnerung: Fktn. lin. unabh. $\Leftrightarrow$ aus LK(Fktn.) = 0 folgt Koeffs. = 0))

Zur allg. lin. Dgl. n-ter Ordnung, d.h.

$$\boxed{L_n y(x) = f(x), \quad \text{mit } L_n = \partial_x^n + f_{n-1}(x)\,\partial_x^{n-1} + \dots + f_0(x)}$$

gibt es 3 Sätze:

- • $L_n y = 0$ hat genau n lin. unabh. Lsn: $y_j(x)$, $j = 1,..,n$
- •• Die allg. Lsg von $L_n y = 0$ ist $y_{hom} = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$
- ••• Die allg. Lsg von $L_n y = f$ ist $y_{allg} = y_{hom} + y_{sp}$, wobei y_{sp} eine spez. Lsg von $L_n y = f$ ist.

((Beweis-Ideen:

• denke an Newton. kann bei $x=0$ starten mit AB $\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$ oder ...

$\Rightarrow$ es gibt also n Möglichkeiten (und nicht mehr; sonst LK)

•• hat n und löst $L_n y = 0$

••• $L_n y_{allg} = f$

$L_n y_{sp} = f$

$L_n(y_{allg} - y_{sp}) = 0$, d.h. $y_{allg.} - y_{sp.} = y_{hom.}$))

7.2 10 Fälle

"Repertoire", Wahrnehmungsraster; schon F'ef ging fast nie!

① Potenzansatz $\quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

$\boxed{\text{hom, lin, } x\text{- = }\partial\text{-Potenz}}$

$y = x^\lambda$, $\quad \lambda(\lambda-1)x^2 x^{\lambda-2} - 2\lambda x x^{\lambda-1} + 2x^\lambda = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\quad \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \{ {1 \atop 2}$

$\Rightarrow y_{allg} = C_1 x + C_2 x^2$

② neue Variable (viele Möglichkeiten!)

setze $x = x(\tau)$

benutze $y(x) = y(x(\tau)) = u(\tau) = u(\tau(x))$

habe $y' = u'^{\tau} \cdot \tau'^{x}$ usw. (y'', ...)

erhalte Dgl. für $u(\tau)$

Bsp $\quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ (s.o.), $0 < x$

setze $x = e^\tau$; $y(x) = y(e^\tau) = u(\tau) = u(\ln(x))$,

$y' = u'^{\tau}\frac{1}{x} = u'^{\tau} e^{-\tau}$, $\quad y'' = u''\frac{1}{x^2} - \frac{u'}{x^2} = u'' e^{-2\tau} - u' e^{-2\tau}$,

erhalte $\quad e^{2\tau}(u'' - u')e^{-2\tau} - 2e^\tau u' e^{-\tau} + 2u = 0$

$u'' - 3u' + 2u = 0 \quad (*)$

③ e-Ansatz: bei $\boxed{\text{lin, hom, konst Koeff.}}$

Bsp (*) mit $u = e^{\omega t}$ gibt $\omega^2 - 3\omega + 2 = 0 \Rightarrow \omega = \{ {1 \atop 2}$

$u_{allg} = C_1 e^\tau + C_2 e^{2\tau}$

Bsp $\left(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2\right) x(t) = 0$ (harm. Oszi. mit Reibung)

$x = e^{\omega t}$, $\omega^2 + 2\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$, $\omega = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ ($\omega_0 < \gamma$)

$x_{allg}(t) = C_1 e^{-\gamma t - \Gamma t} + C_2 e^{-\gamma t + \Gamma t}$

$\gamma < \omega_0$: $\omega = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\gamma=\omega_0$: nur 1 Lsg ? falsch!

studiere $\omega_0 \to \gamma$: $\Gamma = \varepsilon$, dann $\varepsilon \to 0$

$$x_{allg}^{\gamma=\omega_0}(t) = e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{-\varepsilon t} + C_2 e^{\varepsilon t}\right) \quad , \quad e^{\varepsilon} \approx 1+\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

$$= e^{-\gamma t}\left(\underbrace{C_1+C_2} + \underbrace{(C_2-C_1)\varepsilon}\, t + O(\varepsilon^2)\right)$$

$$= e^{-\gamma t}\left(A + B\, t\right)$$

(4) neue Fkt. (viele Möglichkeiten!)

Bsp allg. lin. inhom. Dgl. 1.O. $\boxed{y' + P(x)\, y = Q(x)}$

y_{hom}: $\frac{y'}{y} = \ln(y)'^x = -P(x)$

$$\ln(y) = -\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')$$

setze $y = y_{hom} \cdot u(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')}\, u(x)$

$$\Rightarrow -\cancel{P e^{-} u} + e^{-} u' + \cancel{P e^{-} u} = Q$$

$$u' = Q e^{+} \quad , \quad u = \int_{x_1}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{+\int \cdots} + C$$

$$y_{allg}(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')}\left(C + \int_{x_1}^{x} dx'\, Q(x')\, e^{\int_{x_0}^{x'} dx''\, P(x'')}\right)$$

„P-Q-Formel".

3 Konstanten ?↯ Nein, nur 2: bei (x_0, x_1)-Änderung ändert sich C.

(5) Variation der Konstanten

Bsp allg. lin. inhom. Dgl. 2.O. $\boxed{y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x)}$

wenn man eine Lsg $y_1(x)$ der hom. Dgl. kennt, dann reduziert $y = y_1 \cdot u$ die Ordnung um 1.

$$\ulcorner\ \partial_x^n f g = \left(\partial_x^{vorne} + \partial_x^{hinten}\right)^n f g\ \lrcorner$$

$$y_1'' u + 2 y_1' u' + y_1 u'' + a y_1' u + a y_1 u' + b y_1 u = f$$

~~~ = 0 nach Voraussetzung

haben also $y_1 u'' + (2 y_1' + a y_1) u' = f$

setze $u' =: v$, $v' + \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + a\right) v = \frac{f}{y_1}$

ist 1.O. $\Rightarrow$ nun P-Q-Formel!

(6) Trennung der Variablen

((erstmals nicht-linearer Fall))

$\boxed{y'(x) = f(x)\, g(y)}$, alle y nach links

$$\underbrace{\frac{1}{g(y)}}_{=\partial_y H(y)}\, y'(x) = \underbrace{f(x)}_{=\partial_x F(x)} \qquad \text{Stammfktn suchen}$$

$$\partial_x H(y(x)) = \partial_x F(x) \qquad \Rightarrow \qquad H(y) = F(x) + C$$

((zur Not: $y' = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{g} = dx \cdot f$, $\int_{y_0}^{y} dy' \frac{1}{g(y')} = \int_{x_0}^{x} dx' f(x')$))

(7) Reduktion(en) der Ordnung

(a) $\boxed{y'' = f(y, y')}$ Besonderheit: kein x

setze $y' = p(y)$: $y'' = p'^y y'^x = p'^y p$

$\Rightarrow$ $p'^y = \frac{1}{p} f(y, p)$ ist Dgl 1.O. für $p(y)$

Bsp: $m\ddot{x} = -\partial_x V(x)$, kein t, setze $\dot{x} = v(x)$, Strich $= \partial_x$,

$m v v' = \left(\frac{m}{2} v^2\right)' = -V'(x)$, $\frac{m}{2} v^2(x) = E - V(x)$.

(b) $\boxed{y'' = f(y', x)}$ Besonderheit: kein y

setze $y' = u$, $u' = f(u, x)$ ist Dgl 1.O.

(c) Landau-Trick: wenn $L = L_1 L_2$, d.h. $\boxed{L_1 L_2 y = f}$,

setze $u = L_2 y$, löse $L_1 u = f$ für u, danach $L_2 y = u$.

Bsp: $\ddot{x} + \omega^2 x = b(t)$

$$\underbrace{(\partial_t + i\omega)}_{L_1}\underbrace{\underbrace{(\partial_t - i\omega)}_{L_2} x}_{u} = b(t) \quad , \quad \text{löse } (\partial_t + i\omega) u = b(t) \text{ usw.}$$
~~~

(8) Dgl. $\geq$ 2.O. $\xrightarrow{\quad}$ $(\xleftarrow{\quad})$ Dgl-System 1.O.

