# Zusatzmaterial zu EMTP II 15.05.2007

Definierende Eigenschaft der **Delta–Funktion**: $\int dx\, \delta(x-x_0)\, f(x) \;=\; f(x_0)$

**$\delta$–Darstellungen:**

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{2\,\varepsilon} \quad \text{für} \quad -\varepsilon < x < \varepsilon \quad \text{und 0 sonst}$$

$$\delta(x) \;=\; \partial_x \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}} = -\partial_x \frac{1}{\mathrm{e}^{x/\varepsilon}+1}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad , \quad \delta(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon^2}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\; \cos(kx) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} dk\; \mathrm{e}^{ikx}$$

$$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\pi}\int dk\; \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon|k|} = \frac{1}{2\pi}\int dk\; \mathrm{e}^{ikx}\left(\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\right)$$

allgemein: $$\delta(x) \;=\; \frac{1}{\varepsilon F}\, g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{mit} \quad F := \int dx\; g(x)$$

**Stufenfunktion $\theta$:** $\partial_x\theta(x) = \delta(x)$ , $\partial_x\Big(\theta(x)\text{–Darst.}\Big) \;=\; \delta(x)\text{–Darst.}$

$$\theta(x) = 1-\theta(-x) \;\; , \;\; \mathrm{sign}\,(x) = \frac{x}{|x|} = 2\,\theta(x) - 1$$

**$\delta$–Formeln:** $\delta(-x) = \delta(x)$ , $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ , $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\Big(\delta(x-a)+\delta(x+a)\Big)$

allgemein: $\delta\big(f(x)\big) \;=\; \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}\,\delta(x-x_n)$ , $x_n$ sind die Nullstellen von $f$

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty dk\; \mathrm{e}^{ikx-\varepsilon k} = \frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$$ , $\mathcal{P}$ für *Principal value* (Hauptwert)

$$\int dx\; f(x)\,\delta'(x) = -f'(0) \quad , \quad -x\,\delta'(x) = \delta(x) \quad , \quad \int dx\; \delta(x-a)\,\delta(x-b) \;=\; \delta(a-b)$$

**$\delta$–Physik:**

Punktladung $q$ bei $\vec{r}_0(t)$: $\varrho(\vec{r},t) = q\;\delta\Big(\vec{r}-\vec{r}_0(t)\Big)$ , $\vec{\jmath}\,(\vec{r},t) = \dot{\vec{r}}_0(t)\;\; q\;\delta\Big(\vec{r}-\vec{r}_0(t)\Big)$

Geladener Kreisring : $\varrho(\vec{r}\,) = \frac{Q}{2\pi R}\;\delta(\varrho-R)\,\delta(z)$

Geladene Metallkugel : $\varrho(\vec{r}\,) = \frac{Q}{4\pi R^2}\;\delta(r-R)$

Der Ortsoperator $X$ (Wirkungsweise $x\cdot$ ) hat gemäß $x\,\delta(x-a) = a\,\delta(x-a)$ die kontinuierlich mit $a$ numerierten Eigenfunktionen $\delta(x-a)$ .

Sei $L$ ein (auf $x$–Abh. wirkender) linearer Operator, und $L\,y(x) = f(x)$ . Gesucht ist $y(x)$ . Wenn man dieses Problem für eine „Punktquelle“, d.h. das Hilfsproblem $L\,G(x,a) = \delta(x-a)$ lösen kann und somit eine „Greensche Funktion“ $G(x,a)$ kennt, dann erhält man ein $y(x)$ durch Anwenden des Operators $\int da\; f(a)$ auf beiden Seiten des Hilfsproblems:

$$\begin{aligned} \int da\; f(a)\, L\, G(x,a) \;&=\; \int da\; f(a)\,\delta(x-a) \\ L\int da\; f(a)\, G(x,a) \;&=\; f(x) \qquad \curvearrowright \qquad y(x) = \int da\; f(a)\, G(x,a) \quad . \end{aligned}$$