Einführung in die Physik II (für Nicht-PhysikerInnen)
Hausaufgaben Woche 12

17 – 21 Juni 2019

1. Wie viele Energiezustände stehen den Elektronen in einem Silberwürfel mit einer Kantenlänge von 1,00 mm im Energiebereich zwischen 2,00 eV und 2,20 eV ungefähr zur Verfügung?

Lösung:
Die Anzahl der Energiezustände entspricht näherungsweise dem Produkt aus der Zustandsdichte und dem Energieintervall: $n \approx g(E)\Delta E$. Wir berechnen zunächst die Zustandsdichte:

$$g(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m_{\mathrm{e}}^{3/2} V}{h^3}\sqrt{E}.$$

$$g(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi\left(9,11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\right)^{3/2}\left(1,0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^3}{\left(6,63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\right)^3}\cdot\sqrt{2,1\,\mathrm{eV}\cdot 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}} = 6,15\cdot 10^{37}\,\mathrm{J}^{-1}.$$

Damit ergibt sich:

$$n \approx \left(6,15\cdot 10^{37}\,\mathrm{J}^{-1}\right)\cdot(2,20-2,00)\,\mathrm{eV}\cdot 1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J/eV} = 1,97\cdot 10^{18}$$

2. Bei Neutronensternen wird das Einstürzen zum Schwarzen Loch verhindert, da die Neutronen der Sterne wegen des Pauli'schen Ausschliessungsprinzip nicht näher an einander kommen können. Das bedeutet also auch, dass in diesem Sonderfall die Neutronen sich ganz ähnlich verhalten wie die Leitungselektronen in Festkörpern – Dieselben Gleichungen und Beschreibungen, die wir für die Elektronen von Festkörpern abgeleitet haben, können also auf die Neutronen eines Neutronensterns angepasst werden.

   Bestimmen Sie also die Fermi-Energie eines Neutronensterns mit einem Radius von 10 km und der doppelten Sonnenmasse ($1,0\,\mathrm{M}_\odot = 2,0\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$). Nehmen Sie an, dass der Stern vollständig aus Neutronen besteht und eine gleichmäßige Dichte besitzt.

Lösung:
Die Neutronen-Volumen-Dichte finden wir von:

$$\frac{n_{\mathrm{n}}}{V} = \frac{M_{\mathrm{NS}}}{m_{\mathrm{n}} V},$$

wobei n_{n} die Anzahl an Neutronen ist, V das Volume der Neutronensterne, M_{NS} die Masse der Neutronensterne, und m_{n} die Masse eines Neutrons. Wir bekommen also:

$$\frac{n_{\mathrm{n}}}{V} = \frac{2,0\cdot 2,0\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{1,67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(10\cdot 10^3\,\mathrm{m}\right)^3} = 5,72\cdot 10^{44}\,\mathrm{m}^{-3}.$$

Die Berechnung der Fermi-Energie erfolgt dann durch:

$$E_{\mathrm{F}} = \frac{h^2}{8m_{\mathrm{e}}}\left(\frac{3}{\pi}\frac{n_{\mathrm{n}}}{V}\right)^{2/3} = 2,18\cdot 10^{-11}\,\mathrm{J} = 1,4\cdot 10^2\,\mathrm{MeV}.$$