●13 Umkehrfkt:

$$\ln(e^x) = x \quad , \quad e^{\ln(x)} = x$$

$$\partial_x \ln(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

$$\ln(xy) = \ln(e^{\ln x} e^{\ln y}) = \ln(e^{\ln x + \ln y}) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \overset{x = e^u}{=} \ln(e^{-u}) = -u = -\ln(x)$$

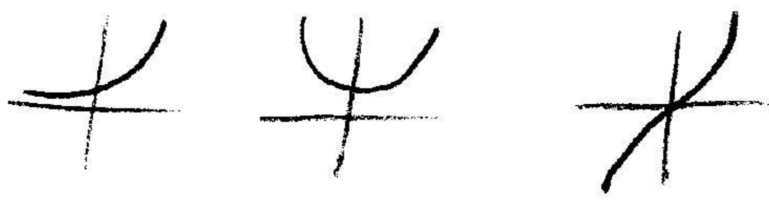
$$10^x = \left[e^{\ln(10)}\right]^x = e^{x \underbrace{\ln(10)}_{= 2.3026}}$$

$$\ln(a + b\varepsilon) = \ln(a[1 + \tfrac{b}{a}\varepsilon]) \overset{!}{=} \ln(a) + \ln(1 + \tfrac{b}{a}\varepsilon) = \ln(a) + \frac{b}{a}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

●14 verwandte Fkn

$$e^x = \underbrace{\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})}_{\equiv \cosh(x)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})}_{\equiv \sinh(x)}$$

→ Umkehrfkt: $\operatorname{arsinh}(x)$ "Area Sinus Hyperbolicus"

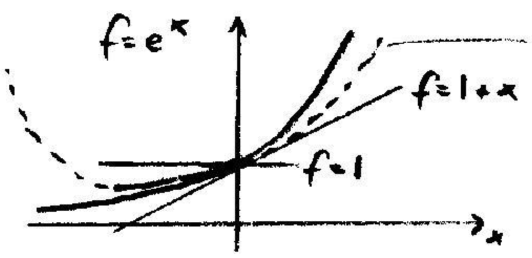


$$\cosh' = \sinh \quad , \quad \sinh' = \cosh$$

$$\cosh^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) = 1 + \sinh^2$$

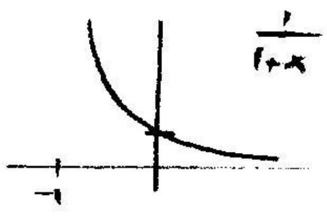
5.3. Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{nicht nur für } e^x \;?$$

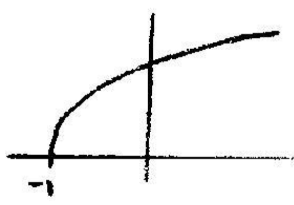


$$\to f = 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{(1+x)^2 + 1}{2}$$

Strategie funktioniert doch auch bei:



$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots$$



$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - x^2 + \ldots$$

wenn $f = \Sigma$, dann: "habe $f(x)$ um $x=0$ entwickelt".

funktioniert immer? — fast (bei Physiker-Fkn)

aber oft nur für $|x| <$ Konvergenzradius

wann nicht? — an patholog. Stellen.

entwickle nicht $|x|$, $\frac{1}{x}$, e^{-1/x^2} um $x=0$

wozu? —
- kann x^n gut differenzieren und aufleiten
- mit Reihenanfängen Probleme vorab vereinfachen (s. Ü 32) $\left(\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin(\varphi) \approx -\frac{g}{\ell}\varphi\right)$
- Resultate abschätzen, Grenzfälle mogeln (s. Ü 34)

|| • kenne f nicht, habe nur Gl. für f,
setze $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ an
und bestimme $c_0, c_1, \dots$ aus der Gl.

