Einführung in die Physik II (für Nicht-PhysikerInnen)
Hausaufgaben Woche 9

27 – 31 Mai 2019

1. In dem Stern-Gerlach-Experiment wird ein Strahl aus (z.B.) Silberatomen (die ursprüngliche Richtung des Strahls bezeichnen wir als die $X-$Richtung) durch einen magnetischen Feldgradienten im $Z-$Richtung ($^{\mathrm{d}B}/_{\mathrm{d}z} = 1,4\,\mathrm{T/mm}$) abgelenkt (in $Z-$Richtung). Die Strecke den der Strahl durch das Magnetfeld zurücklegt beträgt 3,5 cm und die Geschwindigkeit der Atome ist 750 m/s. Die Masse eines Silberatoms ist $1,8 \cdot 10^{-25}$ kg.

   (a) Die potenzielle Energie eines elektrischen Dipols $\vec{\mu}$ in einem Magnetfeld $\vec{B}$ ist gegeben durch: $E_{\mathrm{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Die Kraft die von einen Gradienten der potenzielle Energie ($^{\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}}(x)}/_{\mathrm{d}x}$) ausgeht ist, analog zur klassischen Mechanik, gleich der örtlichen Änderung der potenzielle Energie:

   $$F_{\mathrm{z}} = -\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{d}z}.$$

   Leiten Sie eine Formel ab, die die Kraft auf die Silberatome als Funktion des magnetischen Feldgradienten $^{\mathrm{d}B}/_{\mathrm{d}z}$ darstellt.

   Lösung:
   In der Gleichung für F_{z} ersetzen wir E_{pot} mit $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Weil es nur ein Magnetfeld in $Z-$Richtung gibt, ist $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ einfach gleich $\mu_{\mathrm{z}} B_{\mathrm{z}}$, wobei definitionsgemäß $B_{\mathrm{z}} = B$ und μ_{z} ist der Komponente des magnetischen Moments im $Z-$Richtung. Da das magnetische Moment nicht von z abhängig ist, bleibt dann übrig:

   $$F_{\mathrm{z}} = \mu_{\mathrm{z}} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}.$$

   (b) Das magnetische Moment des Spindrehimpuls eines Elektrons, ist gegeben durch:

   $$\vec{\mu}_{\mathrm{S}} = -\frac{e}{m_{\mathrm{e}}} \vec{S},$$

   wobei $\vec{S}$ der Spindrehimpuls, m_{e} die Masse und e die Ladung des Elektrons sind. Die Komponente von $\vec{S}$ entlang der $Z-$Achse ist gegeben durch:

   $$S_{\mathrm{z}} = m_{\mathrm{S}} \frac{h}{2\pi},$$

   mit m_{S} das Spinquantenzahl. Zeigen Sie, dass die $Z-$Komponente von $\vec{\mu}$ gleich $-2m_{\mathrm{S}}\mu_{\mathrm{Bohr}}$ ist, mit μ_{Bohr} dem Bohr'sche Magneton.

   Lösung:
   Betrachten wir die $Z-$Komponente der ersten Gleichung sehen wir, dass $\mu_{\mathrm{S,z}} = -S_{\mathrm{z}}{}^{e}/_{m}$. Setzen wir hier die Gleichung für S_{z} ein, bekommen wir:

   $$\mu_{\mathrm{S,z}} = -\frac{e}{m} m_{\mathrm{S}} \frac{h}{2\pi} = -m_{\mathrm{S}}{}^{eh}/_{2\pi m}.$$

   Weil das Bohr'sche Magneton definiert ist als $\mu_{\mathrm{Bohr}} = {}^{e\hbar}/_{2m}$ und $\hbar = {}^{h}/_{2\pi}$, gilt auch:

   $$\mu_{\mathrm{S,z}} = -2m_{\mathrm{S}} \frac{eh}{4\pi m} = -2m_{\mathrm{S}} \frac{e\hbar}{2m} = -2m_{\mathrm{S}}\mu_{\mathrm{Bohr}}.$$

(c) Berechnen Sie jetzt, für $m_s = \pm 1/2$ um welchen Abstand Δd_z die Atome abgelenkt werden. Benutzen Sie hierzu die folgenden Gleichungen der Mechanik: $a_z = F_z/m$ und $\Delta d_z = v_{0,z} t + \frac{1}{2} a_z t^2$.

