Einführung in die Physik II (für Nicht-PhysikerInnen)
Hausaufgaben Woche 3

15–19 April 2019

1. Licht, das sich in Richtung eines ansteigenden Gravitationspotenzials ausbreitet, unterliegt einer Rotverschiebung seiner Frequenz. Wie groß ist die Frequenzänderung, wenn ein Lichtstrahl der Wellenlänge $\lambda = 632,8\,\mathrm{nm}$ einen vertikalen Schacht mit einer Höhe von $l = 100\,\mathrm{m}$ hinaufgeschickt wird? (Die Energie eines Photons mit Frequenz ν ist $E = h\nu$ mit h Planck'sche Konstante: $h = 6,6260755 \cdot 10^{-34}$ Js.)

Lösung: Während der Aufstieg entlang der Strecke l, wächselt das Photon Strahlungsenergie ($h\nu$) für Potenzielle Energie (mgl). Es gilt also:

$$h\Delta\nu = mg\Delta l$$

wobei $\Delta l = l$ und $\Delta\nu$ gefragt ist. Jetzt ergibt sich ein Problem, weil Photonen keine Masse haben sollen. Für eine *Äquivalentmasse* m, jedoch, können wir die Ruhe-Energie am Anfang des Experiments wie folgt definieren:

$$E_0 = mc^2 = h\nu.$$

Wir können jetzt also m ersetzen durch $^{h\nu}/_{c^2}$:

$$\Delta\nu = \frac{h\nu g\Delta l}{hc^2}.$$

Berechnen wir jetzt noch die Anfangsfrequenz mit $c = \nu\lambda$:

$$\nu = {}^{c}/_{\lambda} = {}^{2,9979 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}/_{632,8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 4,738 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$$

Es folgt:

$$\Delta\nu = \frac{\nu g\Delta l}{c^2} = \frac{4,738 \cdot 10^{14} \cdot 9,81 \cdot 100\,\mathrm{Hz \cdot m/s^2 \cdot m}}{8,9874 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m^2/s^2}} = 5,172\,\mathrm{Hz}$$

2. Zwei Ereignisse sind im Bezugssystem S_A durch die räumliche Distanz $\Delta x = x_2 - x_1$ und das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ voneinander getrennt.

   (a) Zeigen Sie mithilfe der Lorentz-Transformation, dass der zeitliche Abstand in einem Bezugssystem S_B, das sich mit der Geschwindigkeit v' relativ zu S_A bewegt, durch $t'_2 - t'_1 = \gamma\left(\Delta t - v'{}^{\Delta x}/_{c^2}\right)$ gegeben ist.

   Lösung: Die Lorentz-Transformation stellt:

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{v' x_1}{c^2}\right)$$
$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v' x_2}{c^2}\right)$$

   Subtrahieren wir jetzt die erste Gleichung von der zweiten, finden wir:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - t_1 - \frac{v'}{c^2}(x_2 - x_1)\right).$$

   Definieren wir jetzt $\Delta t = t_2 - t_1$ und $\Delta x = x_2 - x_1$, dann wird dies:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left(\Delta t - {}^{v'\Delta x}/_{c^2}\right)$$

(b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse im Bezugssystem S_B nur dann gleichzeitig stattfinden können, wenn Δx größer als $c\Delta t$ ist.

> **Lösung:** Um im Bezugssystem S_B gleichzeitig stattzufinden, muss $t_2' - t_1' = 0$ sein, bzw. muss gelten:
>
> $$\Delta t = \frac{v'\Delta x}{c^2}.$$
>
> Schreiben wir dieses jetzt ein bisschen um:
>
> $$c\Delta t = \beta \Delta x$$
>
> dann ist klar dass für jede mögliche Geschwindigkeit, $\beta < 1$ und deshalb:
>
> $$c\Delta t = \beta\Delta x < \Delta x.$$
>
> Dass heisst, dass in der Fall wo die zwei Ereignisse als gleichzeitig beobachtet worden, immer Δx größer sei dann $c\Delta t$.

(c) Wenn eines der Ereignisse die *Ursache* für das andere ist, muss die Distanz Δx kleiner als $c\Delta t$ sein, da ein Signal mindestens die Zeit ${}^{\Delta x}/_{c}$ benötigt, um in S_A von x_1 nach x_2 zu gelangen. Zeigen Sie, dass für den Fall $\Delta x < c\Delta t$ in allen Bezugssystemen $t_2' > t_1'$ gilt. Das bedeutet: Wenn die Ursache der Wirkung in einem Bezugssystem vorausgeht, so ist dies auch in allen anderen Bezugssystemen der Fall.

> **Lösung:** Falls $\Delta x < c\Delta t$, und weil $\beta < 1$, ist auch $\beta\Delta x < c\Delta t$. Deshalb gilt auch: $\Delta t > {}^{v'\Delta x}/_{c^2}$, und also: $\Delta t - {}^{v'\Delta x}/_{c^2} > 0$. Die Gleichung von Teilfrage a) wird dann:
>
> $$t_2' - t_1' = \gamma\left(\Delta t - {}^{v'\Delta x}/_{c^2}\right) > 0.$$
>
> Also gilt: $t_2' > t_1'$, unhabhängig von v' (insofern $v' \neq c$).
> Eine andere weise um dies zu beschreiben, ist dass Information nicht schneller als Licht reisen kann, bzw.: man kann nicht ein Ergebnis herausfinden bevor seinen Ursach bekannt ist.