Einführung in die Physik II (für Nicht-PhysikerInnen)
Hausaufgaben Woche 5

29 April – 03 Mai 2019

1. Zeigen Sie, dass in dem Bereich $x > d$ (also *außerhalb* des Kastens) des endlichen Kastenpotentials die Funktion $\psi(x) = D \exp(2kx)$ eine Lösung der eindimensionalen (d.h. zeitunabhängige) Schrödingergleichung ist, wobei D eine Konstante und k positiv ist. Aus welchem Grund halten wir diese mathematisch sinnvolle Lösung der Schrödingergleichung physikalisch für inakzeptabel?

Lösung:
Die zeitunabhängige Schrödingergleichung ist:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + (E_{\text{pot}}(x) - E)\,\psi(x) = 0.$$

Berechnen wir jetzt die Ableitung $\mathrm{d}\psi(x)/\mathrm{d}x$:

$$\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x} = 2kD\exp(2kx)$$

und:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x} = 4k^2 D\exp(2kx).$$

Die Schrödingergleichung wird dann:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}4k^2 D\exp(2kx) + (E_{\text{pot}}(x) - E)\,D\exp(2kx) = 0.$$

Vereinfacht, wird dies:

$$-\frac{2\hbar^2 k^2}{m} + (E_{\text{pot}}(x) - E) = 0$$

Also sollte:

$$k^2 = \frac{m}{2\hbar^2}\left(E_{\text{pot}}(x) - E\right).$$

Weil außerhalb des Kastens die potentielle Energie höher ist als die Gesammtenergie, ist dieses also positiv, und könnte also – rein mathematisch – eine Lösung sein.

Physikalisch ist diese Lösung aber inakzeptabel weil die Normierungsbedingung nicht erfüllt werden kann, da die Werte von $\psi(x)$ für große Werte von x nicht gegen null konvergieren; bzw. weil das Integral von $\psi(x)$ unendlich groß ist.

2. Ein Elektron befindet sich im Grundzustand in einem unendlich hohen Kastenpotential der Breite 250 pm. Was sind die vier längsten Lichtwellenlängen, mit denen das Elektron über eine einzelne Photonenabsorption angeregt werden kann? Können wir diese Absorptionslinien sehen (d.h. mit unseren Augen. Gemeint ist *nicht* ob die Absorption gemessen oder nachgewiesen worden kann, was sowieso der Fall ist). (Das menschliche Auge ist empfindlich für Wellenlängen zwischen 380 nm und 750 nm.)

Lösung:

Die Lichtwellenlänge sollte einer Energie entsprechen, die genau gleich der Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand und den vier Zuständen darüber ($n = 2, 3, 4, 5$) ist. Die Photonenenergie eines Photons mit Wellenlänge λ ist gegeben durch $E = hf = {}^{hc}/_{\lambda}$ und die Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand und einem höheren Zustand mit Quantenzahl n ist gegeben durch: $\Delta E = \left(n^2 - 1\right) {}^{h^2}/_{8md^2}$. Es folgt also dass:

$$\frac{hc}{\lambda_\mathrm{n}} = \left(n^2 - 1\right) \frac{h^2}{8md^2}$$

und deshalb:

$$\lambda_\mathrm{n} = \frac{8hcmd^2}{h^2\left(n^2 - 1\right)} = \frac{8cmd^2}{h\left(n^2 - 1\right)},$$

mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 2,9979 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$, der Elektronenmasse $m = 9,10939 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, der Kastengröße $d = 250 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$ und dem Planck'sche Wirkungsquantum $h = 6,62608 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$.

Für $n = 2, 3, 4, 5$ bekommen wir dann:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= 6,87 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} = 68,7\,\mathrm{nm} \\
\lambda_3 &= 2,58 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} = 25,8\,\mathrm{nm} \\
\lambda_4 &= 1,37 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} = 13,7\,\mathrm{nm} \\
\lambda_5 &= 8,59 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} = 8,59\,\mathrm{nm}
\end{aligned}$$

Da die Wellenlängen des sichtbaren Licht im Bereich von 380 nm bis 750 nm liegen und die ermittelten Wellenlängen alle kürzer sind, können wir erkennen, dass die Absorptionslinien allen im ultraviolettem Teil des Spektrums liegen, und dementsprechend nich mit dem bloßen Auge gesehen werden können.