Lösung:
Die Gleichung für die Kraft im $Z-$Richtung ergibt einfach die Beschleunigung:

$$a_z = \frac{-2 m_S \mu_{\mathrm{Bohr}}}{m} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}.$$

Achtet darauf, dass m_S hier die Elektronenspinquantenzahl ist und m die masse der Atome!

Die Gleichung der Auslenkung ändert sich leicht weil die Anfangsgeschwindigkeit in $Z-$Richtung null ist, bzw.: $v_{0,z} = 0$. Wir bekommen:

$$\Delta d_z = \frac{1}{2} a_z t^2 = \frac{1}{2} \frac{-2 m_S \mu_{\mathrm{Bohr}}}{m} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} t^2.$$

Die Zeit t in der die Atome abgelenkt werden, kann berechnet werden mit Hilfe der Länge des Magneten (gegeben als $l = 3{,}5\,\mathrm{cm}$) und der Geschwindigkeit der Teilchen (gegeben als $v = 750\,\mathrm{m/s}$): $t = l/v$. Wir bekommen dann:

$$\Delta d_z = \frac{-m_S \mu_{\mathrm{Bohr}}}{m} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} \left(\frac{l}{v}\right)^2.$$

Hier gilt: m_S entweder $+1/2$ oder $-1/2$; $\mu_{\mathrm{Bohr}} = e\hbar/2m_e = 5{,}79 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV/T} = 9{,}28 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J/T}$, $m = 1{,}8 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$, $\mathrm{d}B/\mathrm{d}z = 1{,}4\,\mathrm{T/mm} = 1{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{T/m}$ und $t = l/v = 3{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}/750\,\mathrm{m/s}$. Es ergibt also:

$$\Delta d_z = 7{,}85 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} = 0{,}079\,\mathrm{mm}.$$

2. Unter einem Rydberg-Atom versteht man ein Atom, in dem ein äußeres Elektron in einen *sehr* hoch angeregten Zustand ($n \approx 40$ oder höher) versetzt ist. Solche Atome sind nützlich, wenn man den Übergang vom quantenmechanischen zum klassischen Verhalten experimentell untersuchen will. Nehmen Sie an, dass bei einem Wasserstoffatom $n = 45$ ist.

(a) Wie hoch ist die Ionisierungsenergie des Atoms in diesem Zustand?

Lösung:
Im Zustand mit der Hauptquantenzahl n ist die Energie $E_n = \frac{-E_0}{n^2}$, mit $E_0 = 13{,}6\,\mathrm{eV}$. Für $n = 45$ erhalten wir:

$$E_{45} = -\frac{13{,}6\,\mathrm{eV}}{45^2} = -6{,}72\,\mathrm{meV}.$$

Die Ionisierungsenergie von diesem Zustand ist:

$$E_{\mathrm{ion}} = -E_{45} = 6{,}72\,\mathrm{meV}.$$

(b) Wie groß ist der Energieunterschied (in eV) zwischen diesem Zustand und dem mit $n = 44$?

Lösung:
Für den Abstand der Energieniveaus mit den Hauptquantenzahlen 44 und 45 erhalten wir:

$$\Delta E_{44,45} = -\left(\frac{13{,}6\,\mathrm{eV}}{45^2} - \frac{13{,}6\,\mathrm{eV}}{44^2}\right) = 3{,}09 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}.$$

(c) Wie groß ist die Wellenlänge eines Photonsdessen Energie dem Unterschied der Niveaus entspricht?

Lösung:
Die Wellenlänge des Photons ergibt sich zu:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm}}{3{,}09 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}} = 4{,}01 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 4{,}01\,\mathrm{mm}.$$

(d) Wie groß ist das Atom im Zustand $n = 45$?

Lösung:
Der Bohr'sche Radius für $n = 45$ ist:

$$r = n^2 \frac{a_0}{Z} = 45^2 \frac{0,0529\,\mathrm{nm}}{1} = 107\,\mathrm{nm} = 0,107\,\mu\mathrm{m}.$$