Einführung in die Physik II (für Nicht-PhysikerInnen)
Hausaufgaben Woche 6

06 – 10 Mai 2019

1. Wenn $\Psi_1(x,t)$ und $\Psi_2(x,t)$ Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung sind, zeige dann dass $\Psi_3(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t)$ auch eine Lösung ist.

Lösung:
Die Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung ist:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + E_{\text{pot}}\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}.$$

Für Ψ_3 können wir dann schreiben:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\left(\Psi_1(x,t)+\Psi_2(x,t)\right)}{\partial x^2} + E_{\text{pot}}\left(\Psi_1(x,t)+\Psi_2(x,t)\right) = i\hbar\frac{\partial\left(\Psi_1(x,t)+\Psi_2(x,t)\right)}{\partial t}.$$

Und weil ${\partial\left(f_1(x,y)+f_2(x,y)\right)}/{\partial x} = {\partial f_1(x,y)}/{\partial x} + {\partial f_2(x,y)}/{\partial x}$ (und ebenso für t), haben wir also:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\Psi_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi_2(x,t)}{\partial x^2}\right] + E_{\text{pot}}\left[\Psi_1(x,t)+\Psi_2(x,t)\right] = i\hbar\left[\frac{\partial\Psi_1(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial\Psi_2(x,t)}{\partial t}\right].$$

Weil $\Psi_1(x,t)$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist, wissen wir dass:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_1(x,t)}{\partial x^2} + E_{\text{pot}}\Psi_1(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi_1(x,t)}{\partial t},$$

und ebenso für $\Psi_2(x,t)$. Füllen wir dieses in die obige Gleichung ein, fällt alles raus und wir erhalten $0 = 0$, was immer stimmt. Wir schließen also daraus, dass $\Psi_3(x,t)$ auch eine Lösung der Schrödinger-Gleichung sein muss.

2. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass für die zeitunabhängige, dreidimensionale Schrödinger-Gleichung die Wellengleichung die Form $\psi(x,y,z) = A\sin(k_1x)\sin(k_2y)\sin(k_3z)$ annimmt, für $k_{\text{i}} = {n_{\text{i}}\pi}/{d}$ in dem Fall eines Kasten mit unendlich hohem Potenzial und Seitenlänge d in alle drei Dimensionen. Zeige, dass in diesem Fall die Energie eines Energiezustandes mit den Quantenzahlen n_1, n_2 und n_3, gegeben wird durch:

$$E_{\text{n}_1,\text{n}_2,\text{n}_3} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2md^2}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right).$$

Lösung:
Wir fangen an mit der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung in drei Dimensionen:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + E_{\text{pot}}\psi = E\psi.$$

Innerhalb des Kastens ist $E_{\text{pot}} = 0$, wir können also die Gesamtenergie berechnen aus:

$$E = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right).$$

Mit $\psi(x,y,z) = A\sin(k_1 x)\sin(k_2 y)\sin(k_3 z)$. Die Ableitungen werden damit:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = Ak_1\cos(k_1 x)\sin(k_2 y)\sin(k_3 z)$$

und

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -Ak_1^2\sin(k_1 x)\sin(k_2 y)\sin(k_3 z) = -k_1^2\psi.$$

Ähnlich finden wir:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -k_2^2\psi$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -k_3^2\psi$$

Wir haben also für die Energie:

$$E = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\left(-k_1^2\psi - k_2^2\psi - k_3^2\psi\right).$$

oder:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right).$$

Mit $k_\mathrm{i} = {}^{n_\mathrm{i}\pi}/_{d}$, gibt dies:

$$E_{\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2,\mathrm{n}_3} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2md^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right).$$