(Bsp dazu war oben: e^x)

weiteres Bsp: $f = 1 + xf$ "Dgl. nullter Ordnung"

hat Lsg $f = \frac{1}{1-x}$ und führt zur Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \overset{!}{=} 1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1}, \quad m = n-1$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$\Rightarrow c_0 = 1$ und $c_n = c_{n-1}$ für $n \geq 1$ $\Rightarrow$ alle $c_n = 1$

|||| $$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{geometrische Reihe}, \ |x|<1}$$

Umgang mit Reihen ("Trickkiste") (|| Verfahrensweisen)

1. Abspalten (hier: Billig-Bsp v. oben; Annahme: $\frac{1}{1-x}$ ist eine wilde Fkt)

$$\frac{1}{1-x} \overset{!}{=} 1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = 1 + x \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$\overset{!}{=} 1 + x \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)\right]$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N}_{\overset{!}{=} \frac{1-x^{N+1}}{1-x}} + \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

2. algebraische Umformung

$$\sqrt{1+x} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$1+x = 1 + 2c_1 x + (c_1^2 + 2c_2) x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{8} x^2 + \dots$$

3. aus Stammfkt ("Diff. einer Reihe")

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \partial_x 2\sqrt{1+x} = 1 - \tfrac{1}{2} x + \tfrac{3}{8} x^2 + \dots$$

4. aus Ableitung ("Int. einer Reihe")

$$\partial_x \left(-\ln(1-x)\right) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$-\ln(1-x) = A + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$x=0: \quad -\ln(1) = A \quad \Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

5. Add. von Reihen

$$\cosh(x) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = [e^x]_{\text{gerader Anteil}}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh(x) = \partial_x \cosh(x)$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \left[\ln(1+x)\right]_{\text{ungerade}}$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

6. aus Dgl, z. B. cos-Reihe aus $f'' = -f,\ f'(0) = 0,\ f(0) = 1$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(7. Division v. Reihen: $\tan(x) = \frac{s}{c} = (c_0 + c_1 x + \dots)$

$\Rightarrow$ (sin-Reihe) $= (c_0 + c_1 x + \dots)$ (cos-Reihe), ausmult., $\Rightarrow c_0, c_1, \dots$

8. aus $f(f_u(x)) = x$

9. aus funktionalen Beziehungen)

10. mittels $\boxed{i \cdot i = -1}$, $(ix)^2 = -x^2$, $(ix)^3 = -ix^3$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \text{Euler'sche Formel}}$$

$$\cos(x) = [e^{ix}]_{\text{grade}} = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad , \quad \cos(ix) = \cosh(x)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{i}[e^{ix}]_{\text{ungerade}} = \frac{1}{2i}(\quad - \quad) \quad , \quad \sin(ix) = i \cdot \sinh(x)$$

11. Taylor-Reihe

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$f(0) = c_0 \,,\; f'(0) = c_1 \,,\; f''(0) = 2c_2 \,,\; f'''(0) = 2\cdot 3\, c_3$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n$$

((warum nicht gleich? oft verwendbar; z.B. f'' zu Ü 32 (a): ganze Seite))

Bsp: $f = (1+x)^\lambda$, $f' = \lambda(1+x)^{\lambda-1}$, $f'' = \lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2}$

$$(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2 + \dots$$

oft gebraucht

Zaubertrick zu Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \partial_b^n f(b) \Big|_{b=0} = e^{x\partial_b} f(b) \Big|_{b=0}$$

((generell: $e^{Op.} = 1 + Op. + \frac{1}{2!}Op.^2 + \dots$))

Entwickeln um $x = a$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n = e^{(x-a)\partial_b} f(b)\Big|_{b=a}$$

$$f(x+a) = e^{x\partial_b} f(b)\Big|_{b=a} = e^{x\partial_a} f(a)$$

$$f(x+a) = e^{a\partial_x} f(x) \equiv T_a f(x) \qquad (*)$$

↑ "Translationsoperator" verschiebt Argument um $+a$

zwei (*)-Tests:

- $f(x) = x^2$, $(x+a)^2 \stackrel{?}{=} (1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \dots)x^2 = x^2 + 2ax + a^2$, tatsächlich!
- $f(x) = e^x$, $e^{x+a} \stackrel{?}{=} (1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \dots)e^x = e^x(1 + a + \frac{a^2}{2} + \dots) = e^x e^a$ ✓