((geht immer ; Computer froh über System))

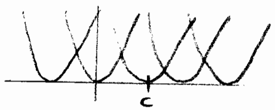
Bsp $y'' = f(y', y, x)$

setze $y' = z$ $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} z' = f(z, y, x) \\ y' = z \end{array} \right\}$

(9) singuläre Lsn (nur bei nichtlinearen Dgln)

Bsp $y'^2 = 4y$, $y' = \pm 2\sqrt{y}$, TdV: $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{y}}} y' = \pm 1$ $= \partial_y \sqrt{y}$

$\Rightarrow \sqrt{y}'^{\,\cdot} = \pm 1$, $\sqrt{y} = \pm x + C$, $y = (\pm x + C)^2$, $y_{allg} = (x - C)^2$



Die Einhüllende $y \equiv 0$ löst die Dgl auch! "Singuläre Lsg"

$\left\{ \begin{array}{c} \text{alle} \\ \text{Lsn} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{in der} \\ \text{allg. Lsg} \\ \text{enthaltene} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{eventuelle} \\ \text{singuläre} \\ \text{Lsn} \end{array} \right\}$

(10) Greensche Funktion (!) (s. auch Sonderblatt)

Problem: $L y(x) = f(x)$, gesucht: $y(x)$ für $x \in \{\text{Bereich}\}$.

ersetze "Ursache" $f(x)$ durch "Punkt-Ursache" $\delta(x-a)$

Hilfsproblem: $\boxed{L G(x,a) = \delta(x-a)}$

Wenn Lsg $G(x,a)$ (die Greensche Fkt von L) bekannt,

dann $\int_B da\, f(a)\, \overbrace{L\, G(x,a)}^{\text{wirkt}} \stackrel{!}{=} \int_B da\, f(a)\, \delta(x-a)$

$\underbrace{L \int_B da\, f(a)\, G(x,a)}_{\stackrel{!}{=} y(x)} = f(x)$

$\Rightarrow$ ein G gibt ein y, d.h. y_{sp} in $y = y_{hom} + y_{sp}$

((haben Antwort y aus Punkt-Ursache-Antworten G zusammengesetzt.))

Bsp $\dot{v} = -g$ (freier Fall), $v(t) = ?$

$v_{hom} = C$, Bereich: $0 < t < T$, $L_1 = \partial_t$

Hilfsproblem: $\partial_t G(t,a) = \delta(t-a)$

aufleiten: $G(t,a) = \Theta(t-a) + A$

$\Rightarrow v(t) \stackrel{!}{=} \int_0^T da\, (\Theta(t-a) + A)(-g)$

$= -g \int_0^t da \underbrace{- gAT}_{C} = -gt + C$

Bem.: $G(t,a)$ hängt nur von $t-a$ ab

allg.: wenn L "translationsinvariant",

d.h. $[L f(x)]_{x \to x-a} = L f(x-a)$

(also z.B. $L = \partial_x, \partial_x^2, \partial_x + C$; nicht $x\partial_x$),

dann genügt es, $L G(x) = \delta(x)$ zu lösen,

und dann $G(x,a) = G(x-a)$ zu setzen.

Bsp $\dot{v} + \gamma v = b(t)$

((hat via "P-Q-Formel" (4) ($P = \gamma$, $\int^t dt'\, P = \gamma t$)

die allg. Lsg $v = e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t dt'\, b(t') e^{\gamma t'}\right)$))

jetzt via Green. $L = (\partial_t + \gamma)$ ist transl.-inv.

$\rightsquigarrow$ muß $(\partial_t + \gamma) G(t) = \delta(t)$ lösen.

z.B. Ans ("γ muß weg") $G(t) = u(t) e^{-\gamma t}$

$\Rightarrow u' e^{-\gamma t} - \gamma u e^{-\gamma t} + \gamma u e^{-\gamma t} = \delta(t)$

$u' = \delta(t) e^{\gamma t} = \delta(t) \cdot 1$, $u = const_t + \Theta(t)$

also $G(t) = (const_t + \Theta(t)) e^{-\gamma t}$

und $v(t) \stackrel{!}{=} \int_0^T da\, b(a)\, (const + \Theta(t-a))\, e^{-\gamma(t-a)}$

$= e^{-\gamma t}\left(C + \int_0^t da\, b(a) e^{\gamma a}\right)$ ✓.

Bem.: • L mußte nur linearer Op. sein: es gibt viele L's.

• Punkt-Ursache in höheren Dim.: $\delta(\vec{r})$ bzw. $\delta(\vec{r})\delta(t)$.

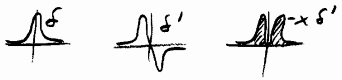
((Bem.: L transl.-inv. $\Leftrightarrow$ $[Lf(x)]_{x\to x-a} = L f(x-a)$

(Skript S. 44: Taylor) d.h. $e^{-a\partial_x} L f = L e^{-a\partial_x} f \quad \forall f$

d.h. $0 \stackrel{!}{=} L e^{-a\partial_x} - e^{-a\partial_x} L \equiv [L, e^{-a\partial_x}]$

Kommutator $[a,b] \equiv ab - ba$))

Bem. $-x\,\delta'(x) \stackrel{?!}{=} \delta(x)$ (s. Sonderblatt) ($\to$ Ü 636)

denn: 

$\Rightarrow$ beide Seiten hoch, schmal

Vorfaktor ok? $\int dx\,(\underbrace{-x}_{u}\underbrace{\delta'(x)}_{v'}) = -x\,\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int dx\,\delta(x) = 1$ ✓

8. Felder

bisher: gew. Dgln, z.B. Newton: nur ∂_t

↳ rechte Seite: $\vec{K}(\vec{r},t)$

„Feld" := etwas $(\vec{r},t)$

kennen schon $T(\vec{r},t)$, $p(\vec{r},t)$, $V(\vec{r},t)$, $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$, $\vec{v}(\vec{r},t)$, $\vec{K}(\vec{r},t)$, $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ $\to$ deren Bewgln?

z.B. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$ $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ $\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}}$

$\Rightarrow$ Maxwell-Gln. brauchen $\nabla\cdot$, $\nabla\times$, partielle Dgln

Das "etwas" muß sich verhalten bei Koord.-Drehung, ist also

Skalarfeld $\phi(\vec{r},t)$

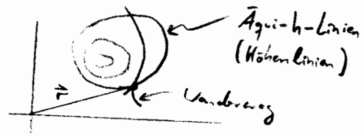
Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$

(Tensorfeld $\underline{\sigma}(\vec{r},t)$)

8.1. Gradient und Nabla

wollen statische Felder $(\phi(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r}))$ in Nähe der Stelle $\vec{r}$ charakterisieren

z.B. Karte: Berg hat Höhe $h(x,y)$ über Meeresspiegel-Ebene



Steilheit? In Wegrichtung? Richtung des größten Anstiegs?

in 3D: gegeben $\phi(\vec{r})$.

gehe ab $\vec{r}$ in Richtung $\hat{e}$. Erlebe $\phi(\vec{r} + s\hat{e})$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Steilheit}\\ \text{in } \hat{e}\text{-Richtg}\\ \text{bei } \vec{r}\end{array}\right\} \stackrel{!}{=} \text{Richtungsableitung}$$

$$\stackrel{!}{=} \left[\partial_s\,\phi(x+se_1,\, y+se_2,\, z+se_3)\right]_{s=0}$$

$$\stackrel{!}{=} e_1\,\partial_x\phi + e_2\,\partial_y\phi + e_3\,\partial_z\phi$$

$$\stackrel{!}{=} \hat{e}\cdot(\partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)$$

$$= \hat{e}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

Kann verschiedene $\hat{e}$ wählen.

Finde z.B. $\hat{e}\cdot\vec{\nabla}\phi = 0$, d.h. kein Anstieg, d.h. $\hat{e}$ liegt in Äqui-h-Fläche $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\phi$ steht $\perp$ auf Äqui.

Finde z.B. $\hat{e}\cdot\vec{\nabla}\phi = \max$, d.h. $\vec{\nabla}\phi \sim \hat{e}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}\text{Einh.-Vektor}\\ \text{in Richtung}\\ \text{max. Zunahme}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{diese}\\ \text{Zunahme}\end{pmatrix}$$

$$= (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\,\phi = \text{grad}\,\phi$$

mit $\boxed{\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)}$ = „Nabla-Operator"

$\vec{\nabla}$ Skalarfeld heißt „Gradient"

(aber $\vec{\nabla}\cdot$, $\vec{\nabla}\times$ Vektorfeld heißt anders, s. später)

(kann $\vec{\nabla}$ oder ∇ schreiben ...)

$\vec\nabla$ ist Vektor

Erinn.: Kap. 4, $\vec a$ ist V. $\Leftrightarrow$ $\vec a' = D\vec a$

$\rightsquigarrow$ Frage, ob $\boxed{\vec\nabla' = D\vec\nabla}$ Sinn macht

Testen dieser Operator-Identität: $(\partial_{x'}, \partial_{y'}, \partial_{z'})\,\phi(\vec r = D^T\vec r') \overset{?}{=} D\vec\nabla\phi$

hiervon die j-te Komp. ($x=x_1,\ y=x_2,\ z=x_3$) ist

$$(\nabla'\phi)_j = \partial_{x'_j}\phi\left(\overset{\text{Kette}}{(D^T)_{\ell m}} x'_m = D_{m\ell}x'_m\right) = (\partial_{x_\ell}\phi)\,D_{m\ell}\,\delta_{mj}$$

$$= D_{j\ell}\,\partial_{x_\ell}\phi = (D\vec\nabla\phi)_j$$

$\Rightarrow$ also ist $\vec\nabla'\phi = D\vec\nabla\phi \quad \forall\phi$ ■

$\vec\nabla$ in Kugelkoord.

darf statt der $\vec e_j$ in $\vec\nabla = \vec e_1\partial_x + \vec e_2\partial_y + \vec e_3\partial_z$ andere orthonormale Basis verwenden, z.B.

