Einführung in die Physik II (für Nicht-PhysikerInnen)
Hausaufgaben Woche 10

3 – 7 Juni 2019

1. Ein Rotationsübergang eines CO-Moleküls vom Zustand mit $J = 1$ zum Zustand mit $J = 0$ hat eine experimentell bestimmte Wellenlänge von $\lambda = 2,60\,\text{mm}$.

   (a) Zeige, dass die Energiedifferenz zwischen zwei Rotationszuständen (wobei $\Delta J = \pm 1$) gegeben ist durch $\Delta E_{\text{rot}} = \hbar^2 J / I$ und nutze dies, um das Trägheitsmoment des CO-Moleküls zu berechnen.

Lösung:
Die Rotationsenergie im Zustand mit Rotationsquantenzahl J ist gegeben von:

$$E_{\text{rot}} = \frac{J(J+1)\hbar^2}{2I}.$$

Die Energiedifferenz zwischen zwei benachbarten Zuständen ist also:

$$\Delta E_{\text{rot}} = \frac{J(J+1)\hbar^2}{2I} - \frac{(J-1)J\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2I}(J^2 + J - J^2 + J) = \frac{\hbar^2 J}{I}.$$

Für den Übergang bei dem J von 1 nach 0 geht erhalten wir:

$$\Delta E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{I}.$$

Diese Energie soll die Energie des emittierten Photons entsprechen, bzw.:

$$\frac{\hbar^2}{I} = hf = \frac{hc}{\lambda}.$$

Hierbei ist λ gegeben und der Rest sind Konstanten. Wir können also das Trägheitsmoment wie folgt berechnen:

$$I = \frac{\hbar^2 \lambda}{hc} = \frac{h\lambda}{4\pi^2 c} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\,\text{Js} \cdot 2,60 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{4\pi^2 \cdot 2,9979 \cdot 10^{8}\,\text{m/s}} = 1,46 \cdot 10^{-46}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

   (b) Berechne die Bindungslänge r des CO-Moleküls. (Die Massen von O und C sind 16,0 u und 12,0 u, mit $1u = 1,66 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$ der atomaren Masseneinheit.)

Lösung:
Für das Trägheitsmoment gilt:

$$I = m_{\text{red}} r_0^2,$$

mit m_{red} der reduzierten Masse des Moleküls und r_0 dem Gleichgewichtsabstand. Für die reduzierte Masse finden wir:

$$m_{\text{red}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{12,0 \cdot 16,0}{28,0} 1,66 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} = 1,14 \cdot 10^{-26}\,\text{kg},$$

und für die Bindungslänge des Moleküls:

$$r = \sqrt{\frac{I}{m_{\text{red}}}} = \sqrt{\frac{1,46 \cdot 10^{-46}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2}{1,14 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}}} = 1,13 \cdot 10^{-10}\,\text{m} = 0,113\,\text{nm}.$$

(c) Berechne die Wellenlängen der drei folgenden Rotationsübergänge und die Energie der jeweils bei jedem dieser vier Übergänge emittierten Photonen.

Lösung:
In Teilfrage a) haben wir schon die Energie des Übergangs $J = 1 \to 0$ berechnet und gezeigt, dass $\Delta E_{\mathrm{rot}} \propto J$. Deshalb wird die Energie von $J = 2 \to 1$ genau zweimal so groß sein usw. Da die Wellenlänge umgekehrt proportional zur Energie ist, wird die Wellenlänge J mal kürzer werden. Wir erhalten also:

- $J = 1 \to 0$: $E_{\mathrm{rot},1} = {}^{hc}/_{\lambda} = 7,64 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J} = 4,77 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$ und $\lambda_1 = 2,60 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$.
- $J = 2 \to 1$: $E_{\mathrm{rot}} = 2E_{\mathrm{rot},1} = 9,54 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$; $\lambda_2 = {}^{\lambda_1}/_{2} = 1,30 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$.
- $J = 3 \to 2$: $E_{\mathrm{rot}} = 3E_{\mathrm{rot},1} = 1,43 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{eV}$; $\lambda_2 = {}^{\lambda_1}/_{3} = 8,67 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$.
- $J = 4 \to 3$: $E_{\mathrm{rot}} = 4E_{\mathrm{rot},1} = 1,91 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{eV}$; $\lambda_2 = {}^{\lambda_1}/_{4} = 6,50 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$.

2. Silizium hat die Atommasse 28,09 u und die Dichte $2,41 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Jedes Siliziumatom hat vier Valenzelektronen, die Fermi-Energie für Silizium beträgt 4,88 eV. Die Molmasse von Silizium (d.h. die Masse von n_{A} Teilchen, wobei n_{A} die Avogadro-Zahl ist), ist $0,02809\,\mathrm{kg/mol}$.

   Berechne den spezifischen Widerstand bei Raumtemperatur. Die mittlere freie Weglänge bei dieser Temperatur ist $\lambda = 27,0\,\mathrm{nm}$.

Lösung:
Den spezifischen Widerstand können wir berechnen mit:

$$r_\Omega = \frac{m_{\mathrm{e}}\langle v\rangle}{e^2 \lambda^{n_{\mathrm{e}}}/_{V}},$$

mit $\langle v\rangle$ der mittleren Geschwindigkeit, die gegeben ist durch:

$$\langle v\rangle \approx v_{\mathrm{F}} = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{F}}}{m_{\mathrm{e}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,88\,\mathrm{eV}}{9,11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}} = 1,31 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}.$$

Die Valenzelektronendichte kann mit der Massendichte und der Molmasse berechnet werden, weil wir wissen, dass es für jeden Kern vier Valenzelektronen gibt. Wir berechnen also:

$$\frac{n_{\mathrm{e}}}{V} = \rho \frac{n_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{Mol}}} n_{\mathrm{Atom}},$$

wobei ρ die Massendichte von Silizium ist, n_{A} die Avogadro-Zahl, n_{Mol} die Molmasse und n_{Atom} die Anzahl an Valenzelektronen pro Atomkern. Dies ergibt:

$$\frac{n_{\mathrm{e}}}{V} = 2,41 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \frac{6,02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}}{0,02809\,\mathrm{kg/mol}} \cdot 4 = 2,06 \cdot 10^{29}\,\mathrm{m^{-3}}.$$

Damit erhalten wir den spezifischen Widerstand:

$$r_\Omega = \frac{9,11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 1,31 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}}{2,06 \cdot 10^{29}\,\mathrm{m^{-3}} \cdot (1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2 \cdot 27,0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 8,36 \cdot 10^{-9}\,\Omega\mathrm{m}.$$