Einführung in die Physik II (für Nicht-PhysikerInnen)
Hausaufgaben Woche 11

10 – 14 Juni 2019

1. Angenommen, ein Siliziumhalbleiter ist so mit Phosphor dotiert, dass von 10^6 Siliziumatomen eines durch ein Phosphoratom ersetzt wurde. Um welchen Faktor erhöht sich die Dichte der Leitungselektronen, wenn wir davon ausgehen, dass das zusätzliche Elektron jedes Phosphoratoms in das Leitungsband abgegeben wird? Silizium hat eine Dichte von $2330\,\mathrm{kg/m^3}$, und die Dichte der Leitungselektronen in reinem (undotiertem) Silizium beträgt bei Raumtemperatur etwa $10^{16}\,\mathrm{m^{-3}}$. Die molare Masse von Si ist $28\,\mathrm{g/mol}$.

   (Hinweis: Berechne die Gesamtzahl an Leitungselektronen für eine bestimmte Masse – z.B. ein Mol. Berechne dann die Zahl der Leitungselektronen des Phosphors. Der Quotient dieser zwei Zählen entspricht dem Erhöhungsfaktor.)

   Lösung:
   Betrachten wir 1 Mol an Si Atome (bzw. 28 g oder $6,02 \cdot 10^{23}$ Atome), dann ist die Zahl der Leitungselektronen:
   $$N_{\mathrm{Si}} = \frac{28 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{2330\,\mathrm{kg/m^3}} \cdot 10^{16}\,\mathrm{Elektronen/m^3} = 1,20 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Elektronen}.$$
   Für diese Anzahl an Si Atomen gibt es $6,02 \cdot 10^{23}/10^6 = 6,02 \cdot 10^{17}$ Phosphor Atome und deshalb auch $6,02 \cdot 10^{17}$ zusätzliche Leitungselektronen.
   Die Anzahl an Leitungselektronen ist somit mit einem Faktor von
   $$\frac{6,02 \cdot 10^{17}}{1,20 \cdot 10^{11}} = 5,0 \cdot 10^6$$
   erhöht worden.

2. (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Zustand mit einer Energie von 0,062 eV oberhalb der Fermi-Energie bei $T = 0\,\mathrm{K}$ besetzt?

   Lösung:
   Definitionsgemäß ist bei der absoluten Temperatur $T = 0\,\mathrm{K}$ die Wahrscheinlichkeit null, dass irgendein Zustand mit Energie oberhalb der Fermi-Energie besetzt ist.

   (b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei $T = 320\,\mathrm{K}$?

   Lösung:
   Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand mit der Energie E bei einer Temperatur T besetzt ist, ist gegeben durch:
   $$f(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E - E_{\mathrm{F}})/(k_{\mathrm{B}}T)} + 1},$$
   wobei k_{B} die Boltzmann-Konstante ($1,38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} = 8,62 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV/K}$) und E_{F} die Fermi-Energie ist. Nun haben wir $E - E_{\mathrm{F}} = 0,062\,\mathrm{eV}$ und deshalb folgt:
   $$\frac{E - E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T} = \frac{0,062\,\mathrm{eV}}{8,62 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV/K} \cdot 320\,\mathrm{K}} = 2,248,$$

also

$$f(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{2,248} + 1} = 0,0956.$$

Die Wahrscheinlichkeit dass diesem Energieniveau besetzt ist, beträgt somit 9,56%.

3. Für einen Energiezustand der 1,00 eV oberhalb der Fermi-Energie liegt (bzw. $\Delta E = E - E_\mathrm{F} = 1,00\,\mathrm{eV}$), ist die Fermi-Verteilung – die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand besetzt ist – gegeben durch:

$$f(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\Delta E/(k_\mathrm{B}T)} + 1};$$

und die Besetzungswahrscheinlichkeit aus der klassischen Thermodynamik ist gegeben durch die Boltzmann-Gleichung:

$$p(E) = \mathrm{e}^{-\Delta E/(k_\mathrm{B}T)}.$$

(a) Bei welcher Temperatur unterscheidet sich das quantenmechanische Ergebnis für die Besetzungswahrscheinlichkeit um 1% von dem Ergebnis der klassischen Physik?

Lösung:
Der relative Unterschied zwischen der klassischen und der quantenmechanische Wahrscheinlichkeit ist:

$$f = \frac{p_\mathrm{klass} - p_\mathrm{quant}}{p_\mathrm{klass}}.$$

(Im Nenner könnte man auch p_quant schreiben, was aber die Lösung nicht erheblich ändert. Im Zähler könnte man auch $p_\mathrm{quant} - p_\mathrm{klass}$ schreiben, was aber nur das Vorzeichen des Faktors f ändern würde.)
Definieren wir $K = \mathrm{e}^{\Delta E/(k_\mathrm{B}T)}$ (und deshalb $1/K = \mathrm{e}^{-\Delta E/(k_\mathrm{B}T)}$), dann vereinfacht sich dies zu:

$$f = \frac{1/K - 1/K+1}{1/K} = 1 - \frac{K}{K+1} = \frac{1}{K+1}.$$

(Falls p_quant im Nenner von f gewählt wurde, wird dies: $f = 1/K$.)
Umgerechnet bekommen wir also:

$$K = \frac{1-f}{f}$$

oder:

$$T = \frac{\Delta E}{k_\mathrm{B} \ln\left(\frac{1-f}{f}\right)}.$$

Mit $\Delta E = 1,00\,\mathrm{eV}$ und $k_\mathrm{B} = 8,62 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV/K}$ wird dies:

$$T = 2,53 \cdot 10^3\,\mathrm{K}.$$

(Für die andere Definition von f würde $T = 2,52 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$ gefunden werden, praktisch das gleiche Ergebnis.)

(b) Und bei welcher Temperatur unterscheiden sich die Ergebnisse um 10%?

Lösung:
Dieselbe Gleichung von Teilfrage a) kann benutzt werden und ergibt:

$$T = 5,28 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$$

(oder $5,04 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$).
Somit ist die klassische Gleichung für eine Energiedifferenz von 1,00 eV bei Raumtemperaturen eine recht gute Näherung.