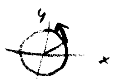
$$\vec\nabla = \vec e_r\,\partial_{\text{Weg n. oben}} + \vec e_\vartheta\,\partial_{\text{Weg n. Süden}} + \vec e_\varphi\,\partial_{\text{Weg n. Osten}}$$

$\vec e_r = \frac{\vec r}{r} = (Sc,\ Ss,\ C)$ $\quad S \equiv \sin(\vartheta)$

$\vec e_\varphi = (-s,\ c,\ 0)$ $\quad s \equiv \sin(\varphi)$

$\vec e_\vartheta = (Cc,\ Cs,\ -S)$

((s. Kap. 6; zu $\vec e_\varphi$:



$\vec e_\varphi = \frac{(-y,x,0)}{|\ldots|} = \frac{(-Ss,\ Sc,\ 0)}{S}$

zu $\vec e_\vartheta$: $\vec e_\varphi \times \vec e_r = \vec e_\vartheta$))

Weg nach Süden: $r\vartheta$; Weg nach Osten: $(rS)\cdot\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\vec\nabla = \vec e_r\,\partial_r + \vec e_\vartheta\,\frac{1}{r}\,\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\,\frac{1}{rS}\,\partial_\varphi}$$

Dimension: $[\vec\nabla] = \frac{1}{\text{Länge}} = [\text{rhs}]$ ✓

Gradient in Physik

kennen (s. Newton, Kap. 3) Kraft auf gel. T. (q)

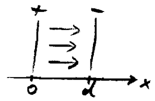
$\vec K = q\vec E + q\vec v\times\vec B$

zu $\vec B = 0$: $\vec K = q\vec E \overset{?!}{=} -\vec\nabla V$ "el.-statisches Potential"

$\Rightarrow \vec E = -\vec\nabla\phi$ mit $\phi = \frac{V}{q}$

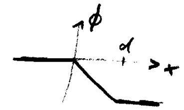
ϕ-Unterschied =: Spannung U

Bsp Plattenkondensator



$\vec E_{\text{innen}} = (E,0,0) \overset{?!}{=} -\vec\nabla\phi$

$\Rightarrow \phi = -Ex \ (+C)$



Spannung $U = 0 - (-Ed) = Ed$

Bsp ruhende Punktladung (Q) hat Coulomb-Potential $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

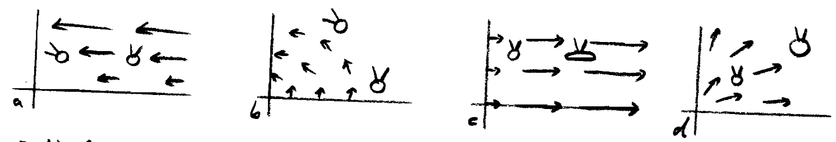
$\Rightarrow \vec E = -\vec\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r}{r^3}$

8.2 Rotation

gegeben: Vektorfeld $\vec A(\vec r, t)$

lokale Charakteristika? $\vec\nabla\cdot\vec A \rightsquigarrow$ § 8.3
$\vec\nabla\times\vec A \rightsquigarrow$ hier

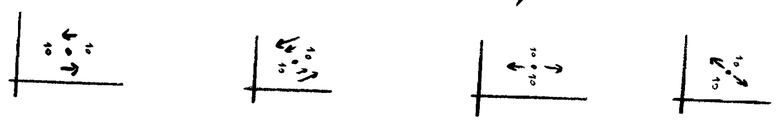
((Realisierung: setze $\vec A(\vec r,t) = \alpha\vec v(\vec r,t)$, lasse Wasser mit $\vec v$ strömen))



"ɣ ≙ treibendes Wasserfloß"

$\vec A$ ist charakterisiert durch Rotation (a,b), Dehnung (c,d) "Divergenz"

Floß fährt mit, hat bei $\vec r$ also $v(\vec r)$, sieht



$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}+d\vec{r}) - v(\vec{r}) \qquad (\overset{?}{=} \text{Matrix} \cdot d\vec{r})$$
$$= \left(v_1(x+dx, y+dy, z+dz) - v_1(\vec{r}), \ldots, \ldots\right)$$
$$= \left(v_1'^x dx + v_1'^y dy + v_1'^z dz, \ldots, \ldots\right)$$
$$= \begin{pmatrix} v_1'^x & v_1'^y & v_1'^z \\ v_2'^x & v_2'^y & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \equiv V\, d\vec{r}$$

aufspalten in sy/asy: $\quad V = V_S + V_A = \frac{1}{2}(V + V^T) + \frac{1}{2}(V - V^T)$

$\Rightarrow \; d\vec{v} = d\vec{v}_S + d\vec{v}_A = V_S\, d\vec{r} + V_A\, d\vec{r}$

dreht Floh nicht (dehnt ihn nur),

denn $\quad D\, d\vec{v}_S = \underline{D V_S D^T} D\, d\vec{r}$

$\quad d\vec{v}_S\,' = V_S'\; d\vec{r}\,' \quad , \quad V_S' = \begin{pmatrix} V_{S_{11}}' & 0 & 0 \\ 0 & V_{S_{22}}' & 0 \\ 0 & 0 & V_{S_{33}}' \end{pmatrix}$

((kann symm. Matrix immer diagonalisieren, s. Kap. 4.3 : HT))

$$d\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_1'^y - v_2'^x}{2} & \frac{v_1'^z - v_3'^x}{2} \\ & 0 & \frac{v_2'^z - v_3'^y}{2} \\ \text{anti} & & 0 \end{pmatrix} d\vec{r} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ & 0 & -\omega_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} d\vec{r} = \vec{\omega} \times d\vec{r}$$

also $\quad 2\vec{\omega} = \left(v_3'^y - v_2'^z,\; v_1'^z - v_3'^x,\; v_2'^x - v_1'^y\right) = \vec{\nabla} \times \vec{v}$

Def $\quad \operatorname{rot} \vec{A} = \alpha \operatorname{rot} \vec{v} := \alpha\, 2\vec{\omega}$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{Wirbelfeld von } \vec{A}}$$

Bsp wirbelfreie zirkulare Strömung

$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \, . \quad \vec{v}(\vec{r}) = ? \qquad$ partielle Dgl. lösen!

"zirkular": $\quad \vec{v} = \vec{e}_\varphi \cdot v(\varrho) = (-y, x, 0) \underbrace{\frac{v(\varrho)}{\varrho}}_{\equiv f(\varrho)}$

$\quad = (-yf, xf, 0)$

$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(0, 0, (xf)'^x + (yf)'^y\right) \overset{!}{=} \vec{0}$

$\quad 2f(\varrho) + \varrho f'(\varrho) = 0$

lösen: Trick ①, $f = \varrho^\lambda$, $2 + \lambda = 0$, $f_{allg} = \frac{c}{\varrho^2}$

$\Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{c}{\varrho} \vec{e}_\varphi \qquad$ ((z.B. Bohrinsel: ))

(ist wirbelfrei, ausgenommen z-Achse)

8.3. Divergenz

(Vorsicht: Doppelbedeutung)

gegeben $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

realisiere als $\vec{A} = \alpha \vec{v}$, $\vec{v}$ von Gas

dehnbarer Floh strömt mit

Def $\quad \operatorname{div} \vec{A} := \alpha \frac{\dot{Vol}}{Vol} \qquad$ (relative Volumenänderung)

Berechne Vol.-Änderung: $\quad d\vec{v} = d\vec{v}_S + d\vec{v}_A \qquad$ (s.o., S.88)

antisy; dreht nur, dehnt nicht

$d\vec{v}_S\,' = V_S'\, d\vec{r}\,' = \left(V_{S_{11}}' dx', V_{S_{22}}' dy', V_{S_{33}}' dz'\right)$

lege Quader (dx', dy', dz') an Stelle $\vec{r}\,'$

rechte Wand bewegt sich um $V_{S_{11}}' dx'$ schneller als linke, usw.

$\Rightarrow \quad \dot{Vol} = (dy'dz')\, V_{S_{11}}' dx' + (dx'dz')\, V_{S_{22}}' dy' + (dx'dy')\, V_{S_{33}}' dz'$

$\quad = Vol. \cdot \left(V_{S_{11}}' + V_{S_{22}}' + V_{S_{33}}'\right) = Vol. \cdot Sp(V_S') = Vol. \cdot Sp(V_S)$

Spur inv. bei Dreh.

$\quad = Vol. \cdot \left(\partial_x v_1, \partial_y v_2, \partial_z v_3\right)$

$\quad = Vol. \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{Quellenfeld von } \vec{A}}$$

Bsp quellenfreie kugelsymm.-radiale Strömung

$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \, . \quad \vec{j}(\vec{r}) = ?$

"kugelsy.": $\quad \vec{j} = \vec{e}_r \cdot j(r) = \vec{r} \underbrace{\frac{j(r)}{r}}_{\equiv f(r)}$

$\quad = (xf, yf, zf)$

$\partial_x r = \frac{x}{r}$ usw.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = (xf)'^x + (yf)'^y + (zf)'^z = 3f(r) + r f'(r) \overset{!}{=} 0$

lösen: wieder Potenzansatz ①, $f = r^\lambda$, $3 + \lambda = 0$, $f_{allg} = \frac{c}{r^3}$

$\Rightarrow \quad \vec{j} = \frac{c}{r^2} \vec{e}_r \qquad$ ((z.B. Coulomb-Feld$_{\text{(s.o.)}}$ $\vec{E} \sim -\operatorname{grad} \frac{Q}{r} = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$))

(ist quellenfrei, ausgenommen Ursprung)

Navier-Stokes Gln

Strömungsgeschw. $\vec{u}(\vec{r},t)$, Druck $p(\vec{r},t)$

in inkompressiblen Flüssigkeiten / Gasen

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{u}} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} &= \nu \underset{\vec{\nabla}^2}{\Delta} \vec{u} - \vec{\nabla}p \\ \vec{\nabla}\vec{u} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{4 Gln} \\ \text{4 Variablen: } \vec{u}, p \end{array}$$

$\Rightarrow$ Existenzbeweis von (glatten, physikalischen) Lsn

gibt $\boxed{\text{1 Million Dollar}}$!

