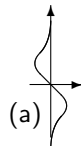


Aufgabe 10: Für Erfinder (0.5+0.5+0.5+0.5=2 Punkte)

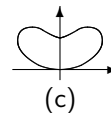
Notieren Sie möglichst einfache 2D Vektorfunktionen $\vec{r}(t)$, so daß Bahnkurven der skizzierten Form entstehen. Zu jeder Figur soll der Parameter $\omega t =: \tau$ von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen können. ($\vec{r}$ hat Dimension Länge.)



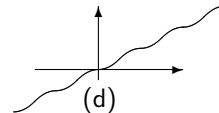
(a)



(b)



(c)



(d)

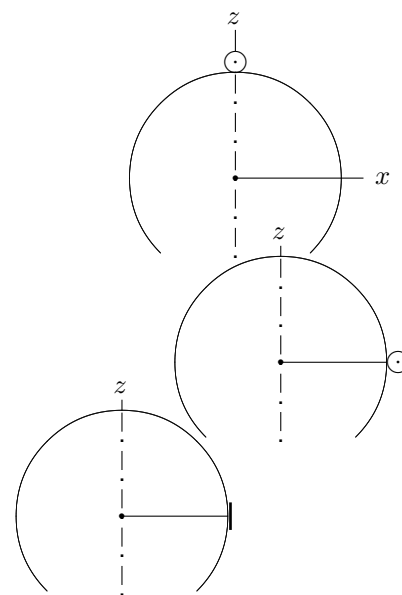
Aufgabe 11: Riesenräder. $\vec{r}(t) = ?$ (2.5+1+1.5=5 Punkte)

(a) Die Erde (R) dreht sich mit Ω um die z -Achse (Ursprung=Erdmitte). Am Nordpol steht ein Riesenrad (Radius ρ , Winkelgeschwindigkeit ω). $\vec{r}(t)$ sei der Ortsvektor der Gondel, welche zur Zeit $t=0$ unten ist: $\vec{r}(0) = (0, 0, R)$. Aus $\vec{r}(t)$ bilden wir auch $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ [dies aber nur zu Teil (a)] und sehen nach, ob die Beträge $v(0)$ und $v(\pi/\omega)$ gleich sind.

(b) Wie bei (a), aber das Riesenrad steht am Äquator. $\vec{r}(0) = (R, 0, 0)$.

(c) Wie bei (b), aber das Rad liegt flach, ist also ein ebenerdiges Karussell. $\vec{r}(0) = (R, 0, -\rho)$.

Tip: Behandeln Sie zu jeder dieser drei Situationen erst einmal eine Vorstufe (vs), in welcher die Erde ruht ($\Omega = 0$): $\vec{r}_{vs}(t) = ?$ Und dann hilft es vielleicht, vom Polarstern aus auf das Geschehen herab zu blicken, also seine Projektion auf die xy -Ebene zu betrachten. (Nützliche Abkürzungen: $s := \sin(\omega t)$, $c := \cos(\omega t)$, $S := \sin(\Omega t)$, $C := \cos(\Omega t)$.)


Aufgabe 12: Ableiten = Differentialquotient bilden (1+1+1+2=5 Punkte)

(a) Bereits aufgrund gewisser Eigenschaften von $f(x)$ läßt sich $f'(x)$ ermitteln:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad f(x+y) = f(x)\sqrt{1+f^2(y)} + \sqrt{1+f^2(x)}f(y) \quad \leadsto \quad f'(x) = ?$$

Wie $f(x)$ verläuft, werde nun grob qualitativ skizziert. (Die Funktion f kennen wir ansonsten nicht. Später einmal bekommt sie einen Namen.)

(b) $f(1+\varepsilon) = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ ($0 < x, y$) $\leadsto f'(x) = ?$ f -Skizze?

(c) Welche funktionale Beziehung [jetzt für $\sin(x) =: f(x)$ allein und für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$] wird zusammen mit welcher $f(\varepsilon)$ -Angabe zur Sinus-Ableitung führen? Was kommt auf diesem Wege heraus?

(d) Bei Übung 9) hatte sich der UFO-Ort $\vec{r}(t) = \frac{R(h-vt-\sqrt{-2hvt})}{h^2+v^2t^2} (-vt, h)$ ergeben. Jetzt interessiert uns seine Geschwindigkeit $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ und zwar kurz bevor es bei $(0, R)$ entschwindet. Wie sich dort $\dot{x}$ bzw. $\dot{y}$ verhalten wird, ist uns anschaulich klar — nämlich (in Worten) wie? Bei der Berechnung von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ dürfen Sie nun (im rechten Moment Ihrer Wahl) allerlei Terme weglassen, welche bei $t \rightarrow -0$ (relativ zu einem additiven Term) beliebig klein werden. Nur ein Term bleibt je schließlich übrig. Sie haben den *asymptotisch führenden Term* von $\dot{x}$ bzw. von $\dot{y}$ präpariert.