$\rightsquigarrow$ www.claymath.org , "Millennium Problems"

System von nichtlinearen, partiellen Dgln 2. Ordnung

((nicht einmal der Fall $\nu = 0$, die „Euler Gleichungen", sind gelöst))

Kontinuitätsglg (Conti)

(die wichtigste (?) partielle Dgl. [kennt 4 Unbekannte]

Dichte $\varrho = \frac{\text{etwas}}{\text{Volumen}}$ ("etwas" = Ladung q, Energie E, Teilchenzahl N, ...)

$$\dot{\varrho} = \partial_t\, \varrho(\vec{r},t) = \partial_t\, \varrho(\vec{r},t) - (\partial_t\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\varrho = \partial_t \frac{N}{\text{Vol.}} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\varrho$$

in "mitströmenden Volumen" bleibt Teilchenzahl N const,

nur Vol. ändert sich :

$$= -\frac{N}{\text{Vol.}}\,\frac{\dot{\text{Vol.}}}{\text{Vol.}} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\varrho \overset{\text{(s.S.89)}}{=} -\varrho\, \vec{\nabla}\cdot\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\varrho$$

$$= -\vec{\nabla}\cdot(\varrho\vec{v}) \equiv -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\varrho} + \operatorname{div}\vec{j} = 0} \qquad \text{(Conti)}$$

Bem: • gilt, wenn "etwas" (pro Volumen gedacht) erhalten ist.

• lokale Glg: gilt an jedem Pkt $\vec{r}$ der Welt und seit 13.7 ± 0.2 Mrd. Jahren (WMAP)

• überlebt Relativitätstheorie, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie

• 1 Glg. für 4 Unbekannte $\Rightarrow$ braucht noch andere Gln (z.B. Maxwell: Conti folgt)

((relativistisch: $\partial_{ct}\, c\varrho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$, $[\vec{\nabla}] = [\partial_{ct}] = \frac{1}{\text{Länge}}$

$$\partial_{ct}\, c\varrho - (-\vec{\nabla})\vec{j} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{ct} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}}_{\equiv\, \partial} \bullet \begin{pmatrix} c\varrho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \partial_\mu j^\mu = 0$$

Vierer-Skalarprodukt ($a \bullet b = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b}$)))

8.4 $\vec\nabla$ mal $\vec\nabla$

bisher: Feld-Charakterisierung linear in $\vec\nabla$

jetzt: quadratisch

Räumliche Krümmungen gibt es

in 1D eine: $\partial_x^2 f(x)$ $(= \Delta_1 f)$

in 2D zwei: $\nabla\cdot(\nabla\phi)$ $(= \Delta_2 f)$

$\nabla(\nabla\cdot\vec A)$ = grad div $\vec A$

in 3D drei ?! – denn zwei der folgenden fünf sind Null

$$\phi \longrightarrow \vec\nabla\phi \begin{cases} \vec\nabla\times(\vec\nabla\phi) & \text{(Null)} \\ \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\phi) & = \Delta\phi \end{cases}$$

$$\vec A \begin{cases} \vec\nabla\times\vec A \begin{cases} \vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) & = \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \Delta\vec A \\ \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A) & \text{(Null)} \end{cases} \\ \vec\nabla\cdot\vec A \longrightarrow \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) \end{cases}$$

- $\vec\nabla\times(\vec\nabla\phi)$ = rot grad $\phi = \vec 0$,
  denn 1. Komp. $= \partial_y\partial_z\phi - \partial_z\partial_y\phi$ etc
- $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\phi) \equiv \Delta\phi$, mit $\boxed{\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \vec\nabla^2}$
  Laplace-Operator
- $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A)$ = rot rot $\vec A$
  "bac-cab" $= \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \Delta\vec A$ $\quad$ (($\Delta\vec A = (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3)$))
- $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A)$ = div rot $\vec A = 0$,
  denn $\partial_x(\partial_y A_3 - \dots) + \partial_y(\dots - \partial_x A_3)$ etc
- $\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A)$ = grad div $\vec A$

Die Nullen:

Ein Feld $(\vec K, \vec E)$ ist als grad ϕ darstellbar $\xrightarrow{\text{rot}(\text{grad}\,\phi) = \vec 0}$ es hat keine Wirbel
$\longleftarrow ? \longrightarrow$ (s.u., Theorem 1)

Ein Feld $(\vec B)$ ist als rot $\vec A$ darstellbar $\xrightarrow{\text{div}(\text{rot}\,\vec A) = 0}$ es hat keine Quellen
$\longleftarrow ? \longrightarrow$ (s.u., Theorem 2)

Laplace

Bsp

ϕ	x	x^2	x^2+y^2	x^2-y^2	$\frac{1}{r}$
$\Delta\phi$	0	2	4	0	0 ?$\not{}$, denn

$$\Delta\frac{1}{r} = \partial_x\left(-\frac{x}{r^3}\right) + \partial_y\left(-\frac{y}{r^3}\right) + \partial_z\left(-\frac{z}{r^3}\right)$$
$$= -\frac{3}{r^3} + \left(x\cdot 3\frac{x}{r^5} + \dots + \dots\right) = 0 \quad \text{für } \underline{\underline{r>0}} \; (!)$$

$\rightarrow \forall r$: s.u.

Δ in Kugelkoord.

$$\Delta = \vec\nabla\cdot\vec\nabla = \left(\vec e_r\partial_r + \vec e_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\frac{1}{rS}\partial_\varphi\right)\cdot\left(\vec e_r\partial_r + \vec e_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \vec e_\varphi\frac{1}{rS}\partial_\varphi\right)$$

9 Terme. z.B.

(($\vec e_{r,\vartheta,\varphi}$: s. S. 86))

$$\vec e_\varphi\frac{1}{rS}(\partial_\varphi\vec e_r)\partial_r + \vec e_\varphi\frac{1}{rS}\vec e_r\partial_\varphi\partial_r$$

$$\partial_\varphi\vec e_r = \partial_\varphi(Sc, Ss, C) = (-Ss, Sc, 0) = S\vec e_\varphi$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r + 0$$

((

	$\vec e_r$	$\vec e_\vartheta$	$\vec e_\varphi$
∂_r	0	0	0
∂_ϑ	$\vec e_\vartheta$	$C\vec e_\varphi$	0
∂_φ	$S\vec e_\varphi$	$-\vec e_r$	$(-S\vec e_r - C\vec e_\vartheta)$

))

$$\boxed{\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta^2 + \frac{C}{r^2 S}\partial_\vartheta + \frac{1}{r^2S^2}\partial_\varphi^2}, \quad S = \sin(\vartheta), \; C = \cos(\vartheta)$$

$$\underbrace{\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r}_{\equiv \Delta_r}$$

$$\equiv \left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)\partial_r = \frac{1}{r}(r\partial_r + 2)\partial_r = \frac{1}{r}(\partial_r r + 1)\partial_r = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r + 1)$$

$\partial_r r = 1 + r\partial_r$ $\qquad$ $= \partial_r r$

$$\boxed{\Delta_r = \frac{1}{r}\partial_r^2 r}$$

Green von Δ $\quad$ (behandle das "$\not{}$" oben genauer)

s.o.: $\Delta\frac{1}{r}$ war "krank" bei $r=0$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{r}$-Spitze einbetten / abrunden

z.B. $\frac{1}{r} \rightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}\right.$ (s. Schulz-Buch P8), $\frac{1}{r}(1 - e^{-r/\varepsilon})$ (s. Ü 70a), ... $\}$

hier: $\frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{r}\Theta(r-\varepsilon)$

betrachte $\Delta \frac{1}{r}\Theta(r-\varepsilon) = \frac{1}{r}\partial_r^2\,\Theta(r-\varepsilon) = \frac{1}{r}\delta'(r-\varepsilon)$

rhs ist im ε-Bereich lokalisiert, und hat

$$\int d^3r\,\frac{1}{r}\delta'(r-\varepsilon) = 4\pi\int_0^\infty dr\; r\,\delta'(r-\varepsilon) = 4\pi\big[r\,\delta(r-\varepsilon)\big]_0^\infty - 4\pi\int_0^\infty dr\;\delta(r-\varepsilon) = -4\pi,$$

ist also δ-Fkt

$\Rightarrow \quad \Delta \frac{1}{r}\Theta(r-\varepsilon) = -4\pi\,\delta(\vec r)$

$\overset{\varepsilon\to 0^+}{\Rightarrow} \quad \boxed{\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta(\vec r)}$

8.5 3 Theoreme (der Vektoranalysis)

$\mathcal{G}$:= einfach zusammenhängendes Gebiet

d.h.  , aber nicht 

[1] Sei $\vec E$ ein in $\mathcal{G}$ wirbelfreies Feld, d.h. $\operatorname{rot}\vec E = \vec 0$ $\Rightarrow$ $\vec E$ hat in $\mathcal{G}$ ein Potential, d.h. $\vec E = -\operatorname{grad}\phi$

Beweis: • OBdA nahe Ursprung, $\vec E = E(\vec 0) + S\vec r + A\vec r + \mathcal{O}(\vec r^{\,2})$

symm. Matrix (S), antisy. Matrix (A)

• $\operatorname{rot}\vec E = \vec 0 \Rightarrow A \overset{!}{=} 0$

((denn $A\vec r = \vec\omega\times\vec r$, s. S. 88; keine Rotation $\hat=$ $\vec\omega = 0$))

• $\vec E = \vec E(\vec 0) + S\vec r + \dots$ hat $\phi = -\vec E(\vec 0)\,\vec r - \frac{1}{2}\vec r S\vec r + \dots$

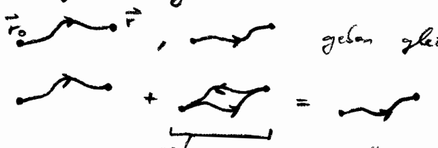
((denn $(\vec E)_i = -\partial_i\phi = -\partial_i\left[-E_k(0)\,r_k - \frac{1}{2}r_k S_{kl} r_l + \dots\right] = E_i(0) + S_{il}r_l + \dots$

• im ganzen $\mathcal{G}$: $\phi = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} d\vec r\,'\cdot\vec E(\vec r\,')$

((denn $-\partial_x\phi = \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{\vec r_0}^{\vec r+\varepsilon\vec e_1}\dots - \int_{\vec r_0}^{\vec r}\dots\right] = \frac{1}{\varepsilon}\int_{(x,y,z)}^{(x+\varepsilon,y,z)} d\vec r\,'\cdot\vec E(\vec r\,') = \frac{1}{\varepsilon}\vec E\cdot\vec e_1\,\varepsilon = E_1$))

• ϕ unabhängig vom Weg $\mathcal{C}$?!

d.h. $\vec r_0$ … $\vec r$, … geben gleiches ϕ ?!



$\overset{?!}{=} 0$, wg. "Stokes"-Satz, Kap. 9

[2] Sei $\vec B$ ein in $\mathcal{G}$ quellenfreies Feld, d.h. $\operatorname{div}\vec B = 0$ $\Rightarrow$ $\vec B$ hat in $\mathcal{G}$ ein Vektorpotential, d.h. $\vec B = \operatorname{rot}\vec A$

Beweis: • lokal: $\vec B = \vec B(\vec 0) + S\vec r + \underbrace{A\vec r}_{\vec\omega\times\vec r} + \mathcal{O}(\vec r^{\,2})$

• $\operatorname{div}\vec B = \partial_i\left[B_i(0) + S_{ij}r_j + A_{ij}r_j\right] = S_{ii} + \cancel{A_{ii}}^{\,0} = Sp(S) \overset{!}{=} 0$

• $\vec B$ hat $\vec A = \frac{1}{2}\vec B(0)\times\vec r - \frac{1}{3}\vec r\times S\vec r - \frac{1}{3}\vec r\times(\vec\omega\times\vec r)$

((denn $\vec\nabla\times\left(\frac{1}{2}\vec B(0)\times\vec r\right) \overset{\text{bac-cab}}{=} \frac{1}{2}\vec B(0)\,(\vec\nabla\cdot\vec r) - \frac{1}{2}(\vec B(0)\cdot\vec\nabla)\,\vec r = \frac{1}{2}[3-1]\,\vec B(0)$

und $\vec\nabla\times\left(-\frac{1}{3}\vec r\times S\vec r\right) = \vec\nabla\times\left(\frac{1}{3}S\vec r\times\vec r\right) \underset{\uparrow\,\text{Ü 66 b}}{=} \frac{1}{3}\left(2S\vec r - \vec r\,\underbrace{(\vec\nabla\cdot S\vec r)}_{\overset{!}{=}0,\ \text{s.o.}} + r\partial_r S\vec r\right)$

$= S\vec r$, denn $r\partial_r S\vec r = S\,\underbrace{r\partial_r r}_{=1}\,\vec e_r = S\vec r$ ($\vec e_r$ nur winkelabhängig)))

• global: $\vec A(\vec r) = -\frac{1}{2}\vec r\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}\vec r\vec\nabla}\,\vec B(\vec r)$

((→ s. S. 99)) — als Reihe gedacht: $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i$

Bem.: $\vec A$ nicht eindeutig festgelegt:

$\left.\begin{aligned}\vec B &= \operatorname{rot}\vec A_I\\ \vec B &= \operatorname{rot}\vec A_{II}\end{aligned}\right\}\quad \vec 0 = \vec\nabla\times(\vec A_I - \vec A_{II})$

$\vec A_I - \vec A_{II}$ kann ein Gradient sein! (s. S. 92: $\vec\nabla\times(\vec\nabla\phi) = 0$)

also $\vec A_I = \vec A_{II} + \vec\nabla\chi(\vec r)$ möglich.

$\vec B$ merkt von dieser "Umeichung" nichts.

[3] Unter den Lösungen $\vec A(\vec r)$ des Problems $\left\{\begin{aligned}\operatorname{div}\vec A &= Q(\vec r)\\ \operatorname{rot}\vec A &= \vec W(\vec r)\end{aligned}\right\}$ mit ganz im Endlichen liegenden gegebenen Quellen $Q, \vec\omega$ gibt es nur ein von $Q, \vec\omega$ verursachtes Feld $\vec A$. Es fällt mind. $\sim 1/r^2$ ab.

• "gibt es": setze $\vec A = \vec E + \vec B$ mit $\vec\nabla\cdot\vec E = Q$, $\vec\nabla\cdot\vec B = 0$, $\vec\nabla\times\vec E = \vec 0$, $\vec\nabla\times\vec B = \vec\omega$

kenne $\vec E = -\vec\nabla\int d^3r'\,\frac{Q(\vec r\,')}{4\pi|\vec r-\vec r\,'|}$, $\quad\vec B = \vec\nabla\times\int d^3r'\,\frac{\vec\omega(\vec r\,')}{4\pi|\vec r-\vec r\,'|}$

Test: $\vec\nabla\times\vec B = \vec\nabla\times\left(\vec\nabla\times\vec\int\dots\right) \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec\nabla\left(\vec\nabla\cdot\vec\int\dots\right) - \Delta\vec\int\dots =: \vec\nabla ① + ②$

$$② = -\int d^3r' \frac{\vec w(\vec r')}{4\pi} \underbrace{\boxed{\Delta \frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}}_{=-4\pi\delta(\vec r-\vec r')} = \vec w(\vec r)$$

$$① = \vec\nabla\cdot\vec\int\dots = \int d^3r' \frac{\vec w(\vec r')}{4\pi}\cdot \underbrace{\boxed{\vec\nabla\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}}_{=-\vec\nabla'\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}}$$

$$\int dx'\, w_1(\vec r')(-\partial_{x'})\frac{1}{|\;|} = \int dx' \frac{1}{|\;|}\partial_{x'} w_1 \qquad \text{(part. Int.)}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{1}{|\;|} \underbrace{\boxed{\vec\nabla'\cdot\vec w(\vec r')}}_{=\vec\nabla'\cdot(\vec\nabla'\times\vec B(\vec r'))\,=\,0} \qquad \text{((s. S. 92: div rot } \vec A=0\text{))}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \vec\nabla\times\vec B = \vec w$ ✓✓ ((und $\vec\nabla\cdot\vec B=0$ ✓✓ wg. div rot $\vec A=0$))

• "nur ein": gäbe es zwei $\vec A$, müßte die Differenz $\vec C = \vec A_I - \vec A_{II}$ die Gln $\left\{\begin{matrix}\vec\nabla\cdot\vec C=0\\ \vec\nabla\times\vec C=\vec 0\end{matrix}\right\}$ erfüllen

((8): System 1. Ordg → weniger Gln. 2. Ordg)

per $\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec C) = \vec 0 \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec\nabla(\underbrace{\vec\nabla\cdot\vec C}_{\overset{!}{=}0 \text{ nach Voraussetzung}}) - \Delta\vec C$

$\Rightarrow \Delta C_1 \overset{!}{=} 0,\ \Delta C_2 \overset{!}{=} 0,\ \Delta C_3 \overset{!}{=} 0$

es gilt aber:

> Weil eine Lsg ϕ von $\Delta\phi=0$ nirgends max. oder min. werden kann, liegen die betragsmäßig größten Werte am Rand.

((denn: hätte ϕ Max $\Rightarrow (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\phi$ neg, nicht 0))

$\Rightarrow$ da am "Rand" des $\mathbb{R}^3$ $\vec A\to\vec 0$ (nach Vorr. in ③ $\sim \frac{1}{r^2}$), so auch jede Differenz $\vec C$, also $\vec C\equiv\vec 0$ überall ■

9. Integralsätze

((Kap. 8 war lokale Analyse, Steigungen und Krümmungen. Auch Conti (und Maxwell) gelten lokal, in Umgebung jedes Punktes der Welt. Hier: einige globale Gleichungen, die manchmal nützlich sind))

9.1 Gauß und Stokes

(0.) $\int_a^b dx\,\partial_x F(x) = F(b)-F(a)$

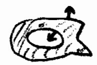
(1.) $\int_1^2 d\vec r\cdot \text{grad}\,\phi = \phi(2)-\phi(1)$

((denn: lhs $= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{\dot{\vec r}(t)\cdot\vec\nabla\phi}_{\overset{!}{=}\partial_t\phi(\vec r(t))} = \phi(\vec r(t_2)) - \phi(\vec r(t_1))$))

(2.) Gauß: $\boxed{\int_V d^3r\,\text{div}\,\vec E = \oint_S d\vec f\cdot\vec E}$

ein raumfestes Volumen ggf. mehrfach zus.h.

die Oberfläche von V ($\oint$ weil geschlossen) ggf. mehrere Teile



Beweis: physikalisch, via Conti. $\dot\rho + \text{div}\,\vec j = 0$ ("etwas" = Ladung = erhalten)

"was rausging, ist nicht mehr drin"

$$I_S \overset{!}{=} -\partial_t Q_V$$

$$\oint_S d\vec f\cdot\vec j \overset{!}{=} -\partial_t\int_V d^3r\,\rho = \int_V d^3r\,(-\dot\rho) \overset{\text{(Conti)}}{=} \int_V d^3r\,\text{div}\,\vec j$$

(3.) Stokes: $\boxed{\int_S d\vec f\cdot\text{rot}\,\vec B = \oint_C d\vec r\cdot\vec B}$

gewölbtes Flächenstück — dessen Randkurve

(auch mehrfach zus.h.)

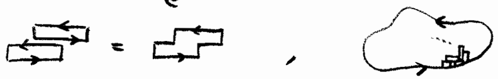
Beweis: (a) für Rechtecke
(b) für beliebige ebene Fläche
(c) für gewölbte Fläche

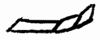
(a) oBdA: Rechteck in xy-Ebene  , $d\vec f = \vec e_3 \cdot d^2 r$

$$\int_S d\vec f\cdot \mathrm{rot}\,\vec B = \int_{\text{Rechteck}} d^2r\; \vec e_3\cdot(\dots,\dots,\partial_x B_2 - \partial_y B_1)\big|_{z=0}$$
$$= \int_0^a dx\int_0^b dy\,\big(\partial_x B_2(x,y,0) - \partial_y B_1(x,y,0)\big)$$
$$= \int_0^b dy\, B_2(a,y,0) - \int_0^b dy\, B_2(0,y,0)$$
$$- \int_0^a dx\, B_1(x,b,0) + \int_0^a dx\, B_1(x,0,0)$$

= 

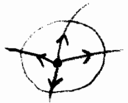
$$= \oint_C d\vec r\cdot\vec B$$

(b) 

(c)  usw.

Bem
- alle Int-Sätze sind Skalar = Skalar
- $\int$ n-fach $\nabla\dots$ = $\int$ (n-1)fach $\dots$
- (merken:) $\int_1^2 d\vec r\cdot \mathrm{grad}\,\phi = \phi_2-\phi_1$
  $\int_S d\vec f\cdot\mathrm{rot}\,\vec A = \oint_C d\vec r\cdot\vec A$
  $\int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\vec A = \oint_S d\vec f\cdot\vec A$

9.2. Anwendungsbeispiele

Bsp Kirchhoffs Regel  $\sum_\ell I_\ell = 0$

$\int_V d^3r$ über $0=\dot\rho+\mathrm{div}\,\vec j$ gilt (Gauß) n. Vorr.: nur Drähte in V

$$0=\partial_t\int_V d^3r\,\rho + \int_V d^3r\,\mathrm{div}\,\vec j \overset{(\text{Gauß})}{=} \partial_t Q_V + \oint_S d\vec f\cdot\vec j = 0 + \sum_\ell I_\ell$$

Bsp Magnetfeld vom geraden Draht

(4. Maxwellgleichung:) $\mathrm{rot}\,\vec B = \vec j/\varepsilon_0c^2$ (Stokes)

$$\Rightarrow \int_S d\vec f\cdot\mathrm{rot}\,\vec B \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_C d\vec r\cdot\vec B = \int_S d\vec f\cdot \vec j/\varepsilon_0 c^2$$

wähle S so, daß $\vec B \perp$ oder $\parallel C$ ist, und daß Strom durch S fließt,

z.B. gerader Draht, Strom I, 

S = Kreis(ρ) ; stets ist $d\vec r\parallel\vec B$

$$\rightsquigarrow B\cdot 2\pi\rho = I/\varepsilon_0c^2$$
$$\Rightarrow \vec B = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0c^2}\,\frac{1}{\rho}\,\vec e_\varphi$$

Bsp räumliche partielle Integration

$$\int_V d^3r\;\vec A\cdot\vec\nabla\phi = \int_V d^3r\,\big(\vec\nabla(\vec A\phi) - \phi\,\vec\nabla\cdot\vec A\big) \overset{(\text{Gauß})}{=} \oint_S d\vec f\cdot\vec A\phi - \int_V d^3r\,\phi\,\vec\nabla\cdot\vec A$$

wenn $V=\mathbb R^3$, d.h. S = dessen Rand, und $\vec A\to 0$ am Rand, dann ist offenbar "$\boxed{\overrightarrow{\nabla}\to -\overleftarrow{\nabla}}$" erlaubt

Nachtrag zu S.95, Beweis zu $\boxed{2}$:

$\vec A = \vec r\times\vec C(\vec r)$ mit $\vec C(\vec r) \equiv -\frac12\, \frac{1}{1+\frac12\vec r\vec\nabla}\,\vec B(\vec r)$

wurde behauptet. Zeige: $\vec B = \mathrm{rot}\,\vec A$, falls $\mathrm{div}\,\vec B=0$.

$$\vec B \overset{?!}{=} \mathrm{rot}\,\vec A = \vec\nabla\times(\vec r\times\vec C) \overset{(\text{bac-cab})}{=} \vec r(\vec\nabla\cdot\vec C) - \vec C(\vec\nabla\vec r) + (\vec C\vec\nabla)\vec r - (\vec r\vec\nabla)\vec C$$

a) $(\vec\nabla\vec C) = -\frac12\vec\nabla\sum_{n=0}^\infty\left(-\frac12\vec r\cdot\vec\nabla\right)^n\vec B$
$= -\frac12\sum_{n=0}^\infty\left\{\left(-\frac12\vec r\cdot\vec\nabla\right)^n\vec\nabla\cdot\vec B + n\left(-\frac12\vec r\cdot\vec\nabla\right)^{n-1}\left(-\frac12\vec\nabla(\vec r\cdot\vec\nabla)\right)\vec B\right\}$
$= \mathrm{div}\,\vec B = 0$ $\leftarrow \partial_j r_i\partial_i = \partial_j = \vec\nabla$

b) $(\vec\nabla\vec r) = \partial_i r_i = 3$

c) $(\vec C\cdot\vec\nabla)\vec r = C_i\partial_i r_j = C_j = \vec C$

$$= 0 - 3\vec C - \vec C - (\vec r\vec\nabla)\vec C = -2\left(1+\frac12\vec r\cdot\vec\nabla\right)\vec C = \vec B$$

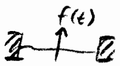
10. Fourier (≙ §12 in PB)

die wichtigste Rechenmethode? (in allen Gebieten der Physik)

ähnlich §5.3: Potenzreihen

hier: "harmonische Analyse"

10.1 Fourier-Reihe

Ein Ton (Trommelfell-Auslenkung ) sollte aus Grund- und Obertönen bestehen:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Stärke}_n \cdot \text{Oberton}_n(t) \qquad ((\text{Oberton}_1 \equiv \text{Grundton}))$$

Anteil n ist experimentell herausfilterbar.

Also sollte (könnte) jede L-periodische Fkt $f(x)$ $((f(x+L) \equiv f(x)))$ wie folgt darstellbar sein

$$f(x) \overset{?}{=} f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(n \tfrac{2\pi}{L} x\right) \right]$$

Euler $e^{ix} = c + is$

$$= \underbrace{f_0}_{\equiv c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)}_{\equiv c_n} e^{in\frac{2\pi}{L}x} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)}_{\equiv c_{-n}} e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

Falls ok, welche c_n? Wende Op. $\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x}$ an:

$$\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-im\frac{2\pi}{L}x} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{i(n-m)\frac{2\pi}{L}x}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m$$

$$= \begin{cases} n = m: & 1 \\ n \neq m: & \frac{1}{L} \frac{e^{i(n-m)2\pi} - 1}{i(n-m)2\pi/L} = \frac{1}{L} \frac{\overbrace{\cos[(n-m)2\pi]}^{=1} + i\overbrace{\sin[\ldots]}^{0} - 1}{\ldots} = 0 \end{cases}$$

Haben auch $f_0 = c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x) = \bar{f}$

$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{L}\int_0^L dx \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) f(x)$

$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \ldots \sin \ldots\ldots$

((Nachweis, daß ? unnötig ist:

gegeben f, berechne $c_n = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x)$,

bilde damit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} =: f_F(x)$,

prüfe ob $f_F = f$.

$$f_F(x) = \int_0^L dx' \underbrace{\frac{1}{L}\sum_n e^{in\frac{2\pi}{L}(x-x')}}_{\equiv K(x-x')} f(x')$$

$$K(x) = \frac{1}{L}\sum_n \left(e^{i\frac{2\pi}{L}x}\right)^n = \frac{1}{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-\infty}^{0} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{1}{1-()} + \frac{1}{1-1/()} - 1\right) = \frac{1}{L}\frac{1-()-1+()}{1-()} = 0,$$

außer bei $x = 0, \pm L$, usw!

$$K(x) \underset{x\to 0}{\Longrightarrow} \frac{1}{L}\int dn\, e^{i\frac{2\pi}{L}xn} = \frac{1}{L} 2\pi\, \delta\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = \delta(x)$$

also $K(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x + mL)$

$$= \int_0^L dx' \sum_m \delta(x - x' + mL) f(x') = f(x) \quad \blacksquare \quad))$$

Zusammenfassung:

$$\boxed{f_{L\text{-per.}}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x}}$$

Nebenprodukt (s.o.): $\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{L}x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x + mL)$

Bem.: bei c_n-Berechnung ist $(0,L)$-Verschiebung erlaubt (weil Integrand für ... L-per. ist):

$$\int_0^L = \int_0^{L-a} + \int_{L-a}^{L} = \int_0^{L-a} + \int_{-a}^{0} = \int_{-a}^{L-a}.$$

Eigenschaften:

f reell $\Leftrightarrow$ $c_n^* = c_{-n}$

f gerade $\Leftrightarrow$ $c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, f(x) \cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right) = c_{-n}$

d.h. $b_n = 0$, reine cos-Reihe

f ungerade $\Leftrightarrow$ $c_n = -c_{-n}$, d.h. $a_n = 0$, reine sin-Reihe und $f_0 = 0$

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n \, in\tfrac{2\pi}{L}}_{\text{hat diese Koeff'n}} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

$$f(x-a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n \, e^{-in\frac{2\pi}{L}a}}_{\text{hat diese Koeff!}} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

wichtig: $f(x) = \delta_{per.}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x+mL)$

gibt $c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \delta(x)\, e^{-\cdots} = \frac{1}{L}$

und $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$

<u>Bem</u>: Fourier-Reihe kann auch endlich viele δ's, sowie Stufen usw. darstellen.
(s. Ü 74)

<u>Anwendungen</u>

1) Diffusion (vgl. Ü 73) mit period. Start-Temp.

$$\dot{T} = D\Delta T, \quad T(x,t) = e^{tD\partial_x^2} T(x,0) = e^{tD\partial_x^2} \sum_n c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x} = \sum_n c_n e^{-tDn^2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

2) gedämpfter, periodisch angeregter Oszi.

$$\left(\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2\right) x(t) = b(t) = b(t+T)$$

nach Einschwingen auch $x(t) = x(t+T)$

$$\sum_n c_n \underbrace{(\ )}_{-\left(n\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \gamma\, in\frac{2\pi}{T} + \omega_0^2 \;=:\; [\ ]_n} e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_n b_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

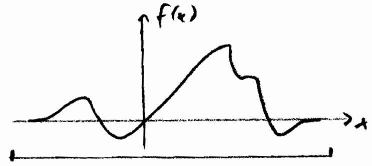
Koeff-Vergl.: $c_n [\ ]_n = b_n \Rightarrow c_n = \frac{b_n}{[\ ]_n}$

3) Fourier-Reihe liefert Fourier-Transformation (s. § 10.2)

10.2 Fourier-Transformation

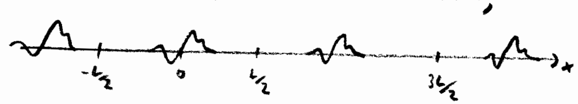
Motiv.: Geräusch statt Ton

„Physik ist nicht ewig periodisch"



Physik stets im Endlichen (?), wenn man nur weit genug blickt bzw. lange genug wartet/rückverfolgt

kann endliche Physik periodisch fortsetzen, als F-Reihe schreiben, und $L\to\infty$ studieren.



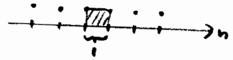
$$f(x) = \frac{1}{L}\sum_n (Lc_n)\, e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

mit $Lc_n = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} \underbrace{f(x)}_{\text{bleibt fest bei } L\to\infty} \xrightarrow{L\to\infty} \int dx\, e^{-in\frac{2\pi}{L}x} f(x) =: \tilde{f}\left(n\frac{2\pi}{L}\right)$

$$= \frac{1}{L}\sum_n \tilde{f}\left(n\tfrac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

beide nur schwächer von n abh.

Suche asympt. führenden f-Term bzgl $L\to\infty$



$\sum_n \ldots = \sum_n 1\cdot\ldots \to \int dn \ldots$

$$\to \frac{1}{L}\int dn\, \tilde{f}\left(n\tfrac{2\pi}{L}\right) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

(( , $O(1) = \int dx\, g(x) = \sum_n \varepsilon g(\varepsilon n) + O(\varepsilon)$

$\varepsilon \int dx\, g(\varepsilon x)$ $\quad \| \cdot \frac{1}{\varepsilon}$

$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \underline{\int dx}\, g(\varepsilon x) = \underline{\sum_n} g(\varepsilon n) + O(1)$))

Subst. $n\frac{2\pi}{L} = k$, $dn = \frac{L}{2\pi} dk$ gibt nun

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx} \tilde{f}(k) \\ \text{mit} \quad \tilde{f}(k) &= \int dx\, e^{-ikx} f(x) \end{aligned}}$$

- $\tilde{f}$ heißt die Fourier-Transformierte von f.
- 2π-Konvention!! (hier: ~ QFT)

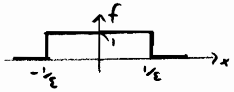
((Nachweis direkt: $f_F(x)$ bilden, $f_F = f$ zeigen,

$$f_F(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\left[\int dx'\, e^{-ikx'} f(x')\right]$$

$$= \int dx' \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ik(x-x')}}_{=\delta(x-x')} f(x') = f(x)\,,\quad \text{qed.}$$))

((s. Kap 6, Skript S. 74))

Bsp "Kasten" $f(x) = \Theta(\frac{1}{\varepsilon^2} - x^2)$



$$\tilde f(k) = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx\, e^{-ikx} = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon}$$

oder $\tilde f = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dx \left(\cos(kx) = \frac{1}{k}\partial_k \sin(kx)\right) = \frac{2}{k}\sin(k/\varepsilon)$

$\Rightarrow f = \Theta(\frac{1}{\varepsilon^2}+x^2)$ hat $\tilde f = 2\pi\,\frac{1}{\pi k}\sin(k/\varepsilon)$

Bei $\varepsilon \to 0$ erhält man ((Erinnerung Kap. 6, S. 74, $\frac{1}{\pi x}\sin(\frac{x}{\varepsilon}) = \delta(x)$))

$f(x) = 1$	hat	$\tilde f(k) = 2\pi\,\delta(k)$
und $f(x) = \delta(x)$	hat	$\tilde f(k) = 1$

Bem.:
- im physikalisch vollverstandenen Sinne sind Konstante und δ's F.-transformierbar
- f eng (großes ε), $\tilde f$ breit
  f breit, $\tilde f$ eng
- bei kleinen (großen) x wird f durch große (kleine) k in $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde f(k)$ gut dargestellt. [grobe Regel]

Bsp Gauß $f(x) = A e^{-\alpha x^2}$

$$\tilde f(k) = A\int dx\, \underbrace{e^{-ikx}}_{\to \cos(kx) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(kx)^{2n}} e^{-\alpha x^2}$$

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}k^{2n}(-\partial_\alpha)^n \underbrace{\int dx\, e^{-\alpha x^2}}_{=\alpha^{-1/2}\sqrt{\pi}}$$ ((Kap. 6, S. 67))

Klausurtipp: Integrale sammeln?

$$= 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\,\frac{1}{2^n}\,\alpha^{-\frac{1}{2}-n}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}$$

$$\tilde f(k) = A\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right)^n = A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$$

Bem.:
- erneut: f eng $\Leftrightarrow$ $\tilde f$ breit
- FT{Gauß} = Gauß
  eine Forminvarianz unter F.T.!
  es gibt mehr (∞ viele): $FT\left\{\frac{1}{\cosh(x)}\right\} = \frac{\pi}{\cosh(\frac{\pi}{2}k)}$
  $FT\left\{\sqrt{\frac{a}{|x|}}\right\} = \sqrt{\frac{2a\pi}{|k|}}$

allg. Eigenschaften

- f reell $\Leftrightarrow$ $\tilde f^*(k) = \tilde f(-k)$
- $f(-x) = \pm f(x) \Leftrightarrow \tilde f(-k) = \pm \tilde f(k) = \begin{cases}\cos\text{-Entwicklung}\\ \sin\text{-Entwicklung}\end{cases}$
- $\int dx\, |f|^2 = \int dx \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde f(k)\,\frac{1}{2\pi}\int dq\, e^{-iqx}\tilde f^*(q)$, $\delta(k-q)$
  $= \frac{1}{2\pi}\int dk\, |\tilde f(k)|^2$ "Parseval's Theorem"
- Tabellen. $f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)$
  $=: g(x) + u(x)$

$$\tilde f(k) = \int dx\, e^{-ikx}\left(g(x)+u(x)\right)$$
$$= \int dx \cos(kx)\, g(x) - i\int dx \sin(kx)\, u(x)$$

Räumliche FT

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int dk_1\, e^{ik_1x}\,\tilde{\tilde{\tilde f}}(k_1,y,z)$$
$$\tilde{\tilde{\tilde f}}(k_1,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int dk_2\, e^{ik_2y}\,\tilde{\tilde f}(k_1,k_2,z)$$
$$\tilde{\tilde f}(k_1,k_2,z) = \frac{1}{2\pi}\int dk_3\, e^{ik_3z}\,\tilde f(k_1,k_2,k_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f(\vec r) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\, e^{i\vec k\vec r}\,\tilde f(\vec k)\\ \text{mit}\quad \tilde f(\vec k) &= \int d^3r\, e^{-i\vec k\vec r} f(\vec r)\end{aligned}}$$

((Raumzeitliche FT: reine Konvention

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int d^3k\, d\omega\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}\, \tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega)$$

mit $\tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega) = \int d^3r\, dt\, e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t}\, \vec{E}(\vec{r},t)$))

Klausur-Eichstrich

10.3 Anwendungen

Oft:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{f\text{-Gln.}} \arrow[r, dashed, "?"] \arrow[d, "f = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\tilde{f} \text{ einsetzen}"'] & \boxed{\text{Lösung } f} \\
\boxed{\tilde{f}\text{-Gln.}} \arrow[r, "\text{lösen}"] & \boxed{\text{Lösung } \tilde{f}} \arrow[u, "\text{„nur noch" Integrieren!}"']
\end{tikzcd}$$

Bsp Elektrostatik

will $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$ lösen

Abstieg:
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \underbrace{\left\{\begin{matrix}\vec{\nabla}\cdot \\ \vec{\nabla}\times\end{matrix}\right\} e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{= \underbrace{\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{= i\vec{k}e^{i\vec{k}\vec{r}}} \left\{\begin{matrix}\cdot \\ \times\end{matrix}\right\}} \tilde{\vec{E}}(\vec{k}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde{\rho}(\vec{k}) \\ 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \to i\vec{k}}$$

Koeff-Vergl.:
$$i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde{\rho} \qquad (\tilde{1})$$
$$i\vec{k}\times\tilde{\vec{E}} = \vec{0} \qquad (\tilde{2})$$

Lösen:
$$i\vec{k}\times(\tilde{2}) \overset{\text{bac-cab}}{=} i\vec{k}\,(\underbrace{i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}}}_{\uparrow\ (\tilde{1})\ \text{einsetzen}}) + k^2\tilde{\vec{E}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \tilde{\vec{E}}(\vec{k}) = -\frac{i\vec{k}}{\varepsilon_0 k^2}\tilde{\rho}(\vec{k})$$

Aufstieg:
$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k\, \underbrace{e^{i\vec{k}\vec{r}}(-i\vec{k})}_{= -\vec{\nabla}e^{i\vec{k}\vec{r}}} \frac{1}{\varepsilon_0 k^2} \underbrace{\tilde{\rho}(\vec{k})}_{= \int d^3r'\, e^{-i\vec{k}\vec{r}'}\rho(\vec{r}')}$$
$$= -\vec{\nabla}\int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k\, \frac{4\pi}{k^2} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}_{\equiv K(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ \text{(s.u.)}} \rho(\vec{r}')$$
$$= -\vec{\nabla}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|}$$

(($K(\vec{r}) \overset{\text{Kugelkoord.}}{=} \frac{2}{\pi}\frac{1}{r}\underbrace{\int_0^\infty dk\, \frac{\sin(kr)}{k}}_{= \pi/2} = \frac{1}{r}$, $\boxed{FT\left\{\frac{1}{r}\right\} = \frac{4\pi}{k^2}}$))

$1 = \int dx\, \delta(x) = \int dx\, \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx\, \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}$, $x \to \varepsilon k r$ ■

FT → FR

$$f(x) - f(x+L) = 0$$
$$\frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\left[1 - e^{ikL}\right]\tilde{f}(k) = 0$$
Koeff-Vergl.: $\left[1 - e^{ikL}\right]\tilde{f} = 0$
$$\tilde{f}(k) = \sum_n 2\pi c_n\, \delta\left(k - n\frac{2\pi}{L}\right)$$
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{ikx}\sum_n 2\pi c_n\, \delta\left(k - n\frac{2\pi}{L}\right)$$
$$= \sum_n c_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

Maxwell-Gln. in Unterwelt

((Erinnerung: Intro Kap. 8, Skript S. 84: $\vec{\nabla}\vec{E} = \rho$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \dot{\vec{E}}$))

setze $\vec{E}, \rho, \vec{B}, \vec{j}$ 4D-entwickelt ein

benutze
$$\left.\begin{matrix}\vec{\nabla}\cdot \\ \vec{\nabla}\times \\ \partial_t\end{matrix}\right\} e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}\,\tilde{\vec{E}} = \left.\begin{matrix}i\vec{k}\cdot \\ i\vec{k}\times \\ -i\omega\end{matrix}\right\} e^{\cdots}\,\tilde{\vec{E}}$$

also $\vec{\nabla} \to i\vec{k}$, $\partial_t \to -i\omega$

Koeff-Vergl. gibt also

$$\boxed{\begin{matrix} i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde{\rho} , & i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{B}} = 0 \\ i\vec{k}\times\tilde{\vec{E}} = i\omega\tilde{\vec{B}} , & i\vec{k}\times\tilde{\vec{B}} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\tilde{\vec{j}} - \frac{i\omega}{c^2}\tilde{\vec{E}} \end{matrix}}$$

⇒ $\widetilde{\text{Max}}$ ist nur noch System von Vektorgln.,
leicht auflösbar nach $\tilde{\vec{E}}$, $\tilde{\vec{B}}$ (selber machen? Trick: z.B. $i\vec{k}\times(\text{Glg.})$)

⇒ Aufstieg zur kausalen Lösung (selber ?!)
füge "infinit. Leitfähigkeit (Reibung!) des $\mathbb{R}^3$" dazu,
via $\tilde{\vec{j}} \to \tilde{\vec{j}} + (\varepsilon_0 c^2 \varepsilon)\tilde{\vec{E}}$, $\vec{j} \to \vec{j} + (\varepsilon_0 c^2 \varepsilon)\vec{E}$

Klausur-Hinweise

Di 17.7.07, 9.15 – 11.30, H6/H5

→ Perso-, Studi-Ausweis

20 Blatt Papier, je Name + Matr.-Nr. o. re.

Skript, Ü + eigne Lsn, Spickzettel, Schulz-Buch

nicht erlaubt: Computer, Taschenrechner, Handy

Vorbereitung: zu jeder Ü: "was zu tun war" notieren

(Ü waren Trainingsprogramm – und nun Di Gesamt der Test auf Ihre Fitness)

Do im Tutorium → die dazu entstandenen Fragen

Mo abend: $\boxed{}$, Material sortieren.

Di 9.15 kommen

9.30 los – Übungsgebot.

durchlesen.

nicht der Reihe nach rechnen.

nicht festrechnen. → "Konstanten"?

Wiederholung / Semester-Überblick

[s. Kap. 6 – 10]

Rätseln

q in $\vec E, \vec B$ $\quad m\ddot{\vec r} = q(\vec E + \vec v \times \vec B)$ $\quad$ z.B. "Elektron"

weiß Natur das?

minimiert Zahl der Welt $\quad S = \int_1^2 dt\,\left(\frac{m}{2}v^2 - q\phi + q\vec v\vec A\right)$

mehrere T. $\quad \sum_a \left(\frac{m_a}{2}v_a^2 - q_a\phi(\vec r_a,t) + q_a\vec v_a\vec A(\vec r_a,t)\right)$

Rel.? $\quad \frac{m}{2}v^2 \to -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + O(\frac{1}{c^2})$

andere Hälfte Theorie: Felder-Begr.? Max!

$$S_{Max} = \int dt \int d^3r \left(-\rho\phi + \vec j\vec A + \frac{\varepsilon_0}{2}(\vec E^2 - \vec B^2)\right)$$

oben: $\sum_a(-q_a\phi + q_a\vec v_a\cdot\vec A) \to \int d^3r\,(-\rho\phi + \vec j\vec A)$

genug! Natur-Harmonie erschließt sich erst in Formel-Sprache.

Ausblick $\quad$ Theorie I (Lag, Ham, ED rel ..)

II QM

etc

vermisst?! eigenes Skript

üben; rechnen; kämpfen; kümmern

es gibt nur eine Natur

nur eine Physik

nur eine Erde

nur ein Leben

– nutzen